

Giovanna Fleming - n°USP: 11321364 e Lucas Tessarotto Roque - n°USP: 11298302

4,9

**Forças Centrais**

**Universidade de São Paulo**

**Junho - 2020**

## 1. Descrição experimental

O experimento consiste na medição do momento angular e das energias (mecânica, potencial gravitacional e cinética) de um corpo em movimento, em que age uma força central gravitacional. O experimento tem como objetivo interpretar os resultados e verificar as leis de conservação.


O arranjo experimental se baseia na análise de dados obtidos na página da Nasa “**HORIZONS Interface Web**”. O planeta escolhido para a obtenção dos dados foi Urano. No site, foi gerado um arquivo, que continha as coordenadas X, Y e Z da posição de Urano em relação ao Sol, com a **incerteza de 1%** do valor de cada X e Y obtidos. Cada posição foi obtida com um ano terrestre de diferença. **era 0,1%**

Para facilitar o entendimento e os cálculos, foi planejada a órbita de Urano através da fórmula (1), (2) e (3). Com isso, foram achados novos valores de coordenadas: o X<sub>novo</sub> e o Y<sub>novo</sub>.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{diferença entre referenciais?} \quad (1)$$

$$x_{\text{novo}} = r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

$$y_{\text{novo}} = r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

Além disso, os valores de X<sub>novo</sub> e Y<sub>novo</sub> foram divididos em grupos de cinco posições, e o X<sub>3novo</sub> e Y<sub>3novo</sub> são as coordenadas do vetor  $r^{\rightarrow}$ . O módulo de  $r^{\rightarrow}$  foi calculado por (4) e sua incerteza foi calculada com (5). ~~Sendo o  $\Delta r$  a diferença entre os módulos do quinto e primeiro vetor de cada grupo.~~ 

r<sub>novo</sub> = r  
não precisava  
calcular de novo...

$$r_{\text{novo}} = \sqrt{x_{\text{novo}}^2 + y_{\text{novo}}^2} \quad (4)$$

$$\sigma_{r_{\text{novo}}} = 0,001 \cdot \frac{\sqrt{x_{\text{novo}}^4 + y_{\text{novo}}^4}}{r_{\text{novo}}} \quad \text{xnovo e y nov tem uma incerteza maior do que essa.} \quad (5)$$

Com isso, foi possível calcular a velocidade de Urano (6), onde  $t$  é o ano terrestre em segundos multiplicado por 4, pois é o intervalo entre um instante e outro. Com a equação (7), foi calculada a incerteza da velocidade.

$$V = \frac{\Delta r}{t} \quad (6)$$

$$\sigma V = V \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2} \quad (7)$$

incerteza em t desprezível?

Depois, foi possível calcular os valores da quantidade de movimento linear (8), do momento angular (10), do cosseno de  $\theta$  (11). A incerteza da quantidade de movimento linear, foi dada pela expressão (9)

$$P = m \cdot V \quad (8)$$

$$\sigma P = P \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma V}{V}\right)^2} \quad (9)$$

$$L = r \cdot P \cdot \text{sen}(\theta) \quad (10)$$

incerteza de L?

$$\cos(\theta) = \frac{X_{\text{novo}} \cdot V_{X_{\text{novo}}} + Y_{\text{novo}} \cdot V_{Y_{\text{novo}}}}{r \cdot V} \quad (11)$$

Em seguida, foram calculadas a energia cinética (12), da energia potencial (13) e da energia mecânica (14). Aqui consideramos que  $m$  é a massa de Urano,  $M_s$  a massa do sol,  $\theta$  o ângulo entre os vetores velocidade e posição e  $r$  será o  $r$  novo.

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \quad (12)$$

$$E_{\text{pot}} = - \frac{G \cdot m \cdot M_s}{r+R} \quad (13)$$

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} \quad (14)$$

As incertezas da  $E_{\text{cin}}$  (15),  $E_{\text{pot}}$  (16) e  $E_{\text{tot}}$  (17) foram dadas por:

$$\sigma E_{\text{cin}} = E_{\text{cin}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma m}{m}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\sigma V}{V}\right)^2} \quad (15)$$

massa do Sol?

$$\sigma E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2} \quad (16)$$

$$\sigma E_{\text{tot}} = \sqrt{\sigma E_{\text{cin}}^2 + \sigma E_{\text{pot}}^2} \quad (17)$$

