



Márcio Martins Jacob Gustavo de Lima Ribeiro

10801127

11223865

Grupo 06

Laboratório de Mecânica

Nemitala Added

7,1

# Relatório sobre viscosidade

Marcio Martins Jacob  
Gustavo de Lima Ribeiro

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resumo</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introdução ao experimento</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Metodologia experimental</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Resultados e análise de dados obtidos</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Discussão final e conclusões</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>25</b>

# 1 Resumo

índice

Ao soltar esferas de diferentes tamanhos em um tubo com óleo, calcula-se o tempo de queda e a partir disso e do diâmetro de cada esfera, é calculada a viscosidade do óleo, porém são dois experimentos, cada um realizado a uma temperatura diferente. Nesse relatório é analisada a influência da temperatura na viscosidade, bem como a influência das paredes do tubo, sendo assim, o fator de correção de Ladenburg, que supostamente corrigiria o valor da viscosidade, levando em conta a relação entre o tamanho da esfera e do tubo, não se mostrou suficiente.

objetivo?

## 2 Introdução ao experimento

Fluidos são substâncias que têm a capacidade de fluir, escoar e não resistem a forças paralelas a sua superfície, se deformam continuamente quando submetidos a uma tensão de cisalhamento<sup>1</sup>. Líquidos e gases são possíveis exemplos para fluidos, esses sempre assumem o formato do recipiente onde são confinados e não possuem seus átomos organizados de forma simétrica e rígida, formando redes cristalinas<sup>2</sup>. Fluidos apresentam certas propriedades, como a compressibilidade, ainda assim, líquidos são pouco compressíveis, pois apresentam uma superfície própria, diferente dos gases, que geralmente são compressíveis, e expandem para ocupar todo o volume dentro do recipiente, assim, não apresenta superfície bem definida.

A superfície de um líquido quando toca em um sólido, está sempre em repouso em relação a esse sólido, que pode ser o próprio recipiente, por exemplo. Os fluidos são compostos de pequenas moléculas que interagem entre si, porém, quando ocorre o escoamento a baixas velocidades, a caótica interação entre as partículas integrantes do líquido podem ser consideradas como camadas, lâminas. O que é conhecido como escoamento laminar, onde o fluxo é descrito como um deslizamento entre as camadas. Outra propriedade de fluidos age a favor das camadas, amortecendo a tendência de surgimento da turbulência, essa é a viscosidade do fluido, que pode ser interpretada como uma espécie de resistência ao movimento, que dificulta seu escoamento. Para o caso de velocidades mais altas de escoamento, ou de líquidos menos viscosos, as camadas se desfazem e ocorre o escoamento turbulento, onde as moléculas não se movem ao longo de trajetórias bem

---

<sup>1</sup>Tensão tangencial ou tensão de corte.

<sup>2</sup>Como os sólidos cristalinos, por exemplo.

definidas, apresentam trajetórias irregulares, análogo ao Movimento Browniano<sup>3</sup>. Sendo assim, o escoamento turbulento é descrito, em grande parte, estatisticamente, por isso, para que seja possível estudar mais a fundo as propriedades dos fluidos, o escoamento nesse experimento é laminar.

A viscosidade de um fluido depende de sua temperatura, sendo inversamente proporcional a ela, quando a temperatura cresce, a viscosidade diminui. A viscosidade no sistema de medidas cgs é dada em Poise,  $g/cm \cdot s$ , já no Sistema Internacional de medidas (SI), é dada em Pa.s. A Lei de Stokes relaciona a viscosidade ( $\eta$ ) de um fluido à força de fricção ( $\vec{F}$ ) que objetos esféricos experimentam ao moverem-se num fluido viscoso, a equação advém da resolução de um caso particular das equações de Navier-Stokes, sendo assim, é válida para corpos esféricos pequenos, movendo-se a baixas velocidades. A relação de Stokes também utiliza o raio da partícula ( $r$ ), quando o escoamento do fluido em torno da esfera é laminar e a velocidade ( $\vec{v}$ ) desempenhada. Posto isso, a fórmula é dada por:

$$\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v} \quad (1)$$

Dessa forma, é possível notar que a velocidade e a força de fricção apresentam mesma direção, mas sentido opostos, devido ao sinal negativo e aos escalares que multiplicam a velocidade serem todos positivos. Destarte, é necessário realizar um diagrama do corpo livre na esfera, ela será solta no fluido viscoso, sendo assim, haverá a atração gravitacional da Terra, a força-peso ( $\vec{P}$ ) atuando na esferinha. Além disso, com o contato do corpo com o fluido, há a força de empuxo<sup>4</sup> ( $\vec{E}$ ). O empuxo e a força de fricção atuam contra a queda da esfera, enquanto que a força-peso atua a favor, ou seja, todas as forças estão na direção vertical. O módulo da força de empuxo pode ser calculada pelo volume do líquido deslocado, que nesse caso, como a esfera mergulha, é igual ao volume do corpo ( $V_c$ ), a densidade do meio líquido ( $\rho_m$ ) e a aceleração da gravidade ( $g$ ), dessa forma:

$$\|\vec{E}\| = E = \rho_m \cdot V_c \cdot g \quad (2)$$

Já para o peso do corpo, como a massa ( $m$ ) do corpo pode ser escrita em função de sua densidade ( $\rho_c$ ), por:  $m = \rho_c \cdot V_c$ . Posto isso, o módulo da força-peso pode ser escrito

---

<sup>3</sup>Movimento aleatório das partículas suspensas em um líquidos ou gás, resultante das colisões internas entre as partículas.

<sup>4</sup>Força de reação do fluido deslocado sobre o objeto mergulhado, seja total ou parcialmente.

por:

$$\|\vec{P}\| = P = \rho_c \cdot V_c \cdot g \quad (3)$$

Dessa forma, o sistema de referências será adotado de cima para baixo, que é o sentido da velocidade do corpo mergulhando no meio viscoso, portanto, a força resultante pode ser expressa por:

$$\vec{R} = \vec{P} - \vec{E} - \vec{F} \quad (4)$$

E, como pela segunda Lei de Newton, a força resultante é igual à massa do corpo multiplicado pela segunda derivada da posição em função do tempo, ou primeira derivada da velocidade em função do tempo, que também é conhecida como aceleração, é possível substituir o valor na equação 4. Além disso, há termos comuns entre a força-peso e a força de empuxo, o volume da esfera e a aceleração gravitacional, sendo assim:

$$P - E = \rho_c \cdot V_c \cdot g - \rho_m \cdot V_c \cdot g = (\rho_c - \rho_m)V_c \cdot g$$

Para efeito de facilitar a equação, pode-se definir a massa aparente do corpo ( $m^*$ ), que é a massa que ele aparenta ter quando submerso no meio viscoso, dessa forma:

$$m^* = (\rho_c - \rho_m)V_c \quad (5)$$

$$\therefore P - E = m^* \cdot g$$

Para simplificar ainda mais, como durante o experimento será certificado que a viscosidade não irá variar, tem-se que, o valor de pi, o número seis e a viscosidade são valores constantes, desse modo, pode-se criar uma constante de proporcionalidade  $b$ , com  $b = 6\pi\eta$ , dessa maneira:

$$\|\vec{F}\| = F = bv \quad (6)$$

Ao juntar a equação 5, 6 com o módulo da equação 4, obtém-se:

$$m \frac{dv}{dt} = m^*g - bv \quad (7)$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem, que pode ser resolvida por meio da soma da solução da equação homogênea<sup>5</sup> ( $v_h$ ) com uma solução particular

---

<sup>5</sup>Uma equação homogênea é composta apenas pelos termos que apresentam a variável que aparece na equação junto de sua derivada, para esse caso, essa variável é a velocidade  $v$ .

da equação não homogênea ( $v_p$ ). Sendo assim, a equação homogênea é do tipo:

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (8)$$

Que pode ser transformado em:

$$\frac{dv}{v} = \frac{-b}{m} dt$$

Integrando os dois lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v} dv &= \int \frac{-b}{m} dt \\ \ln v &= \frac{-b}{m} t + c \\ v &= e^{\frac{-b}{m} t + c} = e^{\frac{-b}{m} t} \cdot e^c \end{aligned}$$

