

Síntese 4

4,9

# Forças Centrais

Gabriel Xavier Luz nºUSP 11223931  
Giovani Melendes Salvador nºUSP 11223952  
Universidade de São Paulo



## **Conteúdo**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Descrição Experimental</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Dados Experimentais</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Discussão</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>13</b>

## 1 Introdução

Neste experimento iremos olhar para Netuno em movimento e sua órbita em torno do sol ~~olhando~~ do ponto de vista das leis de conservação, com o objetivo de analisar se existe uma conservação de energia e do momento angular durante sua revolução completa.

Se pensarmos em um diagrama de corpo livre de Netuno em torno do **sol** (adotando-o como origem) veremos que a única força que age sobre ele é a força gravitacional ~~entre eles~~ que depende das massas dos dois corpos e da distância entre eles. ~~Logo~~ com a ausência de forças externas no sistema conseguimos determinar que o torque é nulo no sistema e seu momento angular se conserva. Além disso iremos analisar a conservação da energia nesse sistema que nessa idealização teríamos unicamente a energia potencial gravitacional entre o planeta e o sol, e a energia cinética devido a velocidade do planeta em torno do Sol.

## 2 Descrição Experimental

Para a coleta dos dados que usaremos no experimento utilizamos o site da NASA: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top>.

As configurações que utilizamos do site foram:

The screenshot shows the NASA JPL Horizons web interface. At the top, there is a navigation bar with links for JPL HOME, EARTH, SOLAR SYSTEM, STARS & GALAXIES, and TECHNOLOGY. Below this is a banner for 'Solar System Dynamics' with a background image of the solar system. A secondary navigation bar includes links for BODIES, ORBITS, EPHEMERIDES, TOOLS, PHYSICAL DATA, DISCOVERY, FAQ, and SITE MAP. The main content area is titled 'HORIZONS Web-Interface' and contains a description of the tool. Below the description, there is a 'Current Settings' section with several configuration options: Ephemeris Type (VECTORS), Target Body (Neptune [899]), Coordinate Origin (Sun [body center] [500@10]), Time Span (Start=1855-06-09, Stop=2019-07-09, Step=2 Y), Table Settings (quantities code=1, output units=KM-S, CSV format=YES), and Display/Output (download/save [plain text file]). There is a 'Generate Ephemeris' button. Below this, there is a 'Special Options' section with three bullet points: 'set default ephemeris settings (preserves only the selected target body and ephemeris type)', 'reset all settings to their defaults (caution: all previously stored/selected settings will be lost)', and 'show "batch-file" data (for use by the E-mail interface)'. At the bottom of the page, there is a footer with links for ABOUT SSD, CREDITS/AWARDS, PRIVACY/COPYRIGHT, GLOSSARY, and LINKS. The footer also includes the NASA logo, the date and time (2020-Jun-20 17:07 UT), and the names of the Site Manager (Ryan S. Park) and Webmaster (Alan B. Chamberlin).

**Figura 1:** Configurações usadas para a coleta de dados.

É importante ressaltar que utilizamos as distâncias em quilômetros ( $km$ ), o tempo em segundos ( $s$ ) e a velocidade em quilômetros por segundo ( $Km/s$ ).

~~Com dos~~ dados da posição do planeta em X, Y e Z durante 1855 e 2019, o período de

qual referencial?

translação de Netuno em torno do Sol é de 164,5 anos, então dividimos os pontos pegos entre 2 e 2 anos (como indicado nas configurações usadas). Optamos por estudar o movimento do planeta em um plano, assim tendo que calcular um novo X e um novo Y ( $X_n$  e  $Y_n$ ) que levam a posição em Z em consideração, para isso utilizamos a seguinte equação:

$$X_n = \frac{\vec{r}X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (1)$$

$$Y_n = \frac{\vec{r}Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (2)$$

Onde  $\vec{r}$  é a distância entre o sol e o planeta que vou encontrada a partir da equação abaixo:

$$\vec{r} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3)$$

Com os novos dados das posições do planeta em mãos, criamos uma tabela que os contemple, ela será introduzida nos dados experimentais. Nessa tabela separamos 14 conjuntos únicos de 5 dados consecutivos, fizemos isso para determinar um vetor do movimento e seu meio.

