



Márcio Martins Jacob Gustavo de Lima Ribeiro

10801127

11223865

Grupo 06 - Saturno

Laboratório de Mecânica

Nemitala Added

6,9

Síntese sobre forças centrais de Saturno

Marcio Martins Jacob

Gustavo de Lima Ribeiro

Conteúdo

1	Resumo	3
2	Introdução ao experimento	3
3	Metodologia experimental	5
4	Resultados e análise de dados obtidos	8
5	Discussão final e conclusões	18
6	Referências bibliográficas	18

1 Resumo

em qual referencial?

Com o centro do Sol sendo a origem do sistema de referências, utiliza-se os dados das posições de Saturno em função do tempo ao realizar sua órbita. Os dados apresentam três coordenadas, elas são reduzidas a duas, a órbita é planificada e, a partir de alguns pontos subsequentes, é calculada a velocidade orbital do planeta, que é utilizada para calcular o momento angular e a energia mecânica. Com isso, a conservação do momento angular e da energia é verificada e são mostrados os vetores em direção, sentido e módulo.

2 Introdução ao experimento

O experimento consiste em utilizar os dados da posição de Saturno em função do tempo para ajustar a trajetória realizada pelo planeta e estudar as forças centrais que, nesse caso, apontam para o Sol, que é, aproximadamente, o centro da órbita. Com isso, é possível calcular a energia mecânica e o momento angular de Saturno em dados pontos da órbita. O objetivo principal é interpretar os resultados obtidos do ponto de vista das leis de conservação.

As forças centrais supracitadas são de cunho gravitacional, dadas pela interação entre a massa de Saturno e a massa do Sol. Dessa forma, é desconsiderada a presença de interferência de outros corpos do Sistema Solar que também interagem com Saturno, porque a interação com o Sol é a preponderante para o movimento orbital.

Em um sistema binário de estrelas, as órbitas dessas são em torno do centro de massa do sistema¹, isso também é válido para qualquer sistema com dois ou mais corpos, sendo que, para esse caso específico, considera-se apenas dois corpos, o Sol e Saturno. Destarte, não haverão forças externas ao sistema, então, o centro de massas estará em repouso e, como a massa do Sol² é perto de dez mil vezes maior que a de Saturno³, o centro de massas estará muito próximo ao núcleo solar. Com isso, o Sol será considerado parado no centro, com o centro de massas coincidindo com o centro do Sol. A partir disso, as posições de Saturno em função do tempo foram obtidas pelo Solar System Dynamics Group do Jet Propulsion Laboratory, usando um programa disponibilizado pela Nasa em

¹O centro de massa do sistema é um ponto hipotético onde estaria concentrada toda a massa do sistema, sua posição é calculada por um tipo de média de r na qual os diferentes r_i s têm pesos ou importâncias proporcionais às massas. Cf. FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., & SANDS, M. (2008). Lições de Física-Vol. 1. Tradução de Adriana VR da Silva e Kaline R. Coutinho. Porto Alegre: Bookman.

² $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg

³ $M_{\text{h}} = 5,683 \cdot 10^{26}$ kg

<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top>

Para ter um entendimento mais claro da atuação da força central é proposto o seguinte experimento mental: imagine uma pequena massa presa por uma corda sendo colocada em rotação por quem a segura, nesse movimento há uma força que atua constantemente apontando para o centro (que está no ponto em que a mão segura a corda), essa força é a tração realizada pela corda na pequena massa, assim a corda mantém o corpo em trajetória circular. De maneira análoga, a interação gravitacional mantém o planeta em sua trajetória elíptica⁴, durante o movimento orbital a força está apontando sempre para o Sol, centro da órbita. Da mecânica clássica é enunciado que "o momento linear do sistema conserva-se desde que possamos desprezar os efeitos de forças externas⁵", a partir disso é esperado que o momento linear não se conserve, pois, pela 3ª Lei de Newton, a interação gravitacional configura um par ação e reação, sendo assim, age no Sol apontando para Saturno e em Saturno apontando para o Sol, na mesma direção e em sentidos opostos, portanto, é uma força externa que não pode ser desprezada.

Já o momento angular, somente será conservado caso a resultante dos torques externos em relação a dado ponto se anule, à vista disso, é necessário calcular se haverá torque causado por forças externas. Para o caso em questão, há apenas a força gravitacional atuando como força externa. Da mecânica rotacional, é sabido que o torque depende do "braço de alavanca" e da força realizada sobre o corpo, com expressão matemática: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_g$. Para se ter em vista o módulo do torque será necessário conhecer o ângulo formado entre a força exercida pelo Sol em Saturno e a posição de Saturno em relação ao sistema de referências, que está no centro do Sol, assim, os vetores são paralelos, o ângulo formado entre eles é nulo. No módulo do produto vetorial, usa-se o seno do ângulo supracitado, como $\sin 0^\circ = 0$, pode-se afirmar que $\tau = 0$. O torque é a variação instantânea do momento angular, para esse experimento, o torque sobre Saturno é nulo, então espera-se que o momento angular total seja conservado.

A energia mecânica do sistema tem que ser conservada também, visto que essa é composta pela energia potencial gravitacional e pela energia cinética de Saturno. A partir disso, para a órbita elíptica, haverão pontos da órbita onde o planeta estará mais próximo do Sol e, com isso, apresentará maior velocidade, o que altera o valor da energia cinética, bem como a redução da distância ao Sol altera o valor da energia potencial gravitacional. A energia mecânica, advinda da soma das energias cinética e potencial gravitacional, deve

⁴A excentricidade da elipse é de 0.056, aproximadamente um círculo (que tem excentricidade nula).

⁵Cf. NUSSENZVEIG, H. M. , Curso de Física básica-Vol. 1. pg. 75

ser conservada apesar da variação da distância do planeta ao Sol.