O termo constante propagado a partir da constante tirada da integral indefinida, pode-se propagar  $e^c$  para uma constante  $\beta$ . Por consequência:

$$v_h = \beta \cdot e^{\frac{-b}{m} t} \quad (9)$$

Para encontrar uma solução própria da equação 7, pode-se utilizar uma solução particular onde  $t \rightarrow \infty$ . Há um valor limite para a velocidade, já que há a aceleração gravitacional acelerando a esfera e há a força de fricção que causa uma maior desaceleração quanto maior for a velocidade. Sendo assim, há uma velocidade limite que será atingida e, depois disso, o corpo ficará em velocidade constante, portanto, quando  $t$  tende ao infinito,  $v$  fica constante, por isso:

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Sendo assim, resta apenas:

$$bv_p = m^* g$$

Portanto:

$$v_p = \frac{m^* g}{b} \quad (10)$$

Assim,  $v(t) = v_h + v_p$ :

$$v(t) = \beta \cdot e^{\frac{-b}{m} t} + \frac{m^* g}{b} \quad (11)$$

Para descobrir o valor da constante  $\beta$ , é substituído  $t=0$ , o que implica em:

$$v(0) = \beta \cdot e^0 + \frac{m^*g}{b}$$

Como, por definição a esfera parte do repouso, pois ela é solta no líquido, tem-se que  $v(t = 0) = 0$ , assim:

$$\beta = -\frac{m^*g}{b}$$

Sendo assim, a equação final da velocidade é:

$$v(t) = \frac{m^*g}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad (12)$$

Para encontrar o valor da velocidade limite supracitada, utiliza-se  $t \rightarrow \infty$ , assim:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m^*g}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \\ \frac{m^*g}{b} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \\ e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{1}{e^{\frac{b}{m}t}} \\ \therefore t \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{b}{m}t}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Com isso, a velocidade máxima é:

$$v_{\infty} = \frac{m^*g}{b}(1 - 0) = \frac{m^*g}{b} \quad (13)$$

Ao juntar a equação 13, com a 5, com o valor atribuído para  $b$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} v_{\infty} &= \frac{m^*g}{6\pi\eta r} \\ v_{\infty} &= \frac{g(\rho_c - \rho_m)V_c}{6\pi\eta r} \end{aligned}$$

Como o corpo solto no fluido é uma esfera, é possível utilizar o valor do volume da esfera em função do raio do corpo,  $V_c = \frac{4}{3}\pi r^3$ , sendo assim:

$$v_{\infty} = \frac{g(\rho_c - \rho_m)\frac{4}{3}\pi r^3}{6\pi\eta r}$$

$$v_{\infty} = \frac{g(\rho_c - \rho_m)2r^2}{9\eta}$$

Dessa maneira, é possível encontrar o valor da viscosidade do líquido em função da densidade do corpo e do líquido, do raio do corpo, da aceleração gravitacional e da velocidade limite adquirida pelo corpo ao ser solto no fluido, por meio da relação:

$$\eta = (\rho_c - \rho_m) \frac{2gr^2}{9v_{\infty}} \quad (14)$$

No entanto, mesmo antes de conhecer o arranjo experimental, sabe-se que o tubo em que a esfera foi solta, tem um certo comprimento, não existe um tubo infinito para o qual seja possível analisar a velocidade do corpo quando considera-se um valor muito grande para o tempo passado. Além disso, existem as paredes do recipiente, que influenciam no movimento da esferinha e não foram levadas em consideração até aqui. É possível utilizar o fator de correção de Ladenburg, um parâmetro adimensional que depende da razão entre o raio da esfera e o raio do recipiente que a contém. Sendo assim, a força de fricção, ao considerar a influência das paredes do recipiente, é expressa em função da equação 1 por:

$$F_l = (1 + C)F \quad (15)$$

Onde:

$$C = \alpha \frac{r}{R} + \left( \alpha \frac{r}{R} \right)^2 \quad (16)$$

O raio do recipiente (R), agora é levado em conta, na equação 16 há uma constante ( $\alpha$ ) para a qual já encontraram valores distintos, mas para todos os casos, é possível aproximar  $\alpha \approx 2,4$ . Então, para encontrar o valor da velocidade limite, considerando as ponderações feitas acima, é preciso salientar que, na velocidade limite a ser encontrada, pega-se o caso limite da força de fricção, onde a própria força de fricção chega ao ponto de equilibrar a força-peso, ou seja, desconsidera-se a força de empuxo. Isso posto, a correção de Ladenburg nas fórmulas 15 e 16, é refletida diretamente no valor da velocidade limite, por isso, pode ser relacionada com a equação 13 por:

$$v_{limite} = \frac{v_{\infty}}{(1 + C)} \quad (17)$$

Com isso,  $v_{limite}$  é um valor mais próximo ao real, o valor experimental esperado. Já para o comprimento do tubo supracitado, leva-se em conta, no cálculo do fator de correção,



a razão entre o raio da esfera e a altura do tubo, porém, para todos os corpos de prova usados nesse experimento, a razão é bem menor que 0,01. Dessa forma, a correção para tubos finitos é desprezada pois há um impacto menor que o das incertezas experimentais, portanto, pode ser ignorada.

objetivo do experimento?

### 3 Metodologia experimental

A partir de um software disponibilizado para os alunos de Física experimental A da Poli, as medidas foram realizadas, nesse software há um arranjo experimental de:

- Um tubo com óleo dentro.
- Um micrômetro, uma trena e um paquímetro, utilizados para medir os tamanhos das peças envolvidas. O micrômetro apresenta incerteza de 0.005cm
- Oito esferas de mesmo material, com densidades iguais e tamanhos distintos, que terão seus diâmetros medidos pelo micrômetro.
- Um cronômetro para medir o tempo de queda de cada esfera no óleo, que tem incerteza de 0.01s.
- Um densímetro para medir a densidade do óleo, que tem incerteza de 0.001g/cm<sup>3</sup>.
- Um termômetro para medir a temperatura ao realizar o experimento, com incerteza de 0.1°C.

Como supracitado, o experimento é dado ao soltar esferas com tamanhos diferentes no óleo, no software disponibilizado, há diferentes conjuntos, onde os experimentos foram realizados com temperaturas diferentes, sendo assim, será necessário realizar uma correção do valor da temperatura, esse fator de correção será discutido mais adiante. Porém, o diâmetro ( $d_t$ ) e a altura ( $h_t$ ) do tubo, a densidade do óleo ( $\rho_m$ ) e das esferas ( $\rho_c$ ) têm o mesmo valor para conjuntos distintos e estão listados abaixo:

Tabela 1: Valores do arranjo experimental

$d_t$ (mm)	$50,32 \pm 0,07$
$h_t$ (cm)	$65,0 \pm 0,2$
$\rho_m$ (g/cm <sup>3</sup> )	$0,883 \pm 0,001$
$\rho_c$ (g/cm <sup>3</sup> )	$7,850 \pm 0,001$

avaliados ou disponibilizados?

g?