A partir disso conseguimos calcular a distância percorrida pelo planeta durante esses 5 pontos vendo a diferença entre o primeiro e o último ponto do conjunto, assim conseguimos sua velocidade média, que corresponde a velocidade média do 3º ponto de cada conjunto, e isso foi feito da seguinte forma:

$$\vec{V} = \frac{\vec{r}_5 - \vec{r}_1}{\Delta T} \quad (4)$$

Onde  $\vec{r}_i$  é a distância do sol até o planeta na posição de número  $i$ , e  $\Delta T$  é a variação de tempo em segundos entre as posições de  $i = 5$  e  $1$ .

Visto a falta das massas do planeta e do sol, a constante gravitacional e o raio do planeta, utilizamos a Wikipédia para encontrar essas informações (que também estarão colocadas nos dados experimentais).

Calculamos depois o momento linear do movimento do planeta seguindo a seguinte equação:

$$\vec{P} = M_p \vec{V} \quad (5)$$

Onde  $M_p$  é a massa do planeta e  $\vec{V}$  sua velocidade instantânea. A unidade utilizada foi Quilogramas metro por segundo ( $Kg * m/s$ ). Importante ressaltar que houve uma mudança de unidade da velocidade para se encaixar no sistema internacional.

Com o momento linear podemos calcular o momento angular mais facilmente, utilizamos a equação a seguir:

$$\vec{L} = \vec{r} \vec{P} \text{Sen}(\theta) \quad (6)$$

Sendo  $\vec{r}$  a distância entre o planeta e o sol,  $P$  o momento linear do planeta,  $\theta$  é o ângulo entre o momento linear e a direção adotada para  $\vec{r}$ , que é partindo do sol até o planeta. É importante ressaltar que o Senno de  $\theta$  está na equação pois estamos multiplicando dois vetores, e devemos considerar seus sentidos e direções.

produto vetorial e não escalar...

Com a finalidade de estudar a conservação da energia total do movimento do planeta, calculamos a energia cinética e potencial do movimento do planeta em torno do sol, e isso foi feito da seguinte forma:

$$E_{cinética} = \frac{M_{planeta} \vec{V}^2}{2} \quad (7)$$

$$E_{potencial} = \frac{-GM_{Sol}M_{planeta}}{\vec{r}} \quad (8)$$

Onde  $M$  representa a massa,  $\vec{V}$  a velocidade e  $\vec{r}$  a distância entre o sol e o planeta. Por fim calculamos a energia total do movimento através da equação abaixo:

$$E_{total} = E_{cinética} + E_{potencial} \quad (9)$$

Assim, conseguimos comparar em 17 pontos se a energia se conservou ou não.

### 3 Dados Experimentais

Para introduzir os dados do planeta, criamos uma tabela com sua massa, raio e massa do Sol, junto de suas incertezas.

**Tabela 1:** Tabela referente a massa do Sol e do planeta, o raio do planeta e suas incertezas.

		<b>Incerteza</b>
<b>Massa do Sol (Kg)</b>	1,99E+30	1,00E-02
<b>Massa do Planeta (Kg)</b>	1,02E+26	1,00E-02
<b>Raio médio do planeta (m)</b>	2,46E+04	1,00E+00

Como descrito na descrição experimental, obtivemos as posições do planeta no espaço, e isso será explicitado na tabela abaixo: /e ela todos os 80 dados estarão numa tabela anexada à essa síntese, pois a tabela pode acabar poluindo este relatório por ser muito grande (Tabela das posições X, Y e Z está no anexo 1). anexo 1 não veio...

