Estática dos Fluidos

Este capítulo trata de casos nos quais as tensões de cisalhamento são nulas, ou seja, as únicas forças de superfície são as forças de pressão.*

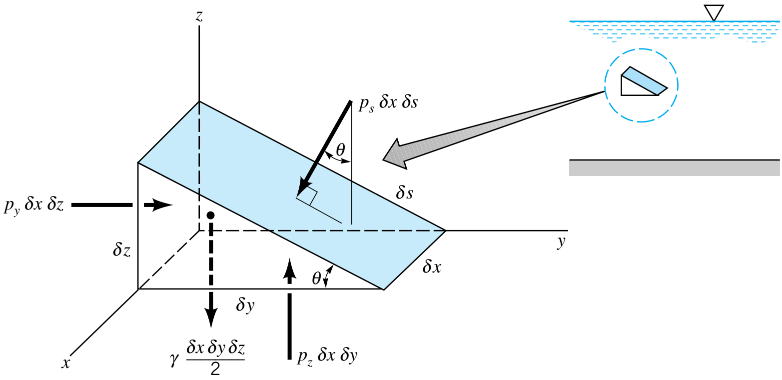
1 Pressão num ponto

Pressão: força normal por unidade de área que atua sobre um ponto do fluido num dado plano.

Como a pressão varia com a orientação do plano que passa pelo ponto?

Considerando um elemento fluido na forma de cunha, com profundidade δx e peso específico γ:

*Objetivos: estudo da pressão, como ela varia no meio fluido e seu efeito sobre superfícies imersas.



Equações do movimento:

$$\Sigma F_y = p_y \delta x \delta z - p_s \delta x \delta s \operatorname{sen}\theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y$$

$$\Sigma F_z = p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta s \cos\theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z$$

Sabendo que $\delta y = \delta s \cos\theta$ e $\delta z = \delta s \operatorname{sen}\theta$, chegamos a:

$$p_y - p_s = \rho \frac{\delta y}{2} a_y$$
$$p_z - p_s = (\gamma + \rho a_z)\frac{\delta z}{2}$$

Num ponto, $\delta x \to 0$, $\delta z \to 0$, $\delta z \to 0$,

$$\therefore \quad p_y = p_s;\ p_z = p_s$$

Como θ é arbitrário, concluímos que:

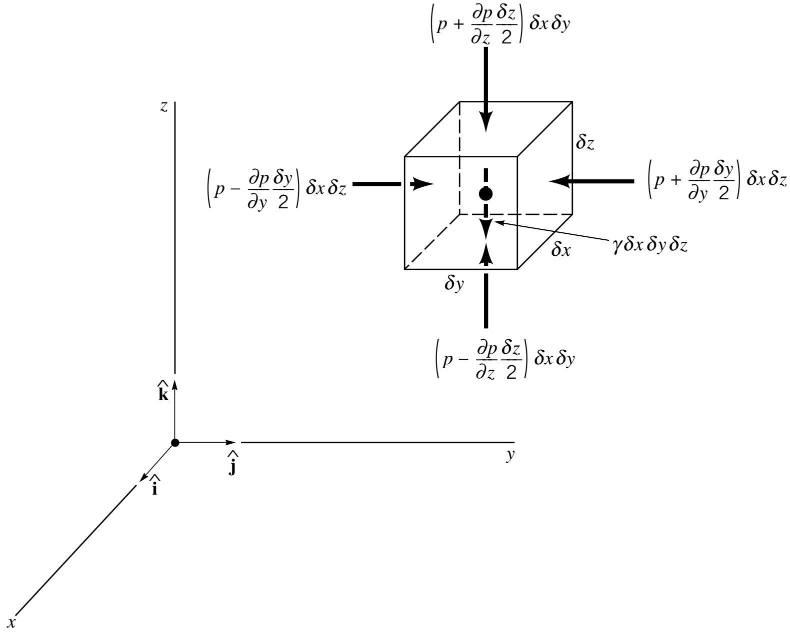
$\boxed{\text{Quando } \tau = 0\text{, o valor de } p \text{ num ponto do fluido independe da direção.}}$

2 Equação básica do campo de pressão

Como varia, ponto a ponto, a pressão numa certa quantidade de fluido quando $\tau = 0$?

Vamos analisar um elemento hexaédrico com as seguintes características:

- Dimensões $(\delta x, \delta y, \delta z)$;
- Pressão no centro geométrico $= p$;
- Massa específica $= \rho$, peso específico $= \rho g = \gamma$;
- Variação da pressão aproximada por séries de Taylor truncadas nos termos de ordem 1.