Os conjuntos utilizados foram: Viscosidade 0 & Viscosidade 7, nesses conjuntos, os experimentos foram realizadas às temperaturas:

Tabela 2: Temperatura dos conjuntos

	Temperatura(°C)
Viscosidade 0	$27,8 \pm 0,1$
Viscosidade 7	$26,6 \pm 0,1$

A partir disso, de cada conjunto serão coletadas quatro medições de diâmetro de cada uma das oito esferas, feitas a partir do micrômetro, assim, a partir das medições realizadas, será feita a média entre os valores coletados:

grupo

$$x_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (18)$$

A incerteza da média pode ser encontrada a partir do desvio padrão, essa é a incerteza estatística, que será composta com a incerteza instrumental do micrômetro. Sendo assim, a incerteza estatística é:

$$\sigma_{x_{medio}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{medio})^2}{n(n-1)}} \quad (19)$$

E a incerteza total pode ser encontrada por meio da composição entre a incerteza estatística e a instrumental ( $\sigma_{inst}$ ):

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{x_{medio}}^2 + \sigma_{inst}^2} \quad (20)$$

Além disso, outras relações vitais para o cálculo das incertezas estão apresentadas abaixo. Para calcular a incerteza de dada fórmula, é possível utilizar dois métodos distintos:

1. Seja a fórmula na qual queremos encontrar a incerteza em função de seus componentes uma função do tipo  $f(x, y, z)$ , com quantas variáveis forem necessárias, é possível encontrar a incerteza por:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \sigma_z\right)^2} \quad (21)$$

2. Para expressões em que as variáveis são multiplicadas entre si, e apresentam expo-

incertezas e médias deveriam estar no item análise de dados..

entes constantes, do tipo:

$$f = k \cdot \frac{a^x \cdot b^y}{c^z}$$

É possível encontrar a incerteza, de forma a utilizar as incertezas relativas de cada variável, da forma:

$$\sigma_f = f \cdot \sqrt{\left(x \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(y \frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(z \frac{\sigma_c}{c}\right)^2} \quad (22)$$

Após encontrar os diâmetros médios para **cada uma das** oito esferas, serão cronometrados os tempos de queda de cada esfera para **cada conjunto**. Sendo assim, coleta-se cinco tempos de queda para cada esfera de cada conjunto, a partir dos tempos de queda, o tempo de queda médio será encontrado por meio da equação 18, e a incerteza da média, a incerteza estatística, é encontrada por meio da fórmula 19. Como os dados foram coletados com o cronômetro, propaga-se a incerteza instrumental, com a incerteza estatística, por meio da relação 20. Com isso, é obtido o valor do tempo médio de queda para cada esfera de cada conjunto, como as esferas dos conjuntos são iguais, será possível comparar a influência da temperatura na viscosidade por meio dos tempos médios encontrados.

Assim, é possível encontrar o valor da velocidade por meio da altura do tubo e do tempo médio:

$$v = \frac{h_t}{t_{med}} \quad (23)$$

E a incerteza da fórmula acima, foi calculada por meio da equação 22:

$$\sigma_v = v \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{h_t}}{h_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t_{med}}}{t_{med}}\right)^2} \quad (24)$$

Para facilitar o processo de encontrar a incerteza da viscosidade, calcula-se o valor de  $r^2$ , que tem sua incerteza, por 21, em função da incerteza final do diâmetro  $\sigma_d$  igual a:

$$\sigma_{r^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\sigma_d\right)^2} = \sigma_d \frac{d}{2} \quad (25)$$

De maneira análoga, é calculada a diferença entre as densidades, que é vista na equação da viscosidade (14), e na da massa aparente (5). E a incerteza da diferença entre as densidades ( $\sigma_{d\rho}$ ), pode ser calculada por meio da equação 21:

$$\sigma_{d\rho} = \sqrt{\sigma_{\rho_m}^2 + \sigma_{\rho_c}^2} \quad (26)$$

A partir disso, é possível calcular a incerteza de  $\eta$ , por meio da incerteza relativa dos componentes da fórmula, sendo assim, pela fórmula 22:

$$\sigma_{\eta} = \eta \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{d\rho}}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{r^2}}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2} \quad (27)$$

Assim, encontra-se o valor da viscosidade, pela fórmula 14, bem como sua incerteza. Após isso, são realizadas médias, com a fórmula 18, entre os valores de diâmetro e tempo obtidos para cada conjunto. Então, com as grandezas achadas a partir das médias entre os conjuntos, é possível encontrar um valor para uma viscosidade média entre os dois conjuntos analisados. E a incerteza da viscosidade média é calculada pela fórmula 27, mas as incertezas do tempo médio e do diâmetro médio serão diferentes por conta de utilizar diferentes valores no cálculo da média.

era para supor que vc  
um grupo de medidas  
e não média entre os  
dois...

Então, serão calculados os fatores de correção, pela fórmula 16, e com isso as velocidades são corrigidas, pela relação 17, tanto para os dados de cada conjunto, quanto para os dados que foram juntados por meio da média. Como o fator de correção não apresenta incerteza, a incerteza da viscosidade com a velocidade corrigida não varia muito, só varia devido à mudança do valor da velocidade, ~~que causa uma mudança na respectiva incerteza~~ relativa. Assim, a partir do fator de Ladenburg, pode-se calcular um valor da viscosidade que leva em conta a velocidade limite, a velocidade máxima que a esfera chegaria caso o tubo fosse infinitamente grande, sendo assim, é feita uma correção aos valores encontrados para a velocidade experimental, para que ela se aproxime da velocidade teórica presente na fórmula de Stokes.

Além disso, como supracitado, é necessário, também utilizar um fator de correção para a temperatura, já que cada um dos conjuntos apresenta uma temperatura (vide tabela 2), esse fator de correção é obtido por meio do valor da viscosidade para a temperatura de referência. Para esse caso, a temperatura de referência é de 25°C, e o fator de correção da temperatura pode ser calculado por:

$$C_t = \frac{\eta_{t_{ref}}}{\eta_{t_{medida}}} \quad (28)$$

velocidade limite  
dividido por Ct

O valor de  $C_t$  encontrado, será multiplicado pela velocidade limite, encontrada a partir da velocidade encontrada experimentalmente e pelo fator de correção de Ladenburg, como fora mostrado acima. Dessa forma, será encontrado outro valor para a viscosidade, agora com o fator de correção da temperatura e do recipiente, sendo assim, espera-se

que a viscosidade, nesse estágio, seja igual para os dois conjuntos, pois a influência da temperatura terá sido corrigida.

A partir da fórmula 14, pode-se ajustar uma reta ao utilizar um eixo do gráfico como  $r^2$  e outro com a velocidade, assim essa será um reta do tipo  $y = ax$ , onde  $a$  será o coeficiente angular e, com isso e com os valores das constantes, pode-se encontrar o valor da viscosidade. A incerteza, calculada a partir do gráfico, utilizará o coeficiente angular da reta máxima e o da reta mínima, dessa forma:

$$\sigma_a = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} \quad (29)$$

Além disso, para analisar graficamente, também será utilizado o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), que é uma técnica de otimização que ajuda a encontrar o melhor ajuste gráfico para os dados levados em consideração, realizado ao tentar minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados<sup>6</sup>.

Um método vital para testar compatibilidade entre dois valores que apresentam certo erro, é o do teste Z, que mostra a que nível os dados condizem entre si. Esse fator pode ser calculado por:

$$z = \frac{|x - y|}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$$

Para finalizar esta seção, é introduzida uma maneira de realizar a média ponderada entre certos valores obtidos, e os pesos utilizados na média ponderada, são as incertezas das medidas. Esse é um recurso valioso utilizado para fazer uma análise mais completa. Dessa forma, sendo  $p_i$ , o peso estatístico:

$$p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (30)$$

E, com isso, a incerteza da média ponderada é calculada por:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \quad (31)$$

---

<sup>6</sup>cf. Universidade de Berkeley, Econometrics Laboratory Software Archive. Disponível em: <https://eml.berkeley.edu/sst/regression.html>

quais hipóteses foram assumidas para os cuidados no experimento?

como era o arranjo?