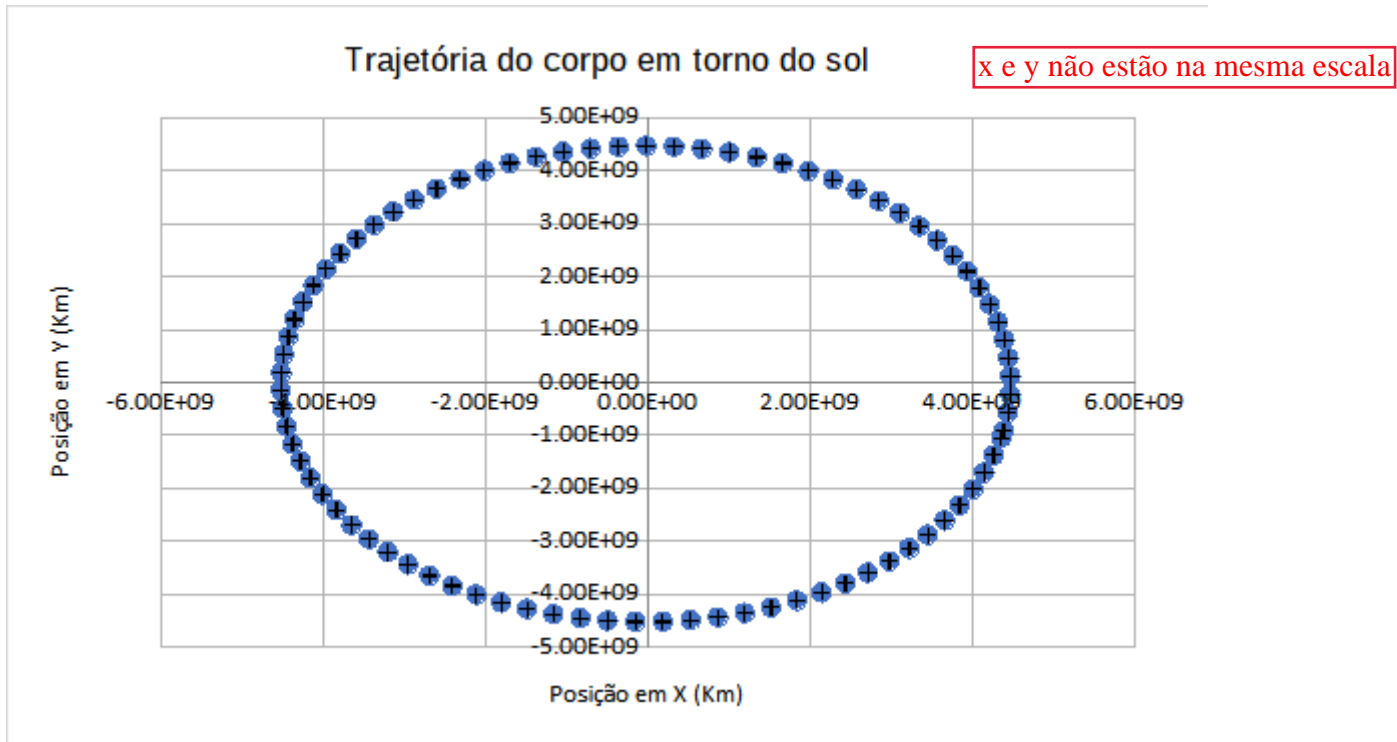
Calculamos então a distância entre o sol e a posição que o planeta se encontrava, chamamos essa distancia de  $\vec{r}$ , que foi medida em quilômetros. Utilizamos a equação 3 para achar o  $\vec{r}$ . Para a sua incerteza utilizamos a equação abaixo:

$$\sigma R = \sqrt{\sigma X^2 + \sigma Y^2 + \sigma Z^2} \quad (10)$$

Em seguida Calculamos novos X e Y para o planeta e desenvolvemos uma imagem que representa a trajetória do planeta com as novas coordenadas. Fizemos isso com a finalidade de tornar o seu movimento bidimensional para que a análise fosse feita de forma mais fácil. Importante mencionar que os novos X e Y levam em conta o Z original que foi atribuído através do  $\vec{r}$ . Utilizamos para seus cálculos as equações 1 e 2, e para ambas as incertezas utilizamos

a equação abaixo, sendo que para o  $\sigma_{Y_{novo}}$  utilizamos o Y e não X.

$$\sigma_{xnovo} = \frac{x_{novo}^+ - x_{novo}^-}{2} \quad (11)$$



**Figura 2:** Trajetória que mostra a posição de Netuno em movimento em torno do Sol .

Onde o valor de  $x_{novo}^+$ , seria obtido a partir do mesmo cálculo da obtenção do valor de  $X_{novo}$ , porém somando as incertezas de cada termo e no outro caso seria subtraindo.