Na sequência, foi utilizado o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), a fim de encontrar o melhor ajuste para o conjunto dos dados, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Foram encontrados os valores de  $a$  e  $b$  (coeficiente angular e linear, respectivamente) e criado o gráfico da energia total ajustada em função do tempo e os gráficos de resíduo absoluto e reduzido em função do tempo.. ~~O absoluto mostra a distância dos dados experimentais aos ajustados e o reduzido é o valor do resíduo absoluto dividido pela incerteza.~~

Além disso, também foi possível encontrar o ângulo gráfico dos vetores posição e os vetores velocidade, esse gráfico foi feito com os valores de  $X_{\text{novo}}$  e  $Y_{\text{novo}}$  da posição e da velocidade no PowerPoint. Para encontrar os vetores da velocidade, foi feito um truque matemático, onde  $V_x' = r + (\alpha V_x)$  e  $V_y' = r + (\alpha V_y)$ . Para encontrar o ângulo entre os vetores velocidade e posição, foi rotacionado o vetor velocidade e verificado o quanto variou seu ângulo, que inicialmente era de zero.

## 2. Resultados obtidos

tabelas x,y,z?e x novo e y novo?

As tabelas e gráficos a seguir foram criadas a partir das expressões vistas no tópico anterior.

valores das massas, G ?

incoerente com seu valor

t	r novo (m)	inc r (m)	Dr (m)	inc Dr (m)	vel (m/s)	inc vel (m/s)
9,46E+07	2,99E+12	2,26E+07	8,18E+11	3,27E+07	6,49E+03	1,79E-01
2,52E+08	2,99E+12	2,82E+07	8,25E+11	3,95E+07	6,54E+03	2,24E-01
4,10E+08	3,00E+12	2,98E+07	8,17E+11	4,14E+07	6,47E+03	2,36E-01
5,68E+08	3,00E+12	2,52E+07	8,19E+11	3,57E+07	6,49E+03	1,99E-01
7,25E+08	3,00E+12	2,09E+07	8,20E+11	3,06E+07	6,50E+03	1,65E-01
8,83E+08	3,00E+12	2,45E+07	8,14E+11	3,48E+07	6,45E+03	1,95E-01
1,04E+09	3,01E+12	2,85E+07	8,16E+11	3,93E+07	6,47E+03	2,26E-01
1,20E+09	3,01E+12	2,52E+07	8,16E+11	3,55E+07	6,47E+03	2,00E-01
1,36E+09	3,00E+12	1,97E+07	8,17E+11	2,91E+07	6,47E+03	1,56E-01
1,51E+09	3,00E+12	2,30E+07	8,18E+11	3,28E+07	6,48E+03	1,82E-01

Tabela 1. Dados de posição, velocidade e suas incertezas.

incertezas com 1 significativo.

teta (°)	teta (rad)	p (kg m/s)	inc p	L
90,00	1,57	5,63E+29	8,58E+25	1,68E+42
90,00	1,57	5,68E+29	8,72E+25	1,70E+42
90,00	1,57	5,62E+29	8,66E+25	1,68E+42
90,00	1,57	5,63E+29	8,61E+25	1,69E+42
90,00	1,57	5,64E+29	8,57E+25	1,69E+42
90,00	1,57	5,60E+29	8,55E+25	1,68E+42
90,00	1,57	5,62E+29	8,64E+25	1,69E+42
90,00	1,57	5,62E+29	8,59E+25	1,69E+42
90,00	1,57	5,62E+29	8,52E+25	1,68E+42
90,00	1,57	5,63E+29	8,57E+25	1,69E+42

Tabela 2. Tabela referente ao momento linear e angular com suas incertezas.

não é sempre 90...

angulo entre r e v?

unidades?