## 4 Resultados e análise de dados obtidos

Para principiar a análise dos dados é necessário apresentá-los antes, sendo assim, os dados obtidos para o diâmetro e o tempo de queda, bem como grandezas necessárias ao cálculo da viscosidade e o valor da viscosidade em si, de cada conjunto, estão mostrados a seguir:

Tabela 3: Dados de diâmetro e tempo de queda para o conjunto 0

Viscosidade 0								
	esfera 1	esfera 2	esfera 3	esfera 4	esfera 5	esfera 6	esfera 7	esfera 8
diâmetro (cm)								
d1	0,1512	0,1971	0,2481	0,3172	0,3951	0,4762	0,5510	0,6341
d2	0,1502	0,1979	0,2501	0,3160	0,3962	0,4758	0,5489	0,6330
d3	0,1502	0,1989	0,2489	0,3171	0,3960	0,4752	0,5509	0,6315
d4	0,1491	0,2000	0,2491	0,3183	0,3961	0,4771	0,5500	0,6324
Diam médio	0,150	0,198	0,249	0,317	0,396	0,476	0,550	0,633
Desvio padrão	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
Incerteza final	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Tempo de queda (s)								
t1	18,55	11,55	7,92	5,05	3,42	2,57	2,17	1,71
t2	18,82	11,61	7,9	4,81	3,47	2,52	2,23	1,78
t3	18,77	11,52	7,88	4,99	3,5	2,53	2,28	1,81
t4	18,69	11,71	7,9	4,77	3,45	2,61	2,18	1,79
t5	18,71	11,79	7,91	4,88	3,44	2,6	2,24	1,82
Tempo médio	18,71	11,64	7,90	4,90	3,46	2,57	2,22	1,78
Desvio padrão	0,1	0,11	0,01	0,12	0,03	0,04	0,05	0,04
Incerteza final	0,05	0,05	0,01	0,05	0,02	0,02	0,02	0,02

dava para escrever com maior precisão...

Tabela 4: Viscosidade sem correção para o conjunto 0

raio <sup>2</sup> (cm)	0,0056	0,01	0,0155	0,0251	0,039	0,057	0,076	0,1
inc (cm)	0,0008	0,001	0,0012	0,0016	0,002	0,002	0,003	0,003
Veloc (cm/s)	3,47	5,59	8,23	13,27	18,8	25,3	29,3	36,5
inc (cm/s)	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1	0,1	0,2	0,2
eta (cgs)	2,5	2,7	2,9	2,9	3,2	3,4	3,9	4,2
inc (cgs)	0,7	0,5	0,5	0,4	0,3	0,3	0,3	0,3

X

X

Tabela 5: Dados de diâmetro e tempo de queda para o conjunto 7

Viscosidade 7								
	esfera 1	esfera 2	esfera 3	esfera 4	esfera 5	esfera 6	esfera 7	esfera 8
diâmetro (cm)								
d1	0,1509	0,1979	0,2489	0,3179	0,3961	0,4758	0,5492	0,6348
d2	0,1500	0,1990	0,2375	0,3169	0,3959	0,4761	0,5509	0,6361
d3	0,1510	0,2010	0,2491	0,3159	0,3948	0,4773	0,5489	0,6351
d4	0,1515	0,2000	0,2500	0,3189	0,3953	0,4749	0,5500	0,6371
Diam médio	0,151	0,199	0,246	0,317	0,396	0,476	0,550	0,636
Desvio padrão	0,001	0,001	0,006	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
Incerteza final	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Tempo de queda (s)								
t1	18,95	11,27	7,88	5,06	3,54	2,71	2,49	1,78
t2	18,72	11,28	7,82	4,87	3,59	2,59	2,51	1,8
t3	18,76	11,41	7,86	5,02	3,64	2,63	2,38	1,85
t4	19,03	11,4	7,77	4,99	3,58	2,55	2,46	1,85
t5	19,07	11,48	7,75	5,01	3,62	2,7	2,35	2,04
Tempo médio	18,91	11,37	7,82	4,99	3,59	2,64	2,44	1,86
Desvio padrão	0,16	0,09	0,06	0,07	0,04	0,07	0,07	0,1
Incerteza final	0,07	0,04	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03	0,05

Tabela 6: Viscosidade sem correção para o conjunto 7

raio <sup>2</sup> (cm)	0,0057	0,01	0,015	0,025	0,039	0,057	0,076	0,101
inc (cm)	0,0008	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003
Veloc (cm/s)	3,44	5,72	8,32	13,03	18,09	24,7	26,7	34,9
inc (cm/s)	0,01	0,02	0,03	0,05	0,08	0,1	0,1	0,2
eta (cgs)	2,5	2,6	2,8	2,9	3,3	3,5	4,3	4,4
inc (cgs)	0,7	0,5	0,5	0,4	0,3	0,3	0,3	0,3

É possível notar que a viscosidade do óleo ( $\eta$ ), está variando para as diferentes esferas, porém isso não era o esperado, já que para as oito esferas de cada conjunto. O experimento é realizado a uma temperatura fixa, e como as esferas são soltas no mesmo óleo, e a viscosidade é uma propriedade intrínseca da substância componente do óleo, o esperado era que fossem obtidos valores próximos de viscosidade, aproximadamente constante, em cada conjunto.

Para realizar uma análise mais profunda, é realizada uma tabela levando em consi-

deração uma média entre os valores obtidos, como descrito no capítulo anterior.

Tabela 7: Viscosidade sem correção para o grupo

	Grupo							
diam médio	0,151	0,199	0,248	0,317	0,396	0,476	0,55	0,634
Desvio padrão	0,001	0,001	0,004	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002
Incerteza final	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
Tempo médio	18,8	11,5	7,86	4,95	3,53	2,60	2,33	1,82
Desvio padrão	0,2	0,2	0,06	0,1	0,08	0,06	0,13	0,09
Incerteza final	0,1	0,1	0,02	0,03	0,03	0,02	0,04	0,03
raio <sup>2</sup> (cm)	0,00566	0,00990	0,01534	0,02517	0,0391	0,0567	0,0756	0,1006
inc (cm)	0,00004	0,00005	0,00006	0,00008	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
Veloc (cm/s)	3,46	5,65	8,27	13,1	18,4	25,0	27,9	35,0
inc (cm/s)	0,02	0,03	0,04	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3
eta (cgs)	2,48	2,65	2,81	2,9	3,22	3,44	4,11	4,27
inc (cgs)	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04

tão diferente do cálculo de cada aluno....

É possível perceber que a incerteza final dos dados da tabela do grupo são menores que os da tabela de cada conjunto, isso ocorre pois ao levarmos mais dados em conta a incerteza estatística é reduzida pois é inversamente proporcional ao número de dados utilizados para a análise.

Assim, com a fórmula 16, pode-se calcular os fatores de correção para cada esfera, bem como a velocidade limite, pela relação 17, e, assim, encontrar o valor da viscosidade do óleo mais próximo do real, já que a correção de Ladenburg é necessária para adaptarmos a velocidade obtida experimentalmente ao valor da velocidade limite.

Tabela 8: Viscosidade com correção de Ladenburg para o conjunto 0

	Viscosidade 0							
Fator C	0,077	0,104	0,133	0,174	0,224	0,279	0,331	0,393
Vel cor (cm/s)	3,74	6,17	9,32	15,58	23,0	32,4	39,0	50,8
inc (cm/s)	0,01	0,02	0,03	0,06	0,1	0,2	0,2	0,3
eta cor (cgs)	2,28	2,42	2,52	2,45	2,58	2,65	2,94	2,99
inc (cgs)	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

inconsistente com tabela anterior....