Tendo em vista os 80 pontos que obtivemos, escolhemos arbitrariamente 14 conjuntos de 5 posições consecutivas, isso para conseguir obter 14 distâncias percorridas pelo planeta, utilizamos da variação de  $\vec{r}$  entre os 5 pontos para tal. Obtivemos a incerteza dessa distância de  $\Delta r$  através da seguinte equação:

$$\sigma_{\Delta r} = \sqrt{\sigma_{r_5}^2 + \sigma_{r_1}^2} \quad (12)$$

Dos 14 conjuntos que obtivemos, calculamos suas velocidades médias, através da equação 4, que coincidem com a velocidade instantânea do 3º dado do conjunto. Ou seja, analisaremos a seguir apenas os 3º dados de cada conjunto, tornando eles "representantes" de cada um dos seus respectivos grupos. Abaixo está uma representação da trajetória do planeta em torno do Sol usando apenas os 14 pontos "representantes".



**Figura 3:** Representação da trajetória do planeta em torno do Sol mas apenas os 14 "representantes" sendo colocados.

Será importante analisar também se houve ou não conservação do momento angular, ou seja, se houve perda de momento durante as curvas. Para isso devemos descobrir o momento angular e linear do movimento do planeta, mas como o momento angular depende de um produto vetorial, acharemos o ângulo entre o momento linear e o do vetor  $\vec{r}$ . Tendo em vista que a equação do momento linear é dada pela equação 5, podemos observar que ele tem o mesmo sentido e direção que a velocidade, assim já sabemos a direção e sentido de ambos os vetores.

Esse ângulo entre o momento linear e o  $\vec{r}$ ,  $\theta$ , se dará pela seguinte equação se considerarmos um produto escalar:

$$\vec{r}\vec{V} = rV \cos \theta \quad (13)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{r}\vec{V}}{rV} \quad (14)$$

Agora se abrirmos o produto escalar entre os vetores, e escrevermos o módulo de cada um conseguimos achar o valor do cosseno entre eles da seguinte maneira:

vc devia calcular o ângulo assim para comparar com sua medida...

$$\cos \theta = \frac{XV_x + YV_y}{\sqrt{X^2 + Y^2} \sqrt{(V_x^2 + V_y^2)}} \quad (15)$$

E por fim achamos de maneira simples o valor do ângulo entre eles calculando o  $\cos^{-1}$  do

valor encontrado. A incerteza do valor do cos é dado da mesma maneira que fizemos para o  $X_{\text{Novo}}$  e  $Y_{\text{Novo}}$ , e a incerteza do theta também:

$$\sigma_{\cos\theta} = \frac{\cos\theta^+ - \cos\theta^-}{2} \quad (16)$$

Foi realizado a conversão do ângulo obtido em graus para a futura comparação com o ângulo obtido experimentalmente de maneira simples com a seguinte conta:

$$\alpha = \frac{180\theta}{\pi} \quad (17)$$

Nesta equação o alpha seria o ângulo em graus e theta em radianos.

Por fim, obtivemos a tabela a seguir, que contém todos os 14 "representantes" de cada conjunto, assim como suas distâncias percorridas, velocidades, ângulos  $\theta$  junto de suas incertezas.

**Tabela 2:** Tabela referente ao tempo entre 2 anos em segundos, distância entre o sol e o planeta, variação da distância entre 5 pontos, velocidade instantânea do planeta e o ângulo em radiano e grau entre o momento linear e a distância entre o sol e o planeta, todos exceto pelo tempo, juntos de suas respectivas incertezas.

km/dia e não por segundo...