<b>Ecín</b>	<b>inc Ecín</b>	<b>Epot</b>	<b>inc Epot</b>	<b>Etot</b>	<b>inc Etot</b>
1,83E+33	1,67E+12	-3,85E+33	-5,78E+29	-2,03E+33	5,78E+29
1,86E+33	2,09E+12	-3,85E+33	-5,78E+29	-2,00E+33	5,78E+29
1,82E+33	2,20E+12	-3,84E+33	-5,77E+29	-2,02E+33	5,77E+29
1,83E+33	1,85E+12	-3,84E+33	-5,76E+29	-2,01E+33	5,76E+29
1,83E+33	1,54E+12	-3,84E+33	-5,76E+29	-2,01E+33	5,76E+29
1,81E+33	1,82E+12	-3,84E+33	-5,76E+29	-2,04E+33	5,76E+29
1,82E+33	2,11E+12	-3,83E+33	-5,75E+29	-2,01E+33	5,75E+29
1,82E+33	1,86E+12	-3,83E+33	-5,74E+29	-2,01E+33	5,74E+29
1,82E+33	1,45E+12	-3,84E+33	-5,76E+29	-2,02E+33	5,76E+29
1,82E+33	1,70E+12	-3,84E+33	-5,76E+29	-2,02E+33	5,76E+29

Tabela 3. Dados sobre as energias cinéticas envolvidas no experimento.

<b>Coefficientes</b>	
<b>a</b>	<b>b</b>
-1,14E+21	-2,02E+33
<b><math>\sigma</math> a</b>	<b><math>\sigma</math> b</b>
4,03E+20	3,72E+29

graficamente?

Tabela 4. Coeficientes para o ajuste de reta do MMQ

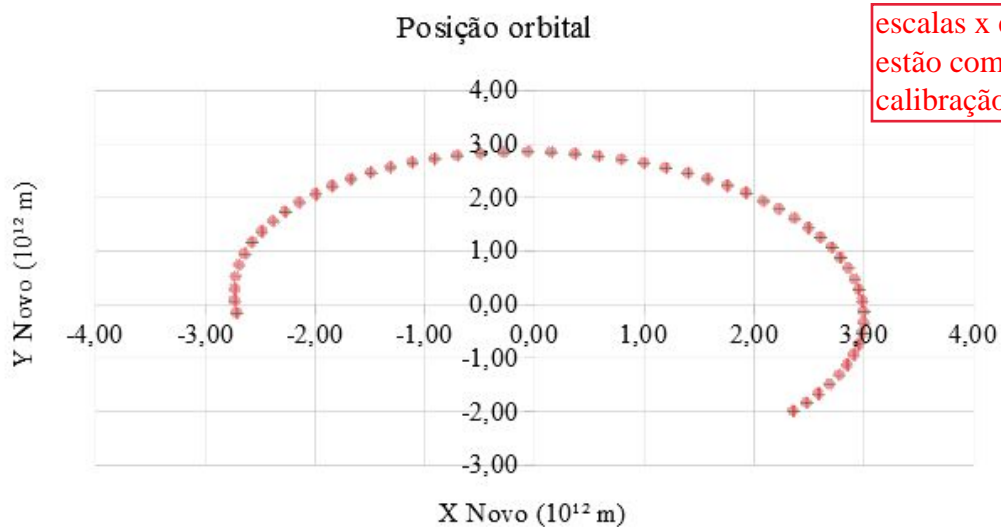


Gráfico 1. Gráfico da posição de Urano em relação ao Sol.

expandir escalas para ver oscilações...

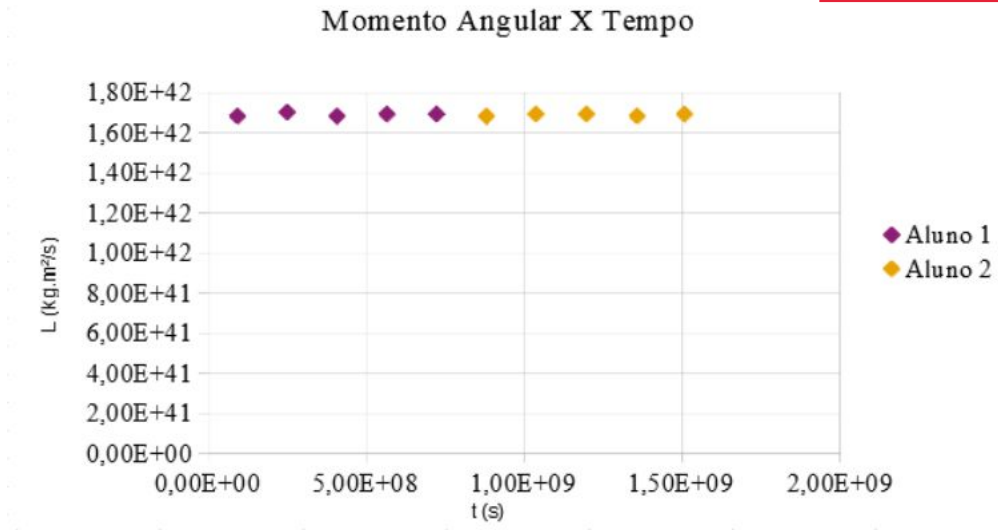


Gráfico 2. Gráfico do momento angular em função do tempo.