Tabela 9: Viscosidade com correção de Ladenburg para o conjunto 7

	Viscosidade 7							
Fator C	0,077	0,104	0,131	0,174	0,224	0,279	0,331	0,395
Vel cor (cm/s)	3,70	6,31	9,41	15,30	22,1	31,5	38,8	48,7
inc (cm/s)	0,01	0,02	0,03	0,06	0,1	0,2	0,2	0,3
eta cor (cgs)	2,33	2,39	2,44	2,49	2,68	2,72	2,95	3,15
inc (cgs)	0,04	0,04	0,11	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02

É possível reparar que o valor da viscosidade está variando menos em relação às tabelas 4 e 6, porém, ao realizar o teste Z entre o valor da viscosidade da primeira esfera, e o valor da viscosidade de oitava esfera, obtém-se um valor muito superior a  $3\sigma$ , sendo assim, é possível dizer que os resultados da viscosidade do óleo da primeira esfera não é compatível com o resultado da viscosidade do óleo da oitava esfera. E, como supracitado, para um mesmo conjunto de dados, era esperado que os dados obtidos para a viscosidade fossem constantes mesmo quando o tempo médio for calculado por quedas de diferentes esferas. E, apesar da diferença de temperatura, se pegarmos os dados dos diferentes conjuntos, esfera a esfera, eles são compatíveis um a um. Assim, a fim de aprofundar a análise, é realizada uma média entre os valores obtidos para cada conjunto, para chegar numa tabela do grupo sobre a viscosidade com o fator de correção:

valor médio...

discussão

Tabela 10: Viscosidade com correção de Ladenburg para o grupo

	Grupo							
Fator C	0,077	0,104	0,133	0,174	0,224	0,279	0,331	0,393
Vel cor (cm/s)	3,72	6,24	9,37	15,4	22,6	32,0	38,9	50
inc (cm/s)	0,03	0,08	0,06	0,2	0,3	0,5	0,5	1
eta cor (cgs)	2,31	2,40	2,48	2,47	2,63	2,69	2,95	3,07
inc (cgs)	0,04	0,04	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,08

E, como os dados de cada conjunto, já não tinham suas viscosidades de forma constante e sem variação para as diferentes esferas, para os dados do grupo como um todo, não é diferente. Sendo assim, para uma melhor visualização, elabora-se os gráficos com eixos de  $r^2$  e velocidade:

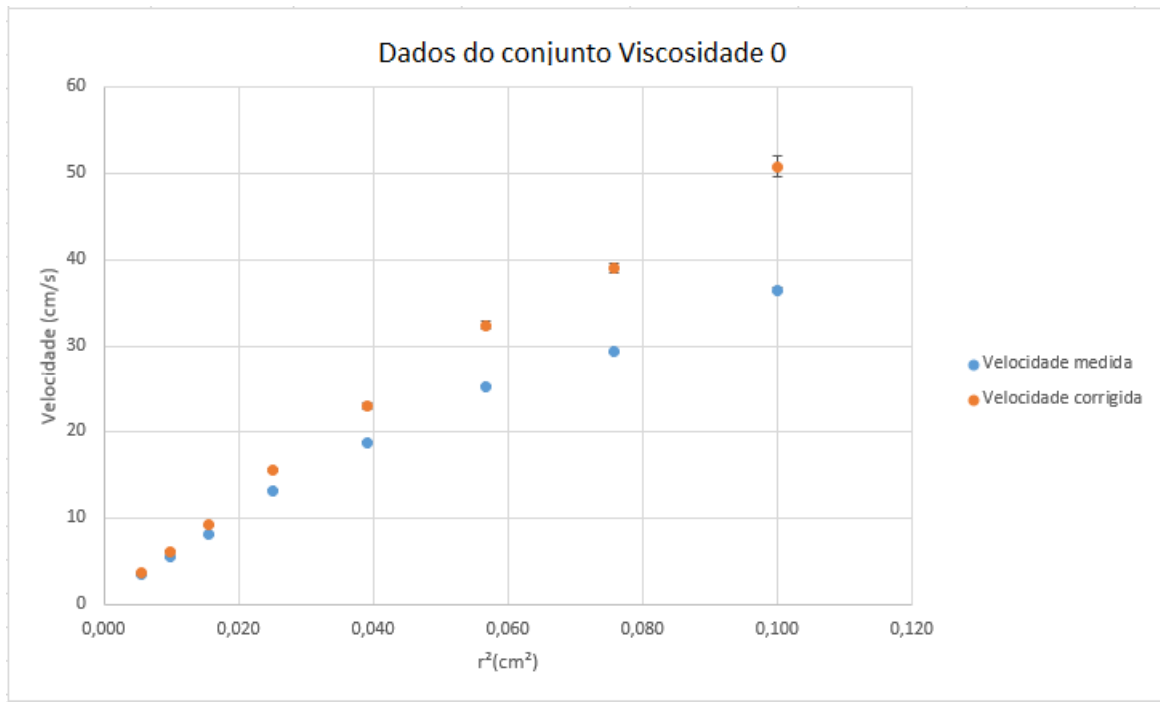


Figura 1: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  para o conjunto 0

Era para fazer um gráfico dos alunos e grupo sem correção e outro grafico após correções só com os dados dos alunos...

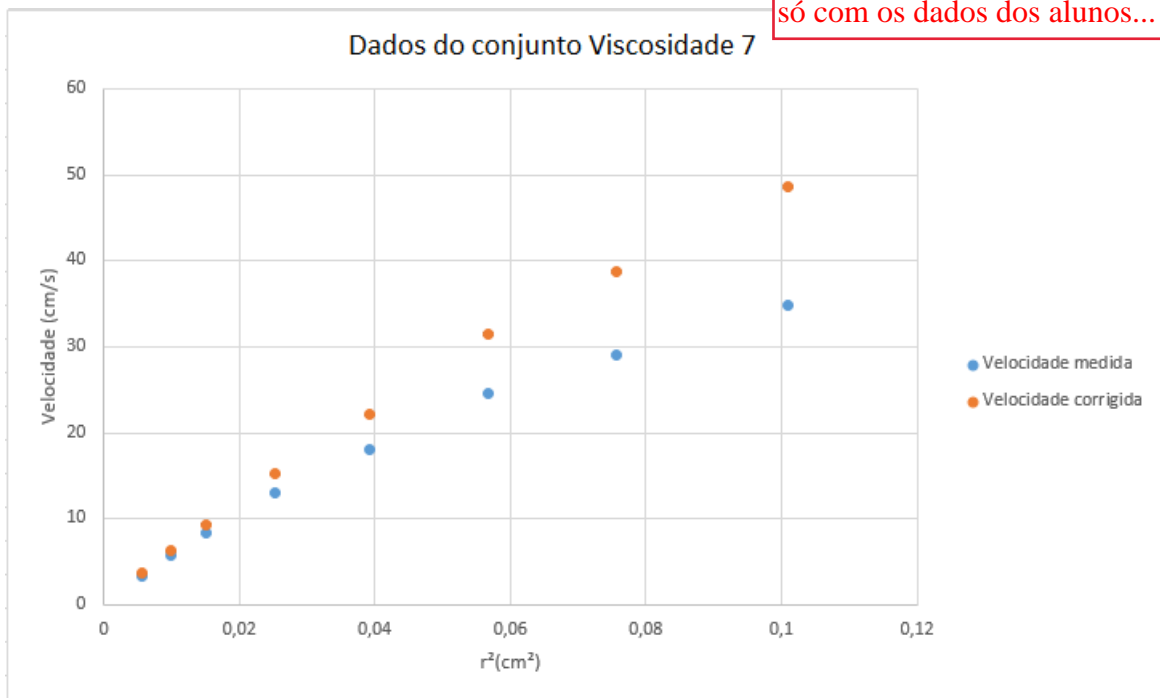


Figura 2: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  para o conjunto 7