t (s)	r (km)	inc r (km)	D r (km)	inc Dr	vel (km/s)	inc vel	teta (rad)	inc teta (rad)	teta (°)	inc teta (°)	inc sen teta	Cos teta
2.40E+06	4.47E+09	4.47E+06	1.37E+09	6.83E+06	4.70E+05	2.16E+03	1.578	0.005	90.42	0.26	3.33E-05	-7.28E-03
2.40E+06	4.46E+09	4.46E+06	1.38E+09	6.81E+06	4.72E+05	2.16E+03	1.575	0.004	90.22	0.20	1.35E-05	-3.83E-03
2.41E+06	4.46E+09	4.46E+06	1.38E+09	6.81E+06	4.72E+05	2.16E+03	1.571	0.001	90.00	0.03	2.70E-08	4.87E-05
2.41E+06	4.46E+09	4.46E+06	1.38E+09	6.81E+06	4.71E+05	2.16E+03	1.568	0.003	89.86	0.16	6.51E-06	2.39E-03
2.41E+06	4.47E+09	4.47E+06	1.37E+09	6.81E+06	4.70E+05	2.16E+03	1.565	0.004	89.69	0.26	2.45E-05	5.46E-03
2.42E+06	4.48E+09	4.48E+06	1.37E+09	6.34E+06	4.70E+05	2.17E+03	1.564	0.004	89.60	0.23	2.84E-05	7.02E-03
2.42E+06	4.50E+09	4.50E+06	1.37E+09	6.36E+06	4.68E+05	2.18E+03	1.562	0.004	89.48	0.21	3.30E-05	9.02E-03
2.43E+06	4.51E+09	4.51E+06	1.36E+09	6.38E+06	4.66E+05	2.18E+03	1.562	0.004	89.47	0.22	3.54E-05	9.24E-03
2.43E+06	4.53E+09	4.53E+06	1.36E+09	6.41E+06	4.65E+05	2.18E+03	1.566	0.005	89.71	0.27	2.38E-05	5.05E-03
2.44E+06	4.54E+09	4.54E+06	1.36E+09	6.42E+06	4.64E+05	2.20E+03	1.572	0.005	90.07	0.27	5.92E-06	-1.25E-03
2.45E+06	4.53E+09	4.53E+06	1.36E+09	6.40E+06	4.66E+05	2.18E+03	1.578	0.005	90.38	0.26	3.04E-05	-6.71E-03
2.45E+06	4.51E+09	4.51E+06	1.36E+09	6.38E+06	4.67E+05	2.18E+03	1.578	0.002	90.43	0.13	1.76E-05	-7.52E-03
2.45E+06	4.50E+09	4.50E+06	1.37E+09	6.36E+06	4.67E+05	2.18E+03	1.579	0.001	90.46	0.06	8.68E-06	-8.02E-03
2.46E+06	4.48E+09	4.48E+06	1.37E+09	6.34E+06	4.69E+05	2.17E+03	1.579	0.004	90.46	0.22	3.13E-05	-8.07E-03

## 4 Resultados

incertezas mcom 1 significativo...

Agora, com base na tabela 2 podemos calcular de fato o momento linear e angular a partir das equações 5 e 6. Suas incertezas foram calculadas a partir das equações a seguir:

$$\sigma P = P \sqrt{\left(\frac{\sigma M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \vec{V}}{\vec{V}}\right)^2} \quad (18)$$

$$\sigma L = L \sqrt{\left(\frac{\sigma P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \sin\theta}{\sin\theta}\right)^2} \quad (19)$$

Onde  $P$  é o momento linear e  $L$  momento angular.

A princípio também compararemos as energia totais envolvidas no movimento do planeta, e para tanto calculamos suas energias cinéticas e potenciais e somamos ambas para conseguir a sua energia total  $E_{tot}$ . Utilizamos para esse cálculo as equações ??, 8 e 9, e para as incertezas,



usamos as equações abaixo:

$$\sigma E_{cinética} = E_{cinética} \sqrt{\left(\frac{\sigma M}{M}\right)^2 + \frac{2\sigma V}{V}} \quad (20)$$

$$\sigma E_{potencial} = E_{potencial} \sqrt{\left(\frac{\sigma M_1}{M_1}\right)^2 + \frac{\sigma M_2}{M_2} + \left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2} \quad (21)$$

$$\sigma E_{total} = \sqrt{\sigma E_{cinética} + (\sigma E_{potencial})} \quad (22)$$

