

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

4,3



Experimento 5: Forças centrais

Kaue de Sotti Silva

Matheus Dante Gonçalves

São Paulo

2020

Resumo

As forças centrais estão sempre presentes em nossas vidas, seja na simples queda de um objeto ou no movimento orbital de um planeta. Neste experimento, o objetivo é observar a ação de forças centrais no planeta Júpiter e estudar a conservação do momento angular e da energia mecânica do sistema, do ponto de vista das leis de conservação de movimento.

em relação a ?

Considerações teóricas

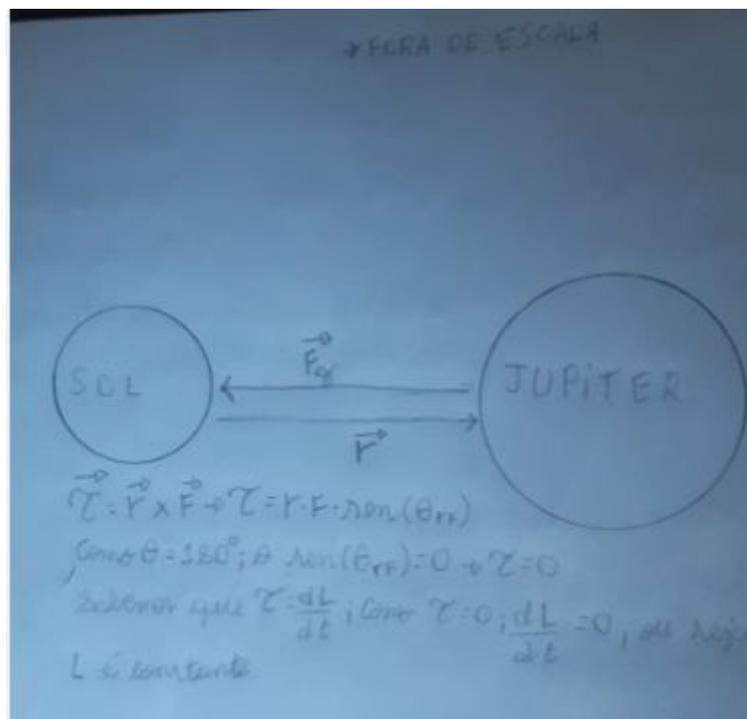
eq um pouco longe...

Para realizar o estudo é preciso primeiro conhecer as duas grandezas envolvidas nele. Podemos definir a energia mecânica, a partir da equação (1) como sendo: a energia total do corpo que neste caso relaciona a energia do movimento do mesmo com a energia associada a sua posição no sistema e podemos definir, a partir da equação (2) que o momento angular está relacionado ao grau de rotação em um eixo fixo, no caso o sol, do corpo estudado.

ponto?

Ao analisar o diagrama de corpo livre de Júpiter em relação ao Sol, percebe-se que a única força atuante no sistema é a força gravitacional entre ambos os corpos. Com isto, conclui-se que a força resultante do sistema não é nula e o momento linear varia ao longo do trajeto.

sistema ou Júpiter?



Esquema 1: Porque o Momento Angular é constante.

No entanto, o momento angular se conserva, uma vez que neste caso, podemos escrever o torque de um corpo, como $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, uma vez que o vetor posição é paralelo a força exercida, fazendo com que seja igual a 0. Podemos escrever o Torque de uma outra forma, $\tau = \frac{dL}{dt}$, ou seja a derivada do momento angular em relação ao tempo. Para o torque ser igual a zero, o momento angular do corpo tem que ser constante.

Podemos escrever a energia mecânica do planeta como :

$$E_{total} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{m_1 v^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (1)$$

Sendo m_1 a massa do planeta Júpiter, m_2 a massa do Sol, v a velocidade de Júpiter, r a distância entre o planeta e o Sol e G , a constante gravitacional.

O momento angular do planeta é dado por:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = p(r \sin \theta_{rp}) \quad (2)$$

supondo o Sol parado...

Sendo p , o momento linear do planeta e θ_{rp} o ângulo entre o vetor posição e o vetor momento linear do planeta.

O ângulo θ foi obtido por meio da equação (3), que é extraída da definição de produto escalar entre dois vetores:

$$\theta = \arccos(\theta) = \frac{xv_x + yv_y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad (3)$$

era para medir e depois checar com essa conta...

Sendo x e y a posição do planeta em determinado tempo e v_x e v_y suas respectivas velocidades.

As coordenadas x e y são projeções em duas dimensões dos dados obtidos pela NASA, sendo usado para isso as equações:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad x_{\text{proj}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y_{\text{proj}} = \frac{ry}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4)$$

porque teve que fazer projeções se já tinha os dados x e y ?

Arranjo experimental

Para a realização do experimento, usamos como ferramenta o programa Solar System Dynamics Group, disponibilizado na página da Nasa (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top>). Utilizando este programa, obtivemos as posições do planeta Júpiter em relação ao Sol no intervalo de um período orbital

completo, assim, foi possível obter os dados necessários para a realização dos cálculos e estudar os objetivos do experimento.