$\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x\,\delta y$
$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z$
$\left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z$
$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x\,\delta y$
δz
δx
δy
$\gamma\,\delta x\,\delta y\,\delta z$
z
y
x
$\hat{\mathbf{k}}$
$\hat{\mathbf{j}}$
$\hat{\mathbf{i}}$

Forças superficiais:

Direção y: $\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x \delta y \delta z$

Analogamente: $\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$ e $\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x \delta y \delta z$

Passando para a forma vetorial: $\delta \vec{F}_S = \delta F_x\,\hat{i} + \delta F_y\,\hat{j} + \delta F_z\,\hat{k}$

$$\delta \vec{F}_S = -\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\nabla p}\delta x \delta y \delta z$$

$$\frac{\delta \vec{F}_S}{\delta x \delta y \delta z} = -\nabla p$$

Forças de campo:

$$\delta \vec{F}_B = \rho \, \delta x \delta y \delta z \, \vec{g}$$

2ª lei de Newton:

$$\Sigma \delta \vec{F} = \delta m \, \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \delta \vec{F}_S + \delta \vec{F}_B = \delta m \, \vec{a}$$

$$-\nabla p \, \delta x \delta y \delta z + \rho \, \delta x \delta y \delta z \, \vec{g} = \rho \, \delta x \delta y \delta z \, \vec{a}$$

Dividindo por $\delta x \delta y \delta z$:

$$\boxed{-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}}$$

Equação básica do campo de pressão

Simplificações sucessivas:

- Se $\vec{g} = -g\hat{k}$:

$$-\nabla p - \gamma\hat{k} = \rho\vec{a}$$

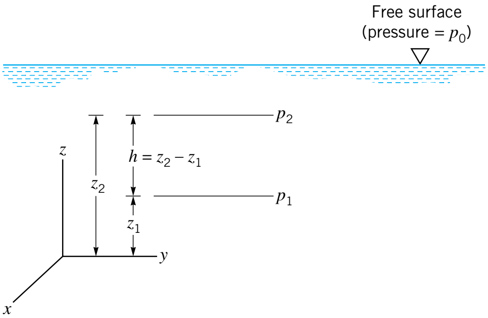
- Se o fluido está em repouso ($\vec{a} = 0$):

$$-\nabla p - \gamma\hat{k} = 0$$

$$\text{Componentes:} \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \end{cases} \Rightarrow p = p(z) \quad \therefore \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\gamma$$

- Fluido incompressível (ρ constante) e g constante:

  Podemos integrar a equação, usando separação de variáveis.

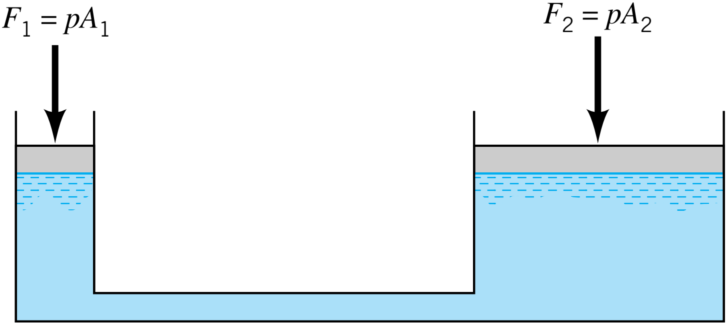


$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1)$$

Chamando $h = (z_2 - z_1)$: $\boxed{p_1 = \gamma h + p_2}$ **Lei de Stevin**

A pressão num fluido estático varia linearmente com h e depende somente de p_0, h e γ. Independe da forma do recipiente.

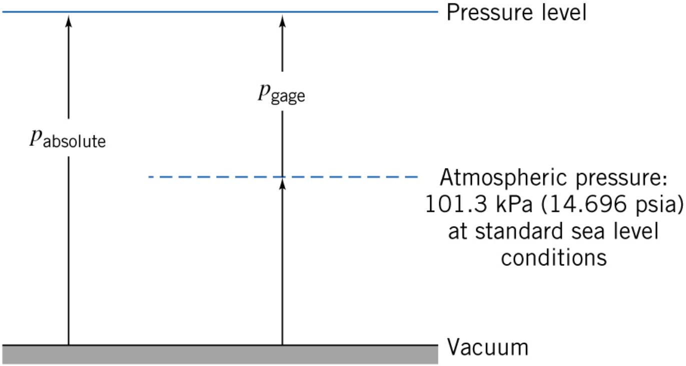
Aplicação: multiplicação de forças em dispositivos hidráulicos.