3 Metodologia experimental

O período orbital de Saturno é de 10759,22 dias, para iniciar a análise é necessário, no mínimo oitenta posições em função do tempo, para efeito de tornar os intervalos de tempo entre as posições mais precisos, foram coletados 108 dados, dessa forma, entre cada posição tem-se 100 dias. É sabido que as órbitas são planas, sendo que alguns planos de órbita apresentam inclinação em relação ao plano do equador do Sol, mas como a análise tem apenas um planeta como objeto de estudo, sua órbita pode ser planificada, de maneira a ajudar a análise. Assim, as posições de Saturno serão transformadas em x_{novo} e y_{novo} , que em função de x , y & z são:

$$x_{novo} = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

$$y_{novo} = \frac{y \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

A incerteza para x_{novo} e y_{novo} é encontrada ao achar os valores máximos e mínimos possíveis de se atingir ao levar em conta a incerteza relativa da posição, que é de 0,1%:

$$x_{novo}^+ = \frac{f_1 + \sigma}{f_2 - \sigma} \quad (3)$$

$$x_{novo}^- = \frac{f_1 - \sigma}{f_2 + \sigma} \quad (4)$$

$$\sigma_{x_{novo}} = \frac{x_{novo}^+ - x_{novo}^-}{2} \quad (5)$$

$$y_{novo}^+ = \frac{f_1 + \sigma}{f_2 - \sigma} \quad (6)$$

$$y_{novo}^- = \frac{f_1 - \sigma}{f_2 + \sigma} \quad (7)$$

$$\sigma_{y_{novo}} = \frac{y_{novo}^+ - y_{novo}^-}{2} \quad (8)$$

Depois disso, foram escolhidos doze intervalos de cinco pontos subsequentes, a partir desses intervalos de cinco pontos, poderá ser calculada a diferença entre a posição final e

a inicial, sendo assim, dos cinco pontos coletados tem-se:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_5 - \vec{r}_1 \quad (9)$$

Como a origem do sistema de referências está no Sol, o $\vec{\Delta r}$ é o vetor que liga o primeiro ponto ao quinto ponto. A velocidade é igual à variação da posição dividida pela variação do tempo entre as posições, assim, é notável que a velocidade tem o mesmo sentido e direção que a variação da posição, ou $\vec{\Delta r}$, pois trata-se de um vetor multiplicado por um escalar positivo (o intervalo de tempo). A velocidade média calculada é a velocidade instantânea do instante médio, da posição média, ou seja, é a velocidade instantânea do terceiro ponto:

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_{t_1+t_5}}{2} = \frac{\vec{r}_5 - \vec{r}_1}{t_5 - t_1} \quad (10)$$

A incerteza relativa da velocidade é calculada por:

$$\frac{\sigma_v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta r}}{\Delta r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} \quad (11)$$

Analogamente, o momento linear do planeta tem o mesmo sentido e direção da velocidade e da variação da posição, pois a quantidade de movimento é calculada ao multiplicar a velocidade do planeta por sua massa, que é um escalar positivo:

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (12)$$

A incerteza relativa da quantidade de movimento linear é calculada por:

$$\frac{\sigma_P}{P} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2} \quad (13)$$

Já para o momento angular, que é dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$. A velocidade do planeta é sempre tangencial à trajetória, assim, ao realizar o produto vetorial para encontrar \vec{L} , é possível notar que a quantidade de movimento angular é sempre perpendicular ao plano da órbita. Mas para calcular seu módulo, é utilizado:

$$L = r \cdot P \cdot \text{sen}\theta \quad (14)$$

Onde r é o módulo do vetor posição do terceiro ponto entre os cinco coletados para calcular a velocidade. E θ é o ângulo formado entre o vetor posição do ponto onde

encontra-se a velocidade instantânea e o vetor quantidade de movimento linear, que tem a mesma direção do vetor dado pela mudança de posição, $\vec{\Delta r}$. A incerteza do ângulo será calculada graficamente ao construir os vetores. Já para a incerteza do seno:

$$\sigma_{\text{sen}\theta} = \cos \theta \cdot \sigma_{\theta} \quad (15)$$

Além de ser calculado graficamente, θ pode ser calculado ao saber as coordenadas dos vetores \vec{dr} & \vec{r} por:

$$\theta = \arccos \left(\frac{x_{dr}x_r + y_{dr}y_r}{\sqrt{x_{dr}^2 + y_{dr}^2}\sqrt{x_r^2 + y_r^2}} \right) \quad (16)$$

Cuja incerteza é calculada por uma fórmula análoga à 8, onde ela é propagada a partir de metade da soma da equação acima quando maximizada com a mesma equação quando minimizada.

não precisava
calcular a incerteza...

Os dois métodos de encontrar o valor do ângulo entre os vetores \vec{r} e \vec{dr} serão comparados posteriormente.

A incerteza relativa do momento angular pode ser calculada por:

$$\frac{\sigma_L}{L} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\text{sen}\theta}}{\text{sen}\theta}\right)^2} \quad (17)$$

A energia mecânica supracitada tem a expressão:

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} \quad (18)$$

Sendo as expressões das energias:

$$E_{cin} = \frac{m \cdot V^2}{2} \quad (19)$$

$$E_{pot} = -\frac{G \cdot m_{\text{saturno}} \cdot m_{\text{sol}}}{r} \quad (20)$$

Com isso, a partir das relações acima, as incertezas das energias serão calculadas por:

$$\sigma_{E_{mec}} = \sqrt{\sigma_{E_{pot}}^2 + \sigma_{E_{mec}}^2} \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_{E_{cin}}}{E_{cin}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_v}{v}\right)^2} \quad (22)$$

$$\frac{\sigma_{E_{pot}}}{E_{pot}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_{sol}}}{m_{sol}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m_{saturno}}}{m_{saturno}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2} \quad (23)$$

É notável que a constante gravitacional (G) não aparece na fórmula da incerteza relativa da energia potencial, isso se deve ao fato de que seu valor foi calculado com uma precisão tal que sua incerteza pode ser desconsiderada sem prejudicar a precisão dos dados obtidos.