Resultados obtidos

qual plano?:

Ao obter as posição em x, y e z de Júpiter em relação ao Sol, fizemos a projeção dos eixos x e y em um plano, utilizando a equação (4), de modo a descrever a órbita do planeta, cujo movimento está descrito abaixo. Para calcular a incerteza das posições foi utilizado a equação (5), considerando (4) como $f(x)$.

$$x^+ = \frac{f(+inc)}{f(-inc)} ; x^- = \frac{f(-inc)}{f(+inc)} \text{ e } \sigma_{x_{proj}} = \frac{x^+ - x^-}{2} \quad (5)$$



eixos x e y não estão com a mesma calibração...

Gráfico 1: A órbita de Júpiter ao redor do sol

A coordenada do planeta em z é utilizada na projeção de x e y para a construção do gráfico, pois para analisar a órbita do planeta é mais prático a utilização de um plano em duas dimensões.

Com as posições do planeta em mãos, podemos calcular o módulo do vetor posição do planeta em diferentes intervalos de tempo. Levando em conta que a velocidade média corresponde a velocidade instantânea no instante médio do intervalo, resolvemos analisar o vetor posição dos instantes centrais de cada 5 dados seguidos e para ter a velocidade instantânea deste ponto central, calculamos o deslocamento entre o quinto e a primeira posição que temos de cada sub grupo

que criamos, ou seja, tínhamos 75 dados, de modo que obtivemos 15 vetores deslocamento. Segue os vetores posição e deslocamento para um determinado tempo abaixo:

Tabela 1: Vetores posição e deslocamento de júpiter em cada instante central de tempo

tempo (s)	r (m)	inc r (m)	D r (m)	inc Dr
13996800	7800E+08	8E+08	240E+09	1E+09
37324800	7600E+08	6E+08	2500E+08	9E+08
60652800	7500E+08	6E+08	2500E+08	8E+08
83980800	7400E+08	7E+08	250E+09	1E+09
107308800	7400E+08	7E+08	260E+09	1E+09
130636800	7400E+08	5E+08	2500E+08	8E+08
153964800	7500E+08	6E+08	2500E+08	9E+08
177292800	7700E+08	8E+08	250E+09	1E+09
200620800	7000E+08	7E+08	240E+09	1E+09
223948800	8000E+08	6E+08	2400E+08	8E+08
247276800	8100E+08	7E+08	230E+09	1E+09
270604800	8100E+08	8E+08	230E+09	1E+09
293932800	8200E+08	8E+08	230E+09	1E+09
317260800	8100E+08	6E+08	2300E+08	9E+08
340588800	8100E+08	6E+08	2400E+08	9E+08

muito improvável que todos os seus cálculos terminem em 00...

onde estão os dados que geraram esses valores?

qual foi o passo em tempo usado?

Considerando a incerteza relativa como 0,001; a incerteza de r é dada por: $\sigma_{rel} * \text{RAIZ}(x^2 + y^2)/r$ e a incerteza de Dr é dada por

$$\text{RAIZ}(r_f^2 + r_i^2)$$

Com os valores de deslocamento obtidos, podemos calcular a velocidade do planeta para o instante central. Os valores da velocidade e às suas devidas incertezas estão expressos na tabela 2:

Tabela 2: Velocidade do corpo em relação ao tempo central

tempo (s)	vel (m/s)	inc vel
13996800	1300E+01	4E+01
37324800	1300E+01	3E+01
60652800	1400E+01	3E+01
83980800	1400E+01	4E+01
107308800	1400E+01	4E+01
130636800	1400E+01	3E+01
153964800	1300E+01	3E+01

coerente

177292800	1300E+01	4,E+01
200620800	1300E+01	4E+01
223948800	1300E+01	3E+01
247276800	1300E+01	4E+01
270604800	1200E+01	4E+01
293932800	1200E+01	4E+01
317260800	1200E+01	3E+01
340588800	1300E+01	3E+01

A incerteza da velocidade é dada por $V * \text{RAIZ} ((\text{inc } Dr / Dr)^2)$. Por conta da incerteza do tempo ser praticamente nula, ela é desconsiderada na propagação de incerteza.

Por meio da equação (3), podemos calcular o ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade de modo que espera-se que sejam ortogonais. Segue os ângulos obtidos para cada par vetor posição-velocidade.

Tabela 3: Valor de Teta para cada par vetor Posição-Velocidade.

Teta (rad)	Teta (°)
1,62	93
1,62	93
1,61	92
1,59	91
1,57	90
1,55	89
1,53	88
1,52	87
1,52	87
1,53	87
1,54	88
1,55	89
1,57	90
1,59	91
1,61	92

essa era a segunda parte

Considerando este ângulo como um valor teórico, não é atribuído nenhuma incerteza a ele.