Visto que já calculamos todos os dados necessários, logo exibiremos na tabela a seguir o momento linear, momento angular, Energia cinética, energia potencial e energia total, e todos acompanhados de suas respectivas incertezas

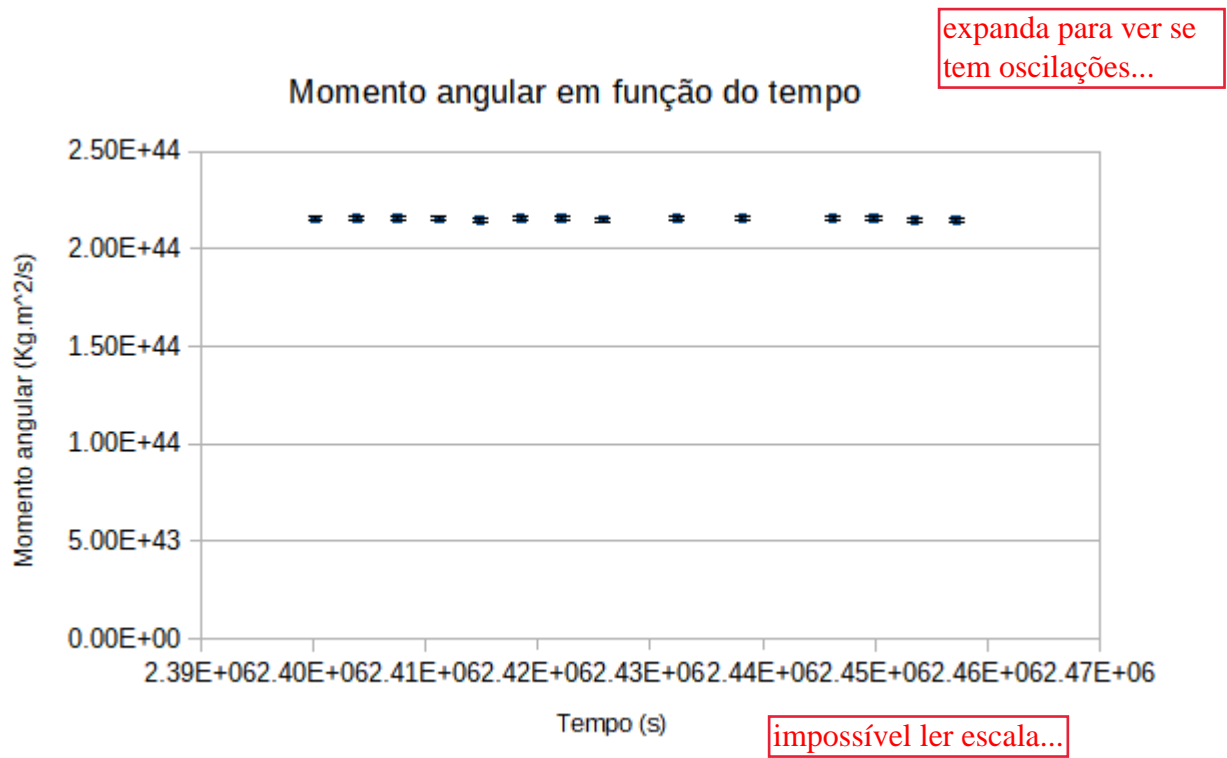
**Tabela 3:** Tabela referente ao momento linear, momento angular, energia cinética, energia potencial e a energia total, todos acompanhados de suas respectivas incertezas.