E a fim de calcular a distância do Sol a Saturno (r) usando as coordenadas x_{novo} e y_{novo} pode-se utilizar a fórmula de Pitágoras, pois há a direção vertical e a horizontal que formam entre si um ângulo reto, portanto, um triângulo retângulo com r como hipotenusa:

$$r = \sqrt{x_{novo}^2 + y_{novo}^2} \quad (24)$$

E ao propagar a incerteza das coordenadas para obter a incerteza r :

$$\frac{\sigma_r}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_{x_{novo}}}{x_{novo}}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_{y_{novo}}}{y_{novo}}\right)^2}$$

vc está aumentando a sua incerteza. R pode ser calculado diretamente de x, y e z iniciais. Vai ser mais preciso...

4 Resultados e análise de dados obtidos

Para começar a apresentar os resultados obtidos, apresenta-se, primeiramente, os dados utilizados para as massas dos planetas, as constantes e as conversões de unidade:

Tabela 1: Dados gerais

Valores Adotados		
Unidade Δt	100,00	dias
G	6,67E-11	m ³ /kg/s ²
UA	1,50E+11	m
msol	1,99E+30	kg
mplaneta	5,68E+26	kg
raio médio do planeta	5,82E+05	m

A tabela das posições obtidas não será legível caso seja comprimida nessa folha, assim, caso haja interesse por parte do leitor, a tabela está disponibilizada no link: https://drive.google.com/drive/folders/1Wu-1XbeB0eu0iiAv9KgQgmIPgDs_Mt4i?usp=sharing. Nesse link estão todas as tabelas presentes no relatório, para o caso de alguma não estar muito legível devido ao tamanho. Todos os cálculos a seguir foram realizados a partir

das posições. Sendo assim, os vetores elaborados, a partir de cinco posições subsequentes, são:

- Vetor 1

x,y,z iniciais?

Tabela 2: Dados para elaboração do vetor 1

t	X(novo)	σ_X (novo)	Y(novo)	σ_Y (novo)	r(km)	σ_r (km)	xdr (km)	σ_{xdr} (km)	ydr (km)	σ_{ydr} (km)	dr(km)	σ_{dr} (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σ_v (km)
2451904,5	7,06E+08	7,06E+05	1,17E+09	1,17E+06												
2452004,5	6,29E+08	6,29E+05	1,21E+09	1,21E+06												
2452104,5	5,49E+08	5,49E+05	1,24E+09	1,24E+06	1,36E+09	1,92E+06	-3,23E+08	8,03E+05	1,34E+08	1,75E+06	3,49E+08	1,92E+06	-9,35	3,86	10,1	0,6
2452204,5	4,67E+08	4,67E+05	1,27E+09	1,27E+06												
2452304,5	3,83E+08	3,83E+05	1,30E+09	1,30E+06												

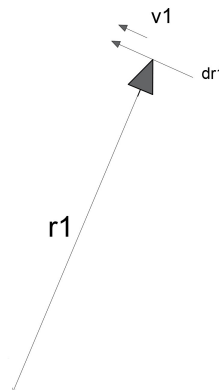
Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s



vetores poderiam estar na mesma figura...

Figura 1: Esboço do vetor 1

escalas em x e y são iguais?

- Vetor 2

Tabela 3: Dados para elaboração do vetor 2

t	X(novo)	σ_X (novo)	Y(novo)	σ_Y (novo)	r(km)	σ_r (km)	xdr (km)	σ_{xdr} (km)	ydr (km)	σ_{ydr} (km)	dr(km)	σ_{dr} (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σ_v (km)
2452804,5	-5,21E+07	-5,21E+04	1,35E+09	1,35E+06												
2452904,5	-1,40E+08	-1,40E+05	1,34E+09	1,34E+06												
2453004,5	-2,27E+08	-2,27E+05	1,33E+09	1,33E+06	1,35E+09	1,91E+06	-3,46E+08	4,02E+05	-5,71E+07	1,87E+06	3,51E+08	1,91E+06	-10,02	-1,65	10,2	0,6
2453104,5	-3,13E+08	-3,13E+05	1,32E+09	1,32E+06												
2453204,5	-3,98E+08	-3,98E+05	1,29E+09	1,29E+06												

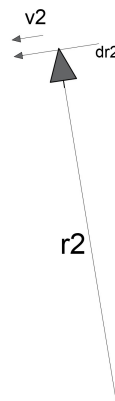
Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s



incertezas com 1 sig...

Figura 2: Esboço do vetor 2

- Vetor 3

Tabela 4: Dados para elaboração do vetor 3

t	X(novo)	αX_{novo}	Y(novo)	σY_{novo}	r(km)	σr (km)	xdr (km)	αxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	αdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv (km)	
3	2453704,5	-7,93E+08	-7,93E+05	1,11E+09	1,11E+06	1,37E+09	1,93E+06	-2,62E+08	1,32E+06	-2,28E+08	1,41E+06	3,47E+08	1,93E+06	-7,57	-6,59	10,0	0,6
	2453804,5	-8,64E+08	-8,64E+05	1,06E+09	1,06E+06												
	2453904,5	-9,31E+08	-9,31E+05	1,00E+09	1,00E+06												
	2454004,5	-9,95E+08	-9,95E+05	9,42E+08	9,42E+05												
	2454104,5	-1,05E+09	-1,05E+06	8,79E+08	8,79E+05												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