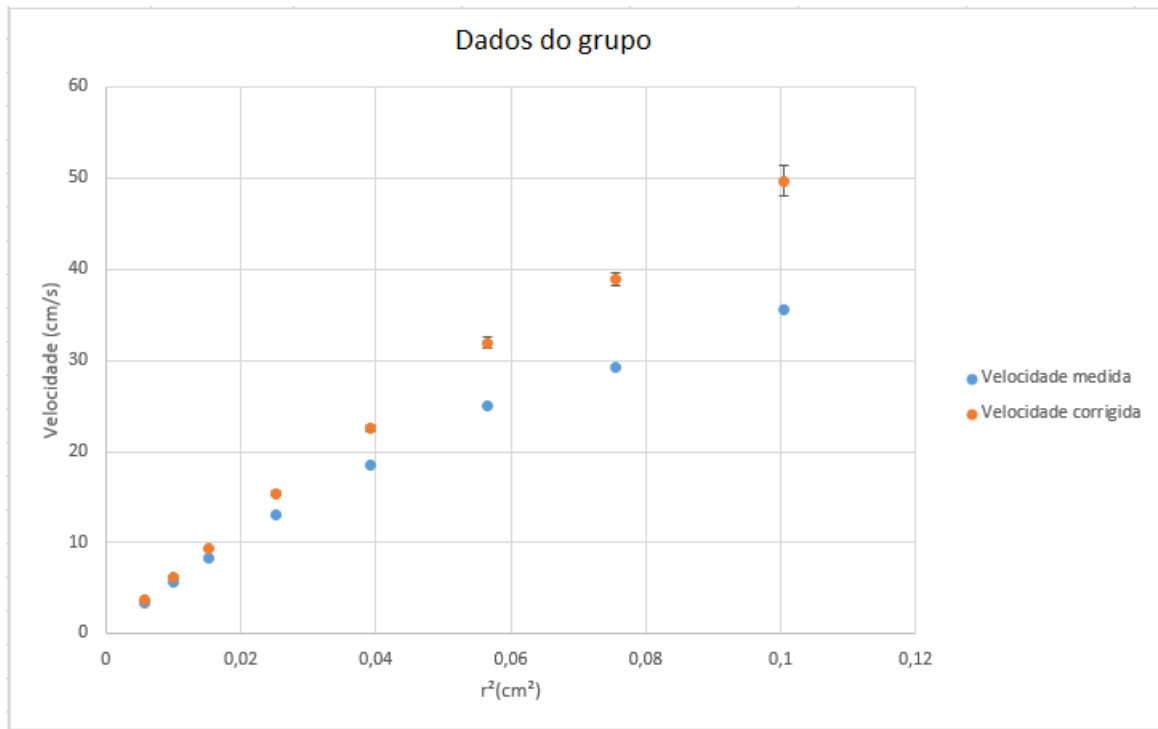
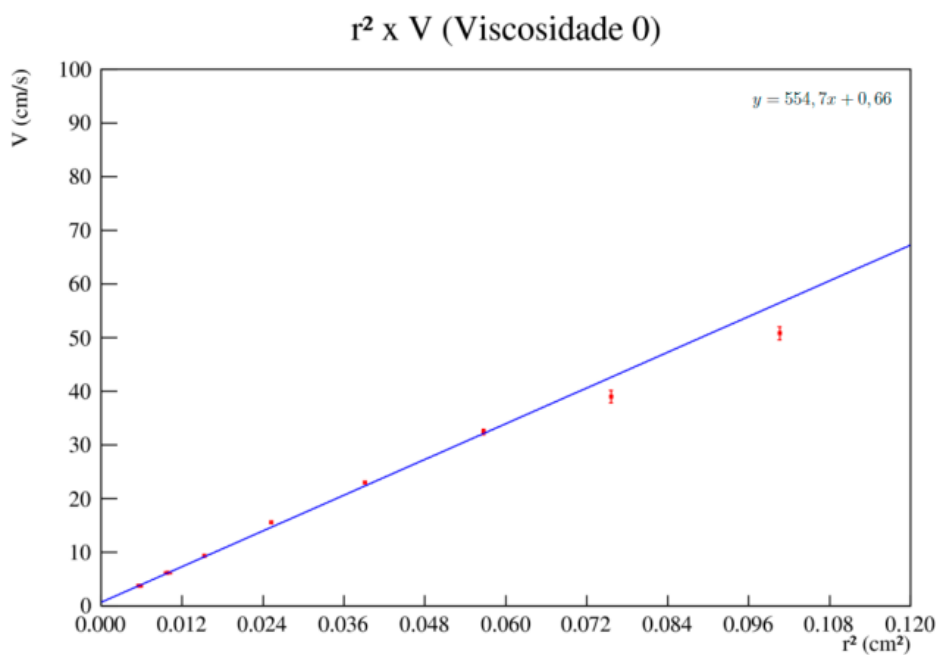


Figura 3: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  para o grupo

É possível perceber que, para as esferinhas menores, o fator de correção não causa um impacto tão significativo, já que os primeiros pontos são praticamente coincidentes para ambos os valores da velocidade, a com o fator de correção de Ladenburg, e a encontrada experimentalmente. Agora, por meio do MMQ supracitado, são realizados ajustes de reta com os valores corrigidos da velocidade:



incertezas no mmq?

Figura 4: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  corrigida, por MMQ, para o conjunto 0

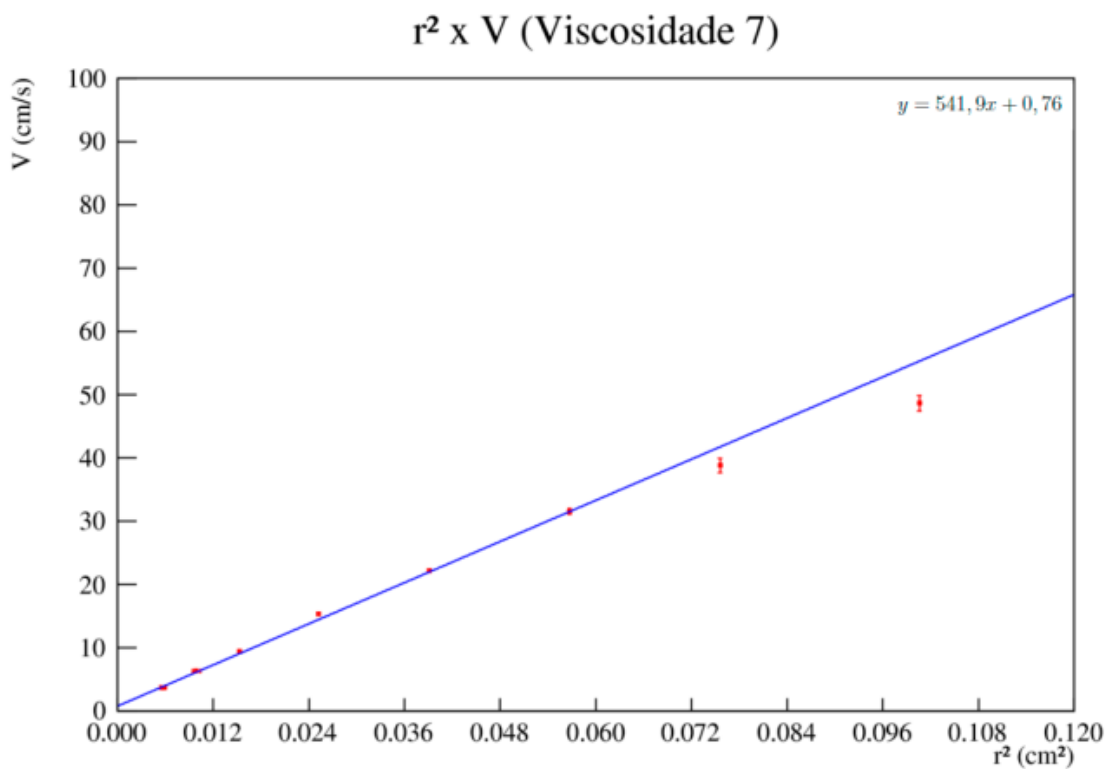


Figura 5: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  corrigida, por MMQ, para o conjunto 7