p (kg m/s)	inc p	L	inc L	Ecin	inc Ecin	Epot	inc Epot	Etot	inc Etot
4,82E+34	2,22E+32	2,15E+44	1,01E+42	1,13E+43	1,04E+41	-3,04E+47	3,04E+44	-3,04E+47	3,04E+44
4,83E+34	2,21E+32	2,16E+44	1,01E+42	1,14E+43	1,04E+41	3,05E+47	3,05E+44	-3,04E+47	3,05E+44
4,84E+34	2,21E+32	2,16E+44	1,01E+42	1,14E+43	1,04E+41	3,05E+47	3,05E+44	-3,05E+47	3,05E+44
4,83E+34	2,21E+32	2,15E+44	1,01E+42	1,14E+43	1,04E+41	-3,05E+47	3,05E+44	-3,05E+47	3,05E+44
4,82E+34	2,22E+32	2,15E+44	1,01E+42	1,13E+43	1,04E+41	-3,04E+47	3,04E+44	-3,04E+47	3,04E+44
4,81E+34	2,22E+32	2,16E+44	1,02E+42	1,13E+43	1,04E+41	-3,03E+47	3,03E+44	-3,03E+47	3,03E+44
4,80E+34	2,23E+32	2,16E+44	1,02E+42	1,12E+43	1,04E+41	-3,02E+47	3,02E+44	-3,02E+47	3,02E+44
4,77E+34	2,23E+32	2,15E+44	1,03E+42	1,11E+43	1,04E+41	-3,02E+47	3,02E+44	-3,01E+47	3,02E+44
4,76E+34	2,24E+32	2,16E+44	1,04E+42	1,11E+43	1,04E+41	-3,00E+47	3,00E+44	-3,00E+47	3,00E+44
4,75E+34	2,25E+32	2,16E+44	1,04E+42	1,10E+43	1,04E+41	-3,00E+47	3,00E+44	-3,00E+47	3,00E+44
4,77E+34	2,24E+32	2,16E+44	1,04E+42	1,11E+43	1,04E+41	-3,00E+47	3,00E+44	-3,00E+47	3,00E+44
4,78E+34	2,24E+32	2,16E+44	1,03E+42	1,12E+43	1,04E+41	-3,01E+47	3,01E+44	-3,01E+47	3,01E+44
4,79E+34	2,23E+32	2,15E+44	1,03E+42	1,12E+43	1,04E+41	-3,02E+47	3,02E+44	-3,02E+47	3,02E+44
4,80E+34	2,22E+32	2,15E+44	1,02E+42	1,12E+43	1,04E+41	-3,03E+47	3,03E+44	-3,03E+47	3,03E+44

Por fim, construímos 2 gráficos para demonstrar tanto o momento quanto a energia durante o período analisado, mas apenas dos representantes.

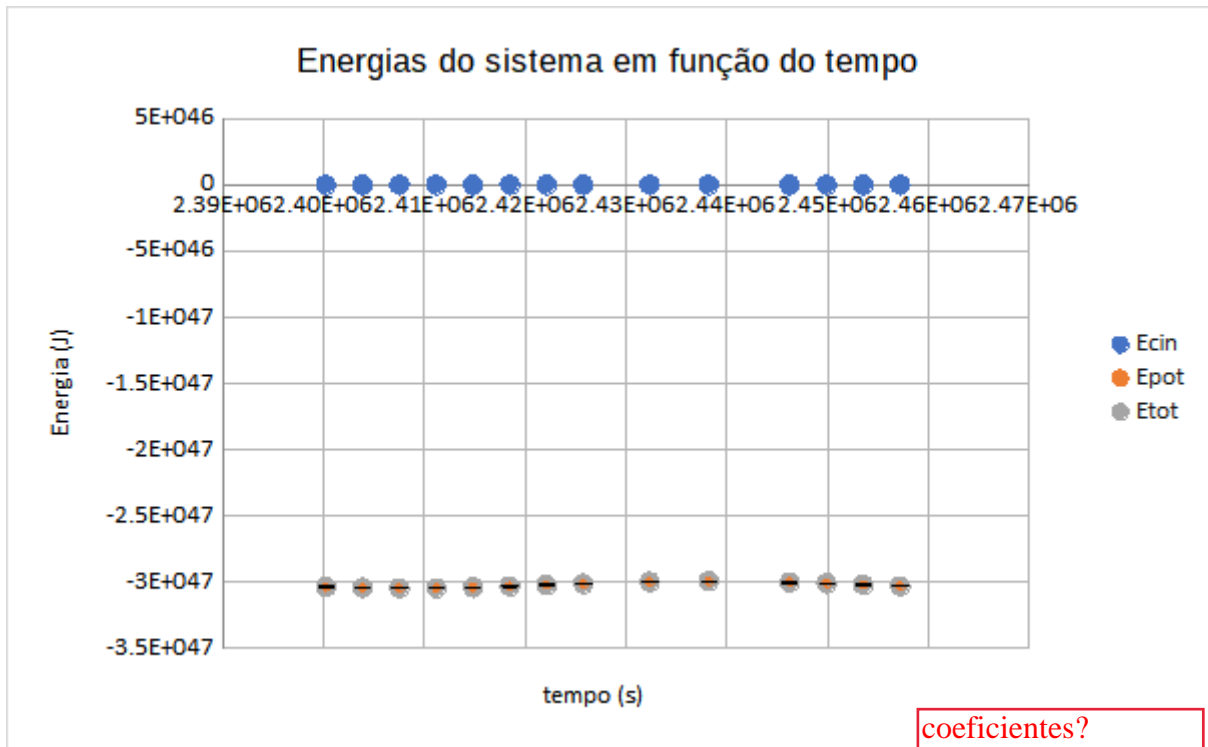
coerente com valor de velocidade errado...