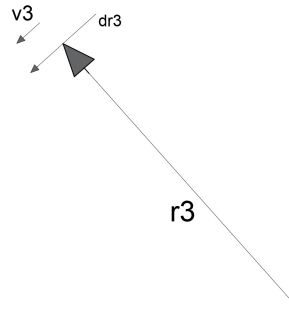


Figura 3: Esboço do vetor 3

- Vetor 4

Tabela 5: Dados para elaboração do vetor 4

t	X(novo)	αX_{novo}	Y(novo)	σY_{novo}	r(km)	σr (km)	xdr (km)	αxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	αdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv (km)	
4	2454604,5	-1,29E+09	-1,29E+06	5,22E+08	5,22E+05	1,40E+09	1,98E+06	-1,04E+08	1,90E+06	-3,22E+08	5,59E+05	3,39E+08	1,98E+06	-3,02	-9,32	9,8	0,6
	2454704,5	-1,32E+09	-1,32E+06	4,43E+08	4,43E+05												
	2454804,5	-1,35E+09	-1,35E+06	3,63E+08	3,63E+05												
	2454904,5	-1,38E+09	-1,38E+06	2,82E+08	2,82E+05												
	2455004,5	-1,39E+09	-1,39E+06	1,99E+08	1,99E+05												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

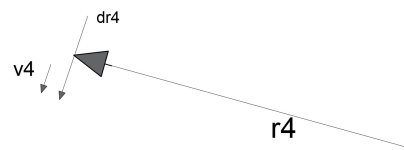


Figura 4: Esboço do vetor 4

- Vetor 5

Tabela 6: Dados para elaboração do vetor 5

t	X(novo)	αX_{novo}	Y(novo)	σY_{novo}	r(km)	σr (km)	xdr (km)	αxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	αdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv (km)	
5	2455504,5	-1,41E+09	-1,41E+06	-2,17E+08	-2,17E+05	1,44E+09	2,04E+06	6,98E+07	1,95E+06	-3,22E+08	5,81E+05	3,29E+08	2,04E+06	2,02	-9,32	9,5	0,6
	2455604,5	-1,40E+09	-1,40E+06	-2,99E+08	-2,99E+05												
	2455704,5	-1,39E+09	-1,39E+06	-3,81E+08	-3,81E+05												
	2455804,5	-1,37E+09	-1,37E+06	-4,61E+08	-4,61E+05												
	2455904,5	-1,34E+09	-1,34E+06	-5,39E+08	-5,39E+05												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

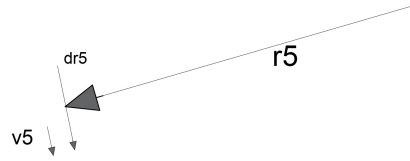


Figura 5: Esboço do vetor 5

• Vetor 6

Tabela 7: Dados para elaboração do vetor 6

t	X(novo)	σXnovo	Y(novo)	σYnovo	r(km)	σr (km)	xdr (km)	σxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	σdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv(km)	
6	2456404,5	-1,16E+09	-1,16E+06	-9,01E+08	-9,01E+05	1,48E+09	2,09E+06	2,14E+08	1,50E+06	-2,40E+08	1,45E+06	3,22E+08	2,09E+06	6,18	-6,95	9,3	0,6
	2456504,5	-1,11E+09	-1,11E+06	-9,66E+08	-9,66E+05												
	2456604,5	-1,06E+09	-1,06E+06	-1,03E+09	-1,03E+06												
	2456704,5	-1,01E+09	-1,01E+06	-1,09E+09	-1,09E+06												
2456804,5	-9,47E+08	-9,47E+05	-1,14E+09	-1,14E+06													

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

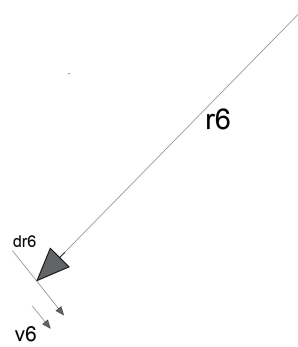


Figura 6: Esboço do vetor 6

• Vetor 7

Tabela 8: Dados para elaboração do vetor 7

t	X(novo)	σXnovo	Y(novo)	σYnovo	r(km)	σr (km)	xdr (km)	σxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	σdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv(km)	
7	2457304,5	-6,17E+08	-6,17E+05	-1,36E+09	-1,36E+06	1,50E+09	2,12E+06	2,98E+08	6,94E+05	-1,06E+08	2,00E+06	3,17E+08	2,12E+06	8,63	-3,06	9,2	0,6
	2457404,5	-5,44E+08	-5,44E+05	-1,40E+09	-1,40E+06												
	2457504,5	-4,70E+08	-4,70E+05	-1,42E+09	-1,42E+06												
	2457604,5	-3,95E+08	-3,95E+05	-1,45E+09	-1,45E+06												
	2457704,5	-3,18E+08	-3,18E+05	-1,47E+09	-1,47E+06												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

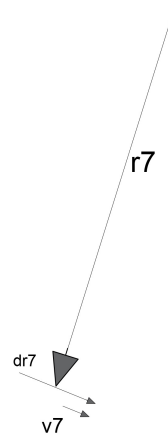


Figura 7: Esboço do vetor 7

- Vetor 8

Tabela 9: Dados para elaboração do vetor 8

t	X(novo)	σXnovo	Y(novo)	σYnovo	r(km)	σr (km)	xdr (km)	σxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	σdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv(km)	
8	2458204,5	7,40E+07	7,40E+04	-1,50E+09	-1,50E+06												
	2458304,5	1,53E+08	1,53E+05	-1,50E+09	-1,50E+06												
	2458404,5	2,31E+08	2,31E+05	-1,49E+09	-1,49E+06	1,51E+09	2,13E+06	3,11E+08	3,92E+05	5,01E+07	2,09E+06	3,15E+08	2,13E+06	9,01	1,45	9,1	0,6
	2458504,5	3,09E+08	3,09E+05	-1,47E+09	-1,47E+06												
	2458604,5	3,85E+08	3,85E+05	-1,45E+09	-1,45E+06												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