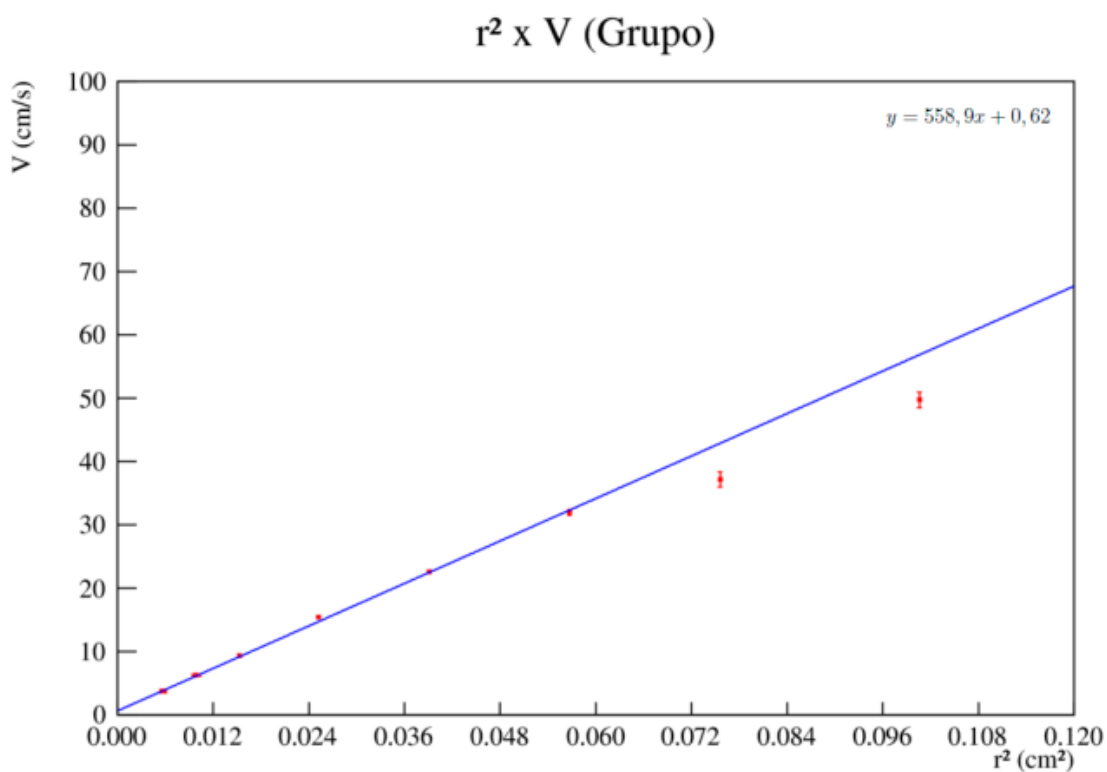


Figura 6: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  corrigida, por MMQ, para o grupo

A partir do valor do coeficiente angular, o valor da viscosidade é facilmente encontrado pela fórmula 14, sabendo que  $v_\infty$  e  $r^2$  são os eixos do gráfico, e os outros valores são

constantes. Assim:

Tabela 11: Viscosidade a partir do coeficiente angular do MMQ

MMQ	eta (cgs)	inc (cgs)
Viscosidade 0	2,79	0,01
Viscosidade 7	2,91	0,01
Grupo	2,83	0,03

Esses são uma espécie de valor médio da viscosidade, encontrado a partir do ajuste de reta entre os dados das velocidades e de  $r^2$ . Outra maneira de obter esse valor médio da viscosidade, é fazer um gráfico a mão para encontrar o coeficiente angular médio, sendo assim, serão desprezadas as retas máximas e mínimas e a respectiva incerteza, os dados obtidos para a viscosidade nesse passo, o são apenas para mostrar uma alternativa ao ajuste de reta do MMQ:

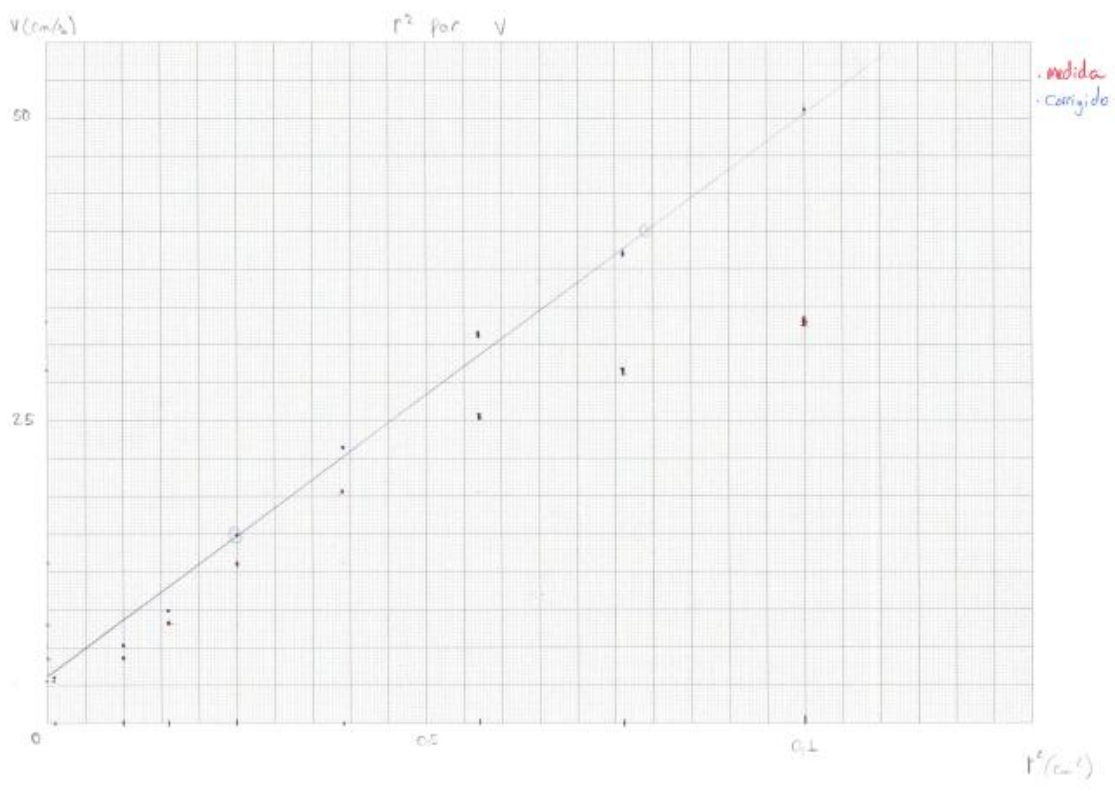


Figura 7: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  feito a mão para o conjunto 0

Sendo a Equação da reta :  

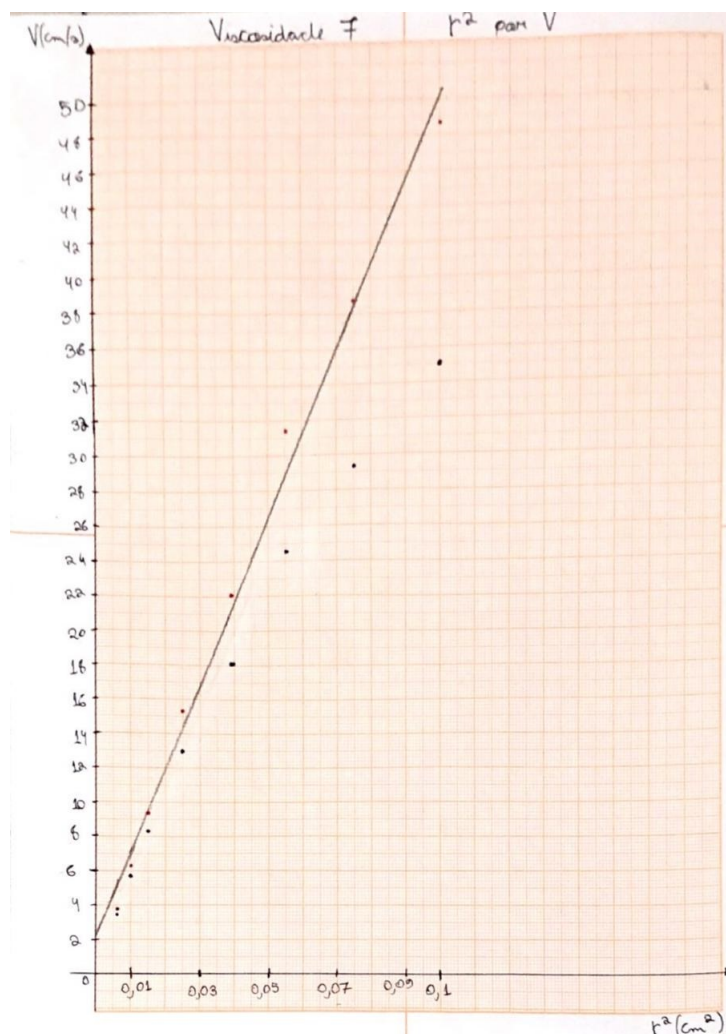
$$V_m = \frac{\sum y}{y} \frac{(P_c - P_{c0})}{\eta} r^2 \rightarrow y = ax + b \rightarrow a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{(70,675 - 15,625)}{(0,79 - 0,25)} \rightarrow$$
  

$$a = 462,96.$$
  

$$\therefore V_m = a \cdot r^2 \rightarrow a = \frac{\sum y}{y} \frac{(P_c - P_{c0})}{\eta}$$
  

$$\eta = \frac{\sum y}{y} \frac{(P_c - P_{c0})}{a} \rightarrow \eta = 3,24 \text{ poise}$$