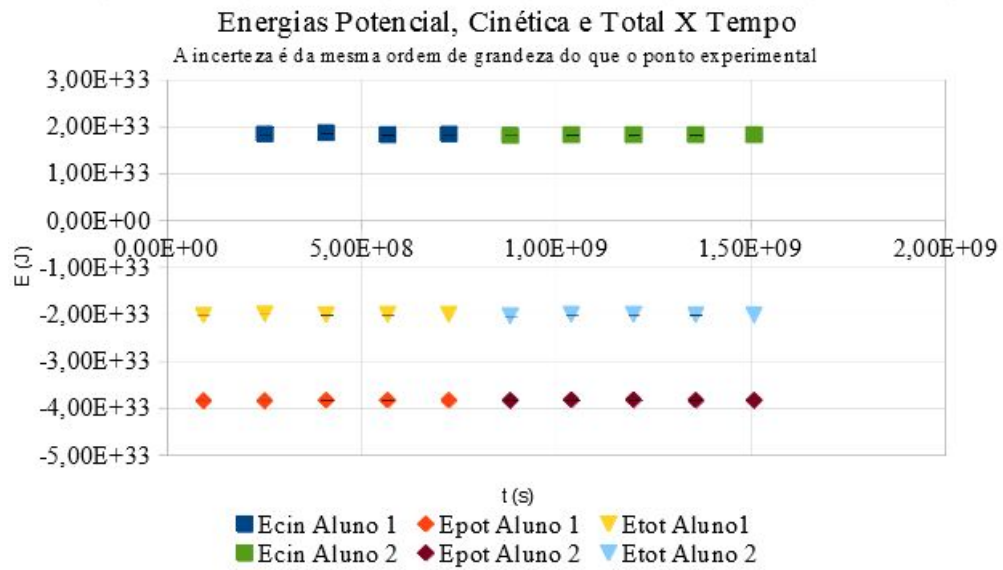
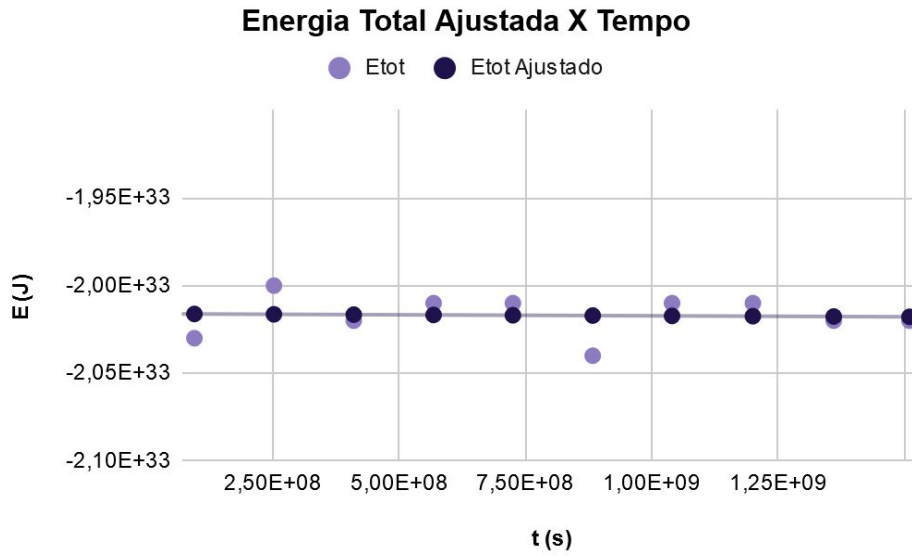
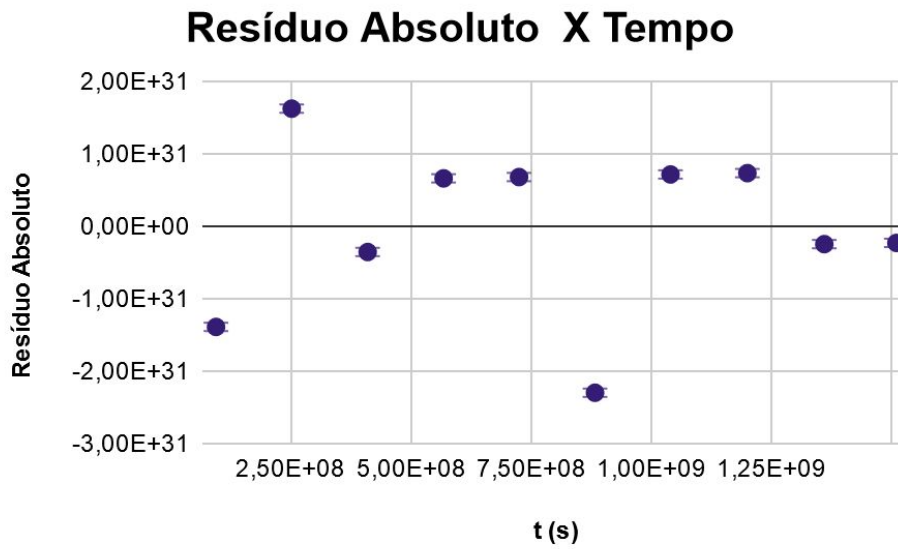