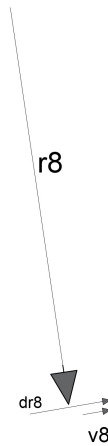


Figura 8: Esboço do vetor 8

- Vetor 9

Tabela 10: Dados para elaboração do vetor 9

t	X(novo)	σXnovo	Y(novo)	σYnovo	r(km)	σr (km)	xdr (km)	σxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	σdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv(km)	
9	2459104,5	7,48E+08	7,48E+05	-1,30E+09	-1,30E+06												
	2459204,5	8,14E+08	8,14E+05	-1,25E+09	-1,25E+06												
	2459304,5	8,78E+08	8,78E+05	-1,21E+09	-1,21E+06	1,49E+09	2,11E+06	2,51E+08	1,25E+06	1,96E+08	1,70E+06	3,18E+08	2,11E+06	7,27	5,66	9,2	0,6
	2459404,5	9,40E+08	9,40E+05	-1,16E+09	-1,16E+06												
	2459504,5	9,99E+08	9,99E+05	-1,10E+09	-1,10E+06												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

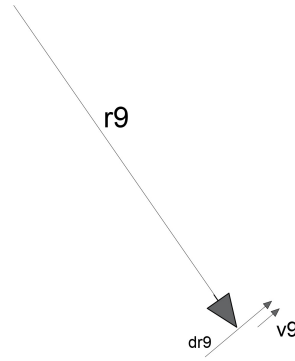


Figura 9: Esboço do vetor 9

- Vetor 10

Tabela 11: Dados para elaboração do vetor 10

t	X(novo)	αX_{novo}	Y(novo)	σY_{novo}	r(km)	σr (km)	xdr (km)	σxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	σdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv (km)
2460004,5	1,24E+09	1,24E+06	-7,83E+08	-7,83E+05	1,46E+09	2,07E+06	1,27E+08	1,85E+06	3,00E+08	9,20E+05	3,25E+08	2,07E+06	3,67	8,67	9,4	0,6
2460104,5	1,28E+09	1,28E+06	-7,11E+08	-7,11E+05												
2460204,5	1,32E+09	1,32E+06	-6,37E+08	-6,37E+05												
2460304,5	1,34E+09	1,34E+06	-5,61E+08	-5,61E+05												
2460404,5	1,37E+09	1,37E+06	-4,83E+08	-4,83E+05												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

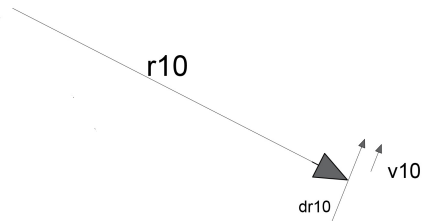


Figura 10: Esboço do vetor 10

- Vetor 11

Tabela 12: Dados para elaboração do vetor 11

t	X(novo)	αX_{novo}	Y(novo)	σY_{novo}	r(km)	σr (km)	xdr (km)	σxdr (km)	ydr (km)	σydr (km)	dr(km)	σdr (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σv (km)
2460904,5	1,43E+09	1,43E+06	-7,56E+07	-7,56E+04	1,42E+09	2,01E+06	-3,99E+07	1,99E+06	3,32E+08	2,67E+05	3,34E+08	2,01E+06	-1,15	9,60	9,7	0,6
2461004,5	1,43E+09	1,43E+06	7,75E+06	7,75E+03												
2461104,5	1,42E+09	1,42E+06	9,10E+07	9,10E+04												
2461204,5	1,41E+09	1,41E+06	1,74E+08	1,74E+05												
2461304,5	1,39E+09	1,39E+06	2,56E+08	2,56E+05												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

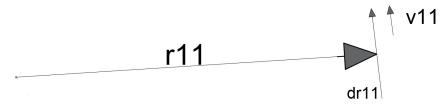


Figura 11: Esboço do vetor 11

- Vetor 12

Tabela 13: Dados para elaboração do vetor 12

t	X(novo)	σ_X (novo)	Y(novo)	σ_Y (novo)	r(km)	σ_r (km)	xdr (km)	σ_{xdr} (km)	ydr (km)	σ_{ydr} (km)	dr(km)	σ_{dr} (km)	xv(km/s)	yv(km/s)	v (km/s)	σ_v (km)
2461804,5	1,23E+09	1,23E+06	6,48E+08	7,21E+05												
2461904,5	1,18E+09	1,18E+06	7,21E+08	7,91E+05												
2462004,5	1,13E+09	1,13E+06	7,91E+08	8,57E+05	1,38E+09	1,95E+06	-2,09E+08	1,60E+06	2,72E+08	1,22E+06	3,43E+08	2,01E+06	-6,04	7,88	9,9	0,6
2462104,5	1,08E+09	1,08E+06	8,57E+08	9,21E+05												
2462204,5	1,02E+09	1,02E+06	9,21E+08	9,81E+05												

Escalas utilizadas

Para dr e r_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 135891187,7 km

Para v_n a escala utilizada foi a seguinte:

↑ 10 km/s

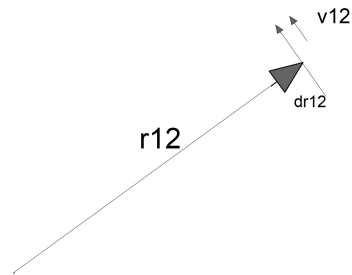


Figura 12: Esboço do vetor 12

Com as posições utilizadas para construir os vetores é possível construir como será a trajetória do planeta nos pontos utilizados:

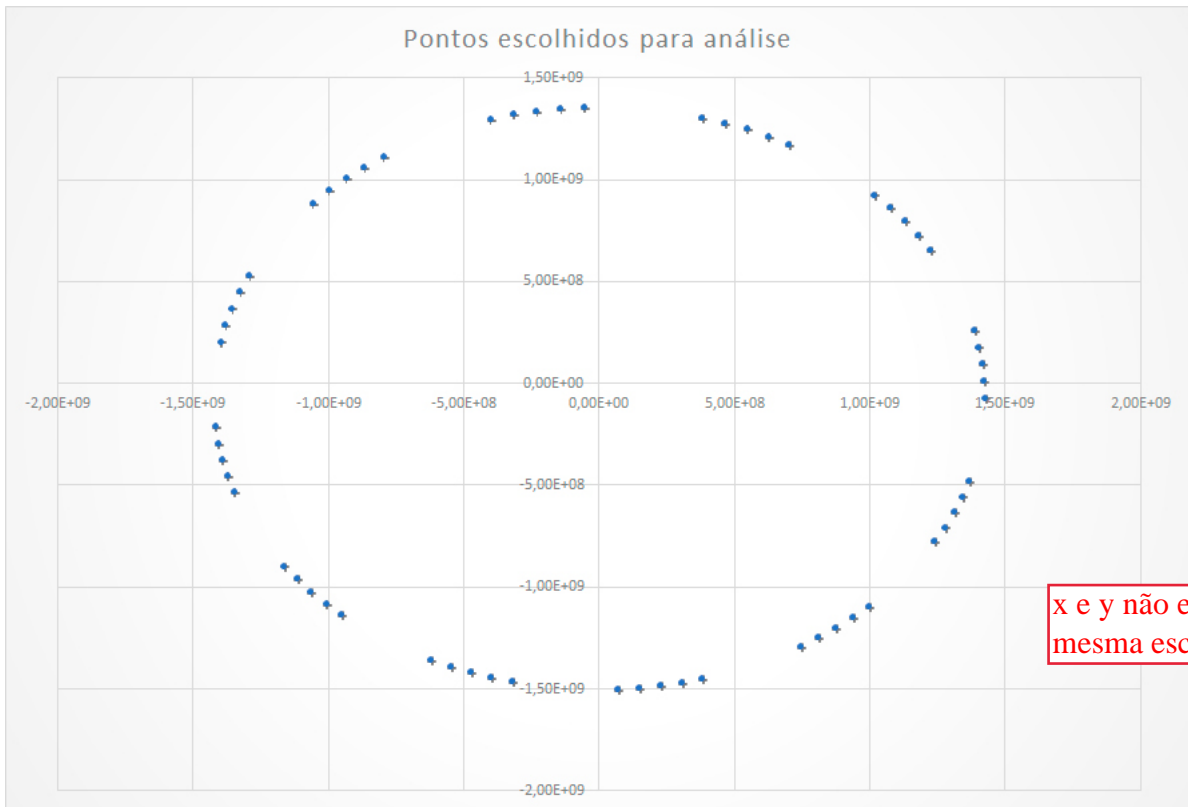


Figura 13: Trajetória do planeta nos pontos utilizados para construir os vetores

E, ao unir todos os vetores em uma imagem só:

aqui estão...

Escalas utilizadas

Para dr e r a escala utilizada foi a seguinte:



Para v a escala utilizada foi a seguinte:

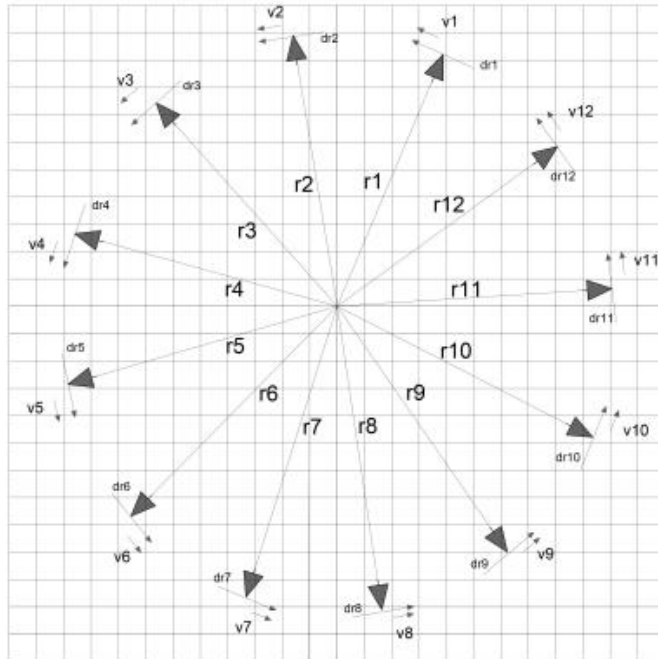


Figura 14: Vetores com origem na origem do sistema de referências

Com isso, pode-se calcular graficamente os ângulos entre os vetores \vec{r} e \vec{v} , que serão utilizados posteriormente no cálculo do momento angular.