esqueceu o expoente de G...



**Figura 4:** Gráfico referente ao momento angular do movimento do planeta em torno do Sol durante um período de tempo.

coeficientes?



**Figura 5:** Gráfico referente à energia do movimento do planeta em torno do sol durante um período de tempo.

cálculo com vetores

## 5 Discussão

constante ou não?

Para uma discussão se no sistema Netuno-Sol houve uma conservação do momento angular e da energia total, devemos olhar para um gráfico deles em função do tempo do período de órbita do planeta. Assim, podemos observar o gráfico 4 mostrando que o momento não se altera **significamente** durante o percurso em volta do sol, tendo algumas alterações nos instantes em que o planeta se encontra mais próximo ou longe do sol fazendo com que a sua velocidade se altere (estando mais rápido quando se encontra mais próximo do sol, por exemplo) causando a alteração no momento linear da tabela 3 que é diretamente ligado ao momento angular.

Já a energia total do sistema visto no gráfico 5 podemos ver que valor da energia total do sistema é muito próximo do valor da energia potencial gravitacional entre os corpos (além de que um teste  $z$  entre esses valores nos dá um resultado de  $z = 0,03$ ). Isso ocorre porque o valor da energia potencial é muito grande (por conta das massas de cada corpo) e em comparação a energia cinética do corpo é bem baixa visto que demora um longo período para completar sua trajetória, então fazendo a soma das energias, temos que a energia total do sistema durante sua trajetória não muda significativamente, havendo uma conservação.

erro na conta...

Além disso, observando os dados da tabela 3 podemos comparar através de um teste  $Z$  os valores das energia totais entre si. A tabela abaixo é o valor do teste  $Z$  entre um valor da energia total de cada "representante" com o seu próximo, o último dado da tabela é uma comparação entre o primeiro e o último "representante".

pq não comparou com um valor médio?

**Tabela 4:** Tabela referente ao teste Z entre os valores da energia total.

teste Z de $E_{tot}$
1,27
0,58
0,10
1,07
2,02
2,32
2,06
3,44
0,90
1,66
1,96
2,53
2,31
1,61

Como podemos ver, quase todos os valores do teste Z são compatíveis a até  $2\sigma$  de comparação, exceto por alguns dados que tiveram um  $Z > 2$ .

Agora, comparamos da mesma maneira o momento angular para ver se há ou não uma conservação.

**Tabela 5:** Tabela referente ao teste Z entre os momentos angulares.

teste Z de L
0,26
0,00
0,28
0,09
0,25
0,09
0,31
0,32
0,16
0,17
0,01
0,35
0,07
0,17

média....
-----------

Assim, conseguimos compreender que todos os 14 "representantes" são compatíveis em até  $1\sigma$  quando se trata do momento angular.

## **6 Conclusão**

Por fim podemos concluir observando a energia total e o momento angular, que diante da compatibilidade entre os valores obtidos, há uma conservação tanto da energia quanto do momento.

Conseguimos compreender também que houve uma predominância da energia potencial em cima da energia cinética, ou seja houve pouca influência da energia cinética para a energia potencial.