Gráfico 3. Gráfico construído com os dados da Tabela 3 das energias obtidas.



**Gráfico 4.** Ajuste da energia total com os coeficientes  $a$  e  $b$ .



**Gráfico 5.** Distância dos dados experimentais dos ajustados.



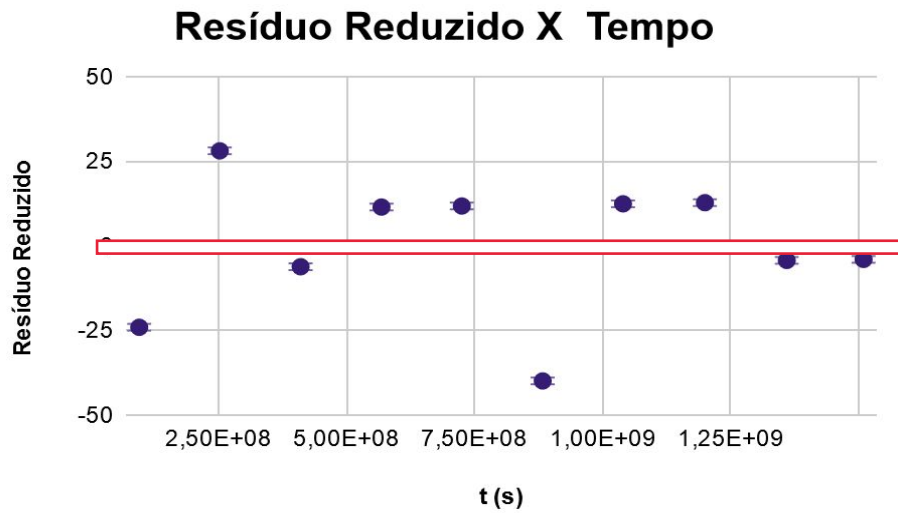


Gráfico 6. Valor do resíduo absoluto dividido pela incerteza da energia mecânica.