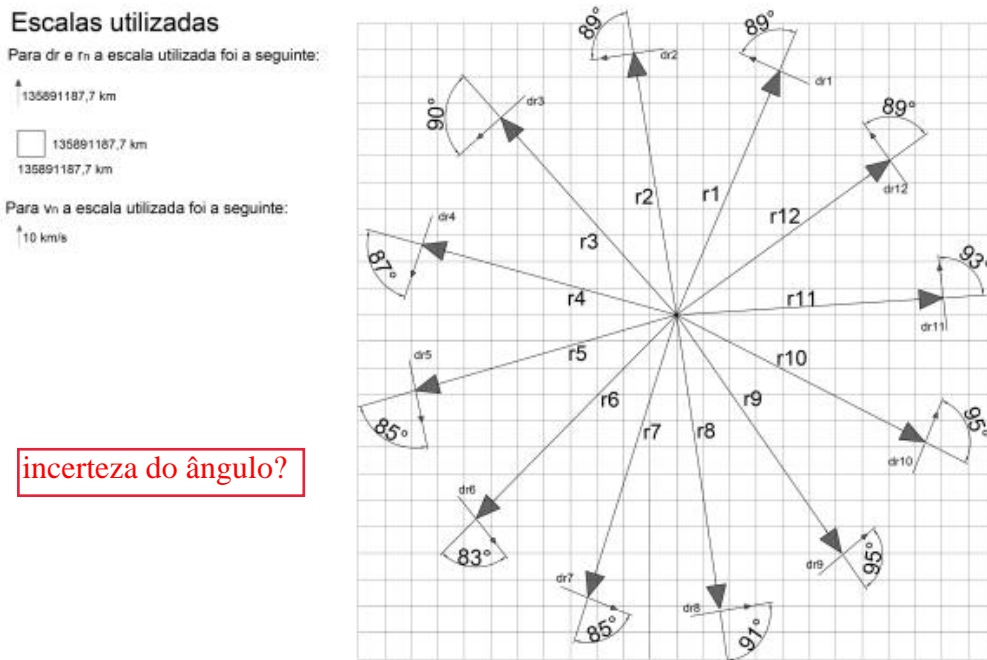


Figura 15: Ângulos entre os vetores \vec{r} e \vec{v}

E ao usar a fórmula (16), foram obtidos os seguintes resultados:

incertezas com 1 sig...

Tabela 14: Resultado dos cálculos realizados

t	r(ua)	σ_r	dr(ua)	σ_{dr}	vel(ua/s)	avel	teta(°)	σ_{teta}	teta(rad)	σ_{teta} (rad)	p (kg m/s)	σ_p	L	σ_L	Ecín	$\sigma_{Ecín}$	Epót	$\sigma_{Epót}$	Etót	$\sigma_{Etót}$
2452104,5	9,0	0,01	2,3	0,01	6,76E-08	4,09E-10	90,5	0,3	1,58	0,01	5,75E+30	3,48E+28	7,81E+42	5,65E+40	2,91E+34	3,52E+32	-5,55E+34	-6,11E+31	-2,6E+34	3,571E+32
2453004,5	9,033	0,01	2,3	0,01	6,79E-08	4,09E-10	89,7	0,3	1,57	0,01	5,77E+30	3,48E+28	7,80E+42	5,39E+40	2,93E+34	3,53E+32	-5,58E+34	-6,18E+31	-2,7E+34	3,586E+32
2453904,5	9,137	0,01	2,318	0,01	6,71E-08	4,09E-10	88,1	0,3	1,54	0,01	5,70E+30	3,48E+28	7,79E+42	5,71E+40	2,86E+34	3,49E+32	-5,52E+34	-6,04E+31	-2,7E+34	3,543E+32
2454804,5	9,359	0,01	2,264	0,01	6,55E-08	4,09E-10	87,7	0,5	1,53	0,01	5,57E+30	3,48E+28	7,79E+42	6,40E+40	2,73E+34	3,41E+32	-5,39E+34	-5,76E+31	-2,7E+34	3,458E+32
2455704,5	9,627	0,01	2,202	0,01	6,37E-08	4,09E-10	86,9	0,6	1,52	0,01	5,42E+30	3,48E+28	7,79E+42	7,22E+40	2,58E+34	3,32E+32	-5,24E+34	-5,44E+31	-2,7E+34	3,361E+32
2456604,5	9,868	0,01	2,149	0,01	6,22E-08	4,09E-10	87,5	0,5	1,53	0,01	5,29E+30	3,48E+28	7,80E+42	6,93E+40	2,46E+34	3,24E+32	-5,11E+34	-5,18E+31	-2,7E+34	3,278E+32
2457504,5	10,025	0,01	2,116	0,01	6,12E-08	4,09E-10	88,8	0,6	1,55	0,01	5,20E+30	3,48E+28	7,80E+42	7,29E+40	2,38E+34	3,19E+32	-5,03E+34	-5,02E+31	-2,6E+34	3,225E+32
2458404,5	10,063	0,01	2,108	0,01	6,10E-08	4,09E-10	90,3	0,3	1,58	0,01	5,19E+30	3,48E+28	7,81E+42	6,07E+40	2,37E+34	3,17E+32	-5,01E+34	-4,98E+31	-2,6E+34	3,213E+32
2459304,5	9,972	0,01	2,128	0,01	6,16E-08	4,09E-10	91,1	0,4	1,59	0,01	5,24E+30	3,48E+28	7,81E+42	6,27E+40	2,41E+34	3,20E+32	-5,06E+34	-5,07E+31	-2,6E+34	3,245E+32
2460204,5	9,767	0,01	2,174	0,01	6,29E-08	4,09E-10	92,2	0,5	1,61	0,01	5,35E+30	3,48E+28	7,81E+42	6,44E+40	2,52E+34	3,27E+32	-5,16E+34	-5,29E+31	-2,6E+34	3,317E+32
2461104,5	9,499	0,01	2,235	0,01	6,47E-08	4,09E-10	92,8	0,5	1,62	0,01	5,50E+30	3,48E+28	7,80E+42	6,62E+40	2,66E+34	3,27E+32	-5,31E+34	-5,59E+31	-2,7E+34	3,411E+32
2462004,5	9,237	0,01	2,294	0,01	6,64E-08	4,09E-10	92,2	0,6	1,61	0,01	5,64E+30	3,48E+28	7,79E+42	6,87E+40	2,80E+34	3,45E+32	-5,46E+34	-5,91E+31	-2,7E+34	3,505E+32

incerteza negativa?

Os dados calculados a partir do ângulo encontrado pela fórmula têm maior precisão, pois com eles a incerteza é menor. E como pode ser notado na tabela acima, o momento angular em função do tempo se conserva, assim como a energia mecânica do sistema. Pode-se perceber certas flutuações nos valores do momento angular e da energia mecânica, que deveriam estar constantes, no entanto, todas as flutuações estão dentro das incertezas propagadas, o que permite dizer que as grandezas foram de fato conservadas. E é possível elaborar um gráfico com as energias para perceber seu caráter oscilatório, enquanto a energia total se mantém constante:

gráfico de L?

cálculo de L com versores?