Figura 8: Legenda do gráfico feito a mão do conjunto 0



retângulo que define retas máximas e mínimas

Figura 9: Gráfico  $r^2$  versus  $v$  feito a mão para o conjunto 7

• Velocidade corrigida  
 • Velocidade obtida experimentalmente

$$y = ax + b \Rightarrow a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(26 - 12)}{(0,05 - 0,03)} = 466,67$$

$$V_{lim} = a t^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \frac{(\rho_c - \rho_m) \cdot g}{\eta}$$

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{(\rho_c - \rho_m) \cdot g}{a} = 3,24 \rho = 3,24 \frac{g}{cm \cdot s}$$

Figura 10: Legenda do gráfico feito a mão do conjunto 7

Para as equações de reta obtidas, tanto para os gráficos obtidos a partir do MMQ quanto para os feitos a mão, apresentam um valor de coeficiente linear, o que difere da fórmula 14, que não apresenta termos somando, porém, os valores do coeficiente linear, quando comparados aos do coeficiente angular, são bem menores, sendo assim, são parte de um desvio, parte da incerteza dos métodos empregados. Além disso, ao calcular o valor médio entre as viscosidades das oito esferas, por meio da fórmula 30, é possível comparar o valor médio das viscosidades das esferas e o valor médio encontrado por meio do ajuste de reta do MMQ, utilizando as respectivas incertezas para realizar um teste Z e testar a compatibilidade entre os dados:

Tabela 12: Comparação entre a viscosidade média e a viscosidade obtida graficamente

Comparação entre eta médio e mmq			
	Médio	MMQ	Teste Z
Eta médio (Viscosidade 0)	2,65 ± 0,01	2,79 ± 0,01	9,9
Eta médio (Viscosidade 7)	2,74 ± 0,01	2,91 ± 0,01	12,0
Eta médio (Grupo)	2,69 ± 0,01	2,83 ± 0,03	-

média ponderada?

Os valores da viscosidade média calculados por métodos diferentes não concordam entre si, isso mostra que, de certa forma, o ajuste de uma reta sobre o gráfico criado é incerto, pois o valor da média ponderada em função dos pesos dá uma maior noção do valor da viscosidade média. Lembrando que, esse método foi empregado pois o valor da viscosidade está variando para cada esfera diferente. Sendo assim, como a reta média não coincide com a média ponderada do valor das viscosidades, é possível indagar que a fórmula 14 não traça uma reta, e como na fórmula só existem constantes e os valores de  $v$  e  $r^2$ , pode-se dizer que a taxa em que  $r^2$  varia não é igual à taxa em que  $v$  varia. E

como essas grandezas são diretamente proporcionais, se elas não estão variando da mesma forma, pode significar ou que a Lei de Stokes não pode ser aplicada a recipientes finitos, ou que o fator de correção de Ladenburg não está corrigindo devidamente os dados. Pois o valor da viscosidade, para um óleo a uma temperatura constante, deveria se manter constante.

Pela tabela 2 é possível notar que os diferentes experimentos (diferentes conjuntos) foram realizados a uma diferença de temperatura de 1,2°C, o que não se trata de uma diferença significativa, porém, para efeito de uma mais profunda análise, ambos valores da viscosidade serão normalizados para uma temperatura, tomada como referência, de 25°C. Assim, pela fórmula 28, e pelo valor de referência da viscosidade do óleo, quando a 25°C, que é de, aproximadamente,  $\eta_{t_{ref}} = 2.85 \frac{g}{cm \cdot s}$ .

Tabela 13: Viscosidade com fator de correção de temperatura no conjunto 0

	Viscosidade 0							
Fator correção	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19
eta cor 2 (cgs)	2,71	2,87	2,99	2,9	3,06	3,15	3,49	3,54
inc (cgs)	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

que valores usou para calcular Ct?

Tabela 14: Viscosidade com fator de correção de temperatura no conjunto 7

	Viscosidade 7							
Fator correção	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
eta cor 2 (cgs)	2,55	2,62	2,7	2,73	2,93	2,98	3,23	3,45
inc (cgs)	0,02	0,02	0,06	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02

Tabela 15: Viscosidade com fator de correção de temperatura para o grupo

	Grupo							
eta cor 2 (cgs)	2,62	2,74	2,97	2,82	2,99	3,06	3,35	3,49
inc (cgs)	0,03	0,03	0,06	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03

E a partir desses valores obtidos, também é possível comparar a média ponderada realizada entre os dados corrigidos com o fator de correção de Ladenburg e da temperatura, e a viscosidade média encontrada por MMQ normalizada para 25°C:

Tabela 16: Viscosidade média por MMQ e por média ponderada normalizadas para 25°C

Comparação entre eta médio e mmq (25°C)			
	Médio	MMQ	Teste Z
Eta médio (Viscosidade 0)	3,15 ± 0,01	3,31 ± 0,01	9,9
Eta médio (Viscosidade 7)	3,00 ± 0,01	3,19 ± 0,01	12,0



resíduo reduzido?

É possível notar que o conjunto viscosidade 7 chegou mais próximo ao valor de referência para a viscosidade a 25°C, mas o resultado de nenhum dos dois conjuntos é plenamente satisfatório. Ao analisar por meio de fórmulas e grandezas físicas, como apresentado na introdução, o resultado esperado era que, não importando o tamanho das esferas, a viscosidade do óleo fosse um valor só. O procedimento de encontrar valores médios foi uma maneira utilizada para estimar um possível valor mais próximo ao real, baseado em todos os dados coletados. Porém, não se mostrou efetivo também. Isso ocorre, pois uma média, para se aproximar do valor real precisa ter desvios superiores e inferiores ao valor que se procura, e nesse caso, só foram coletados dados de desvios superiores, como pode-se observar nos gráficos 1, 2 & 3, onde há um valor de velocidade corrigida cada vez mais disperso da velocidade encontrada experimentalmente.

## 5 ~~Discussão final e conclusões~~

discussão foi feita no item anterior.

Como supracitado, os resultados finais obtidos não foram satisfatórios, no ponto de vista de corroborar com os conceitos físicos desenvolvidos na introdução do relatório. Para concluir, sempre que a temperatura de certo fluido incompressível é constante, espera-se que sua viscosidade permaneça constante. Então, como nesse caso isso não foi o observado? -Não é possível tecer críticas ao arranjo experimental, já que o experimento foi computadorizado, assim, a troca de calor que ocorreria entre uma esfera real e um fluido, não ocorreu. Porém, ao analisar a tabela inicial, antes de aplicarmos o fator de Ladenburg, vê-se que os valores obtidos para a viscosidade **está variando**, e os dados não estão compatíveis a um valor constante. Sendo assim, como é visível na fórmula 16, o fator de correção é totalmente dependente da razão entre o raio do tubo e o raio da esfera, assim, ele é necessário para tornar os valores das viscosidades, que aparece diferente para cada esfera, iguais para todas as esferas. Portanto, pode-se dizer que o fator de correção de Ladenburg, apesar de alterar significativamente o valor da velocidade e de diminuir a distância entre os valores da viscosidade, não corrige propriamente, não é uma correção adequada para transformar a velocidade obtida experimentalmente numa velocidade mais próxima à velocidade limite que aparece na fórmula 14.

os programas foram simulados usando dados reais...

## 6 Referências bibliográficas

NUSSENZVEIG, H. M. , Curso de Física básica-Vol. 2.

Vuolo J. H. - Fundamentos da teoria de erros, Notas de estudo de Física.