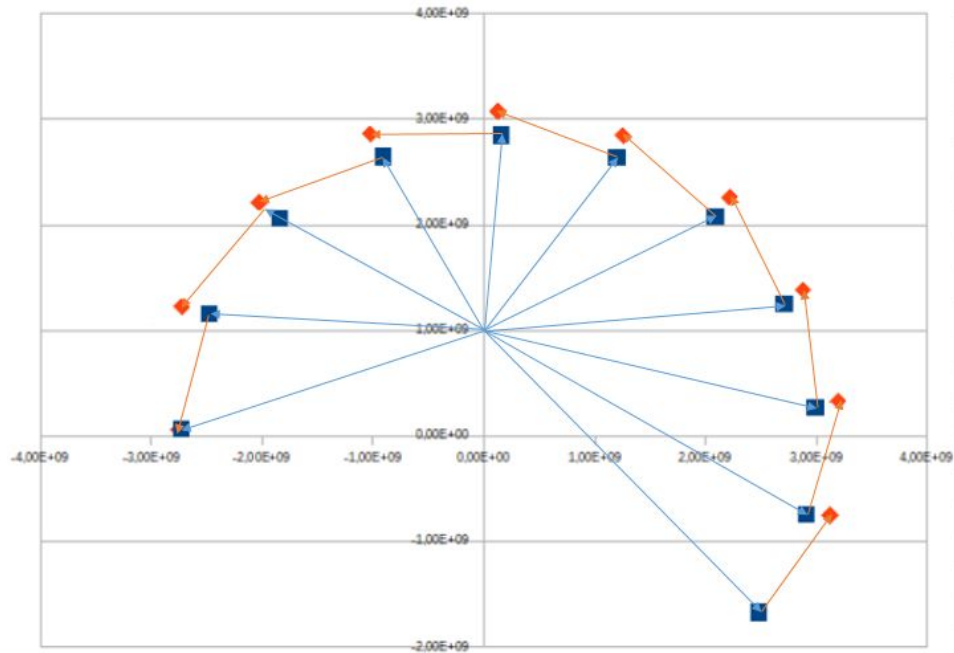


Gráfico 7. Vetores posição e velocidade de Urano. Em azul é o vetor posição e em laranja o vetor velocidade.

calibração para distância e velocidade?

cálculo com versores?

### 3. Análise de dados discussão e não análise...

Ao analisar os dados da tabela 1, pode-se observar que o raio se comporta com o esperado, pois ele não é constante, já que cresce até mais ou menos até  $3,1 \times 10^{12}$  m. Essa variação era esperada, pois a órbita de Urano é uma elipse, ou seja, os maiores valores de  $r$ , foram as posições em que o planeta estava mais distante do Sol, o gráfico 1 mostra a trajetória do planeta nos pontos estudados. Além do mais, foi possível observar que a velocidade permaneceu praticamente constante. inconsistente...

Além disso, ao analisar os dados da tabela 2, foi possível notar que, o ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade, permaneceu constante com o valor de  $90^\circ$ , o que indica que a velocidade encontrada é a velocidade tangencial à trajetória do planeta. X

Quanto a quantidade de movimento linear, foi notado que o momento linear permaneceu praticamente constante. Isso era esperado, já que a velocidade foi constante. Além disso, ao observar o momento angular, tanto pela análise da tabela 2 quanto pelo gráfico 2, foi notado que a quantidade de movimento angular é constante. como prova?

Ao analisar a tabela 3 e o gráfico 3, foi possível ver que a energia cinética, a energia potencial e, conseqüentemente, devido a fórmula (14), a energia mecânica, foram aproximadamente constantes.

### 4. Conclusão

Visto que a trajetória analisada foi a órbita de um planeta, os dados da tabela 1 estão condizentes com a teoria e eram esperadas, pois o raio de Urano varia em função do tempo como explicado anteriormente. Os dados de  $D_r$  também estão de acordo com o esperado, já que, de acordo com a Lei das Áreas, o valor de  $D_r$  diminui conforme o raio aumenta.

Com os valores de  $D_r$ , foi possível calcular a velocidade e foi observado que o ângulo entre o vetor velocidade e o vetor posição se manteve em  $90^\circ$ , isso é condizente com o esperado, pois se trata da velocidade tangencial à posição. X

como comprova  
experimentalmente?

Quanto às quantidades de movimento linear e angular, pode-se dizer que elas corresponderam ao esperado, já que permaneceram praticamente constantes, com pequenas variações que podem ser considerados como erro nas medidas. A quantidade de movimento angular está totalmente de acordo com a teoria, uma vez que o torque da força gravitacional no corpo é nulo e, portanto, a variação da quantidade de movimento angular nele deve ser zero.

Na análise das energias, pode-se concluir que elas estão de acordo com a teoria de que elas devem se conservar, uma vez que tanto a energia cinética quanto a potencial podem ser consideradas constantes e, conseqüentemente, a energia mecânica permaneceu constante também.

Logo, o objetivo do experimento foi cumprido, já que foi possível verificar que as leis de conservação foram válidas nesse experimento.

incertezas?:  
comparação entre  
alunos?

## Bibliografia

<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top>