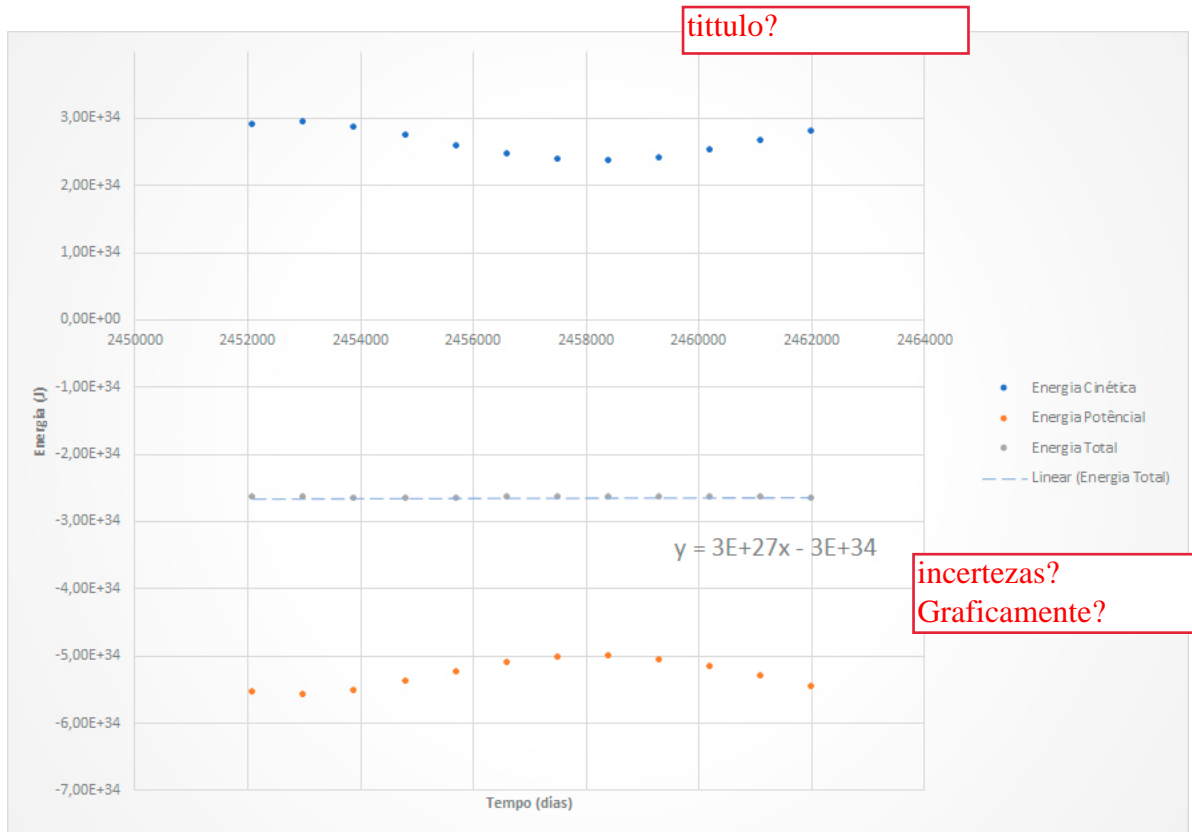


Figura 16: Gráfico das energias em função do tempo tem que usar a incerteza para afirmar....

Por cima dos pontos da energia total, foi ajustada uma reta, onde é notável que seu coeficiente angular ficou na ordem de grandeza de 10^{27} , sendo que a escala está em 10^{34} , bem como seu coeficiente linear, sendo assim, a variação da energia, devido ao coeficiente angular, é ínfima e inferior à incerteza. Portanto, pode-se dizer que, efetivamente, a energia mecânica do sistema foi conservada. É perceptível o caráter oscilatório das energias cinética e potencial, pois quando Saturno está em seu perigeu (mais próximo do Sol), a velocidade do planeta é maior, assim como a energia cinética, enquanto que a energia gravitacional diminui.

Como supracitado, a direção do momento angular é perpendicular às direções do vetor de posição e do vetor momento linear. Essa direção advém do produto vetorial entre o vetor posição e o vetor quantidade de movimento, que tem o mesmo sentido e direção do vetor velocidade, sendo assim, a partir da figura 14 e da regra da mão direita, pode-se dizer que a direção do vetor momento angular é perpendicular ao plano da órbita e está saindo do plano: \odot

5 Discussão final e conclusões

O objetivo principal foi plenamente atingido, assim como as expectativas iniciais, de que o momento angular e a energia mecânica se conservam. A fim de minimizar as incertezas, foi preferível adotar os dados obtidos por meio da fórmula 16, pois, para esse caso, onde os dados apresentam baixa incerteza relativa, a fórmula é bastante confiável, mais que o método gráfico, que apresenta incerteza de meio grau. Os resultados obtidos e analisados são sólidos e fisicamente corretos. Portanto, o experimento conclui a conservação do momento angular e da energia mecânica para Saturno, assim pode-se dizer que, a curto prazo, a órbita de Saturno é estável.

comparação entre
alunos?

6 Referências bibliográficas

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., & SANDS, M. (2008). Lições de Física–Vol. 1. Tradução de Adriana VR da Silva e Kaline R. Coutinho. Porto Alegre: Bookman.

NUSSENZVEIG, H. M. , Curso de Física básica-Vol. 1.

Vuolo J. H. - Fundamentos da teoria de erros, Notas de estudo de Física.

Os dados das massas dos corpos celestes, bem como a excentricidade da órbita de Saturno foram obtidos no Wikipedia.