$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

3 Medição da pressão

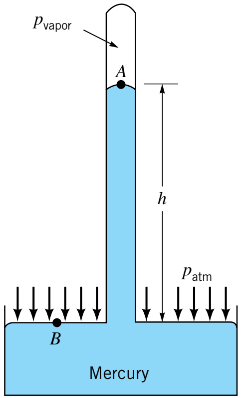
Valores de pressão são estabelecidos em relação a um nível de referência.



$$p_{\text{rel}} = p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}}$$

Unidades: Pa $= \mathrm{N/m^2}$ (SI), psi, bar, altura de coluna de líquido (m.c.a., mmHg), etc.

3.1 Medição da pressão atmosférica – barômetro de Hg:



$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h + \underbrace{p_{vapor}}_{\substack{\text{desprezível} \\ (0{,}16\,\text{Pa abs})}}$$

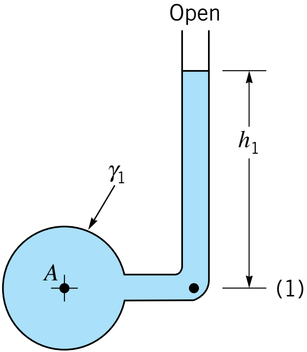
$$p_{atm} \approx \gamma_{Hg} h$$

Ao nível do mar,
$p_{atm} = 760\,\mathrm{mmHg} = 10{,}36\,\mathrm{m.c.a.}$.

3.2 Manometria

Manômetros: instrumentos que medem pressões relativas.

3.2.1 Tubo piezométrico

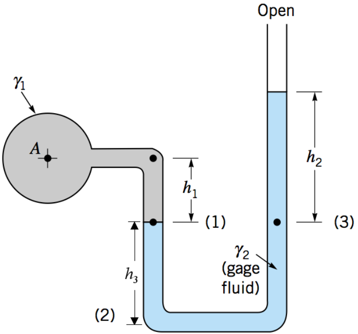


$$p_A = p_0 + \gamma_1 h_1 \qquad \text{(abs)}$$
$$p_A = \gamma_1 h_1 \qquad \text{(rel)}$$

Restrições:

- $p_A > p_{\text{atm}}$;
- p_A não pode ser muito grande;
- fluido do recipiente tem que ser líquido.

3.2.2 Manômetro com tubo em U



$$p_A = p_1 - \gamma_1 h_1$$
$$p_1 = p_2 - \gamma_2 h_3$$
$$p_2 = p_3 + \gamma_2 h_3$$
$$p_3 = \cancel{p_{\text{atm}}} + \gamma_2 h_2$$

$$p_A = -\gamma_1 h_1 - \cancel{\gamma_2 h_3} + \cancel{\gamma_2 h_3} + \gamma_2 h_2$$
$$\therefore \quad p_A = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$$

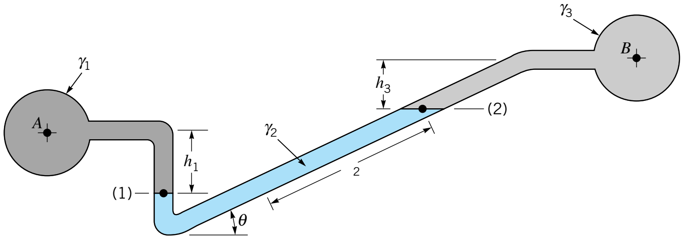
- Fluido manométrico pode ser diferente do fluido do recipiente.
- Se o fluido do recipiente for um gás, normalmente seu peso específico (e sua contribuição) pode ser desprezado.

3.2.3 Macetes

- "Dois pontos de mesma elevação, em uma massa contínua do mesmo fluido estático, terão a mesma pressão."
- Para baixo: sinal negativo.
- Para cima: sinal positivo.

3.2.4 Sensibilidade

Razão entre a deflexão observada no líquido manométrico e a diferença de pressão aplicada. Podemos aumentá-la inclinando o tubo.



$$p_A = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta + \gamma_3 h_3 + p_B \quad \Rightarrow \quad p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta - \gamma_1 h_1 + \gamma_3 h_3$$

Se os fluidos 1 e 3 forem gases, $p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad l_2 = \dfrac{p_A - p_B}{\gamma_2 \operatorname{sen}\theta}$