A Partir da equação (2) e sabendo que p (momento linear) é o produto da massa e a velocidade, calculamos o momento angular para cada posição central, cujo resultado obtido é:

Tabela 4: Valor do momento angular para cada instante central.

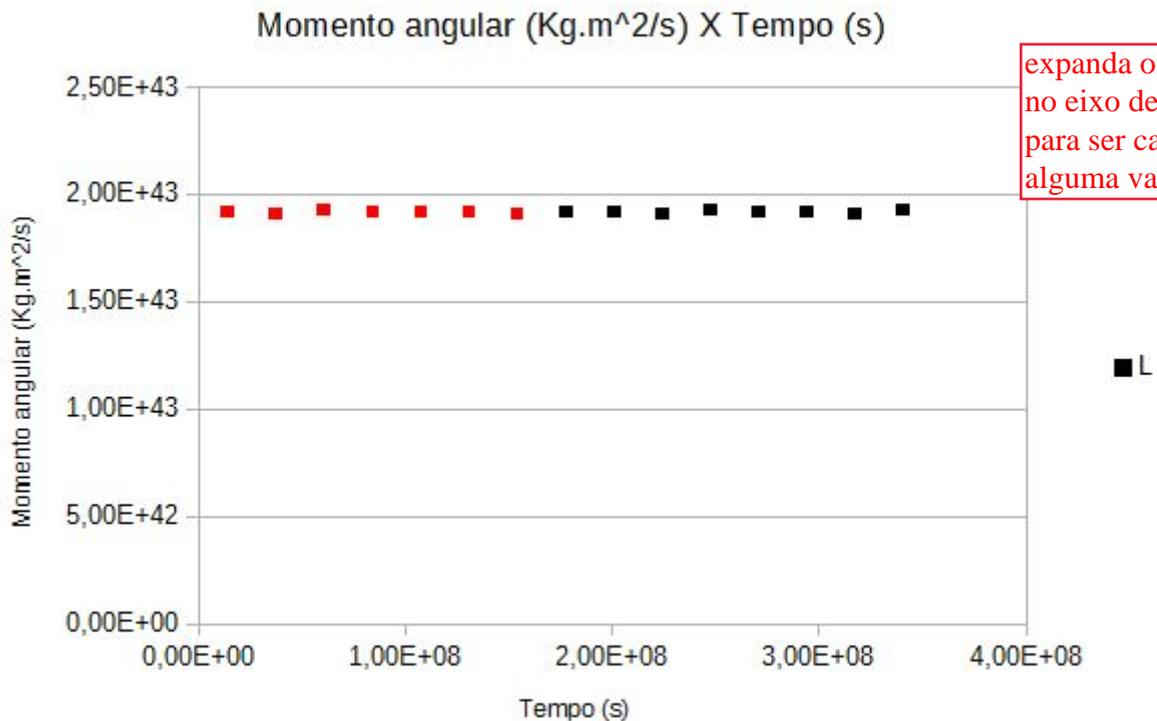
L
1,92E+43
1,91E+43
1,93E+43
1,92E+43
1,92E+43
1,92E+43
1,91E+43
1,92E+43
1,92E+43
1,91E+43
1,93E+43
1,92E+43
1,92E+43
1,91E+43
1,93E+43

unidade?

incerteza?

Como o momento angular também é considerado uma grandeza teórica, não é possível atribuir uma incerteza a ela. Com isto não foi possível realizar um teste de MQ para averiguar a sua constância em função do tempo uma vez que o tempo também não possui incerteza.

Gráfico 2: Momento angular em função do tempo



expanda os valores no eixo de momento, para ser capaz de ver alguma variação...

coeficientes?

legenda fica próxima
ao gráfico...

O objetivo do gráfico é mostrar a constância do momento angular ao decorrer do tempo. Sendo que os pontos laranja e preto distinguem as medidas e tratamento de dados feito por alunos diferentes. O resultado obtido está no sistema internacional de medidas.

Para calcular a energia mecânica do sistema utilizando a equação (1), calculamos a energia cinética e a potencial, cujo resultado obtido foi:

Tabela 5: Energias cinética, potencial e mecânica (total) e suas respectivas incertezas.

Ecín	inc Ecín	Epot	inc Epot	Etot	inc Etot
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
100E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
100E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
100E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44
200E+33	1E+33	-300E+44	2E+44	-300E+44	2E+44

de novo???

Todos os valores obtidos estão no sistema internacional de medidas. A incerteza da energia cinética foi calculada como $E_{cin} * \text{RAIZ}((\text{inc } m / m)^2 + (2 * \text{inc } v / v)^2)$. A incerteza da energia potencial foi calculada como $E_{pot} * \text{RAIZ}((\text{inc } mp / mp)^2 + (\text{inc } msol / msol)^2 + (\text{inc } r / r)^2)$ e a incerteza da energia mecânica foi calculada como $\text{RAIZ}(\text{inc } E_{cin}^2 + \text{inc } E_{pot}^2)$.

Gráfico 3: Energia mecânica e reta ajustada X Tempo (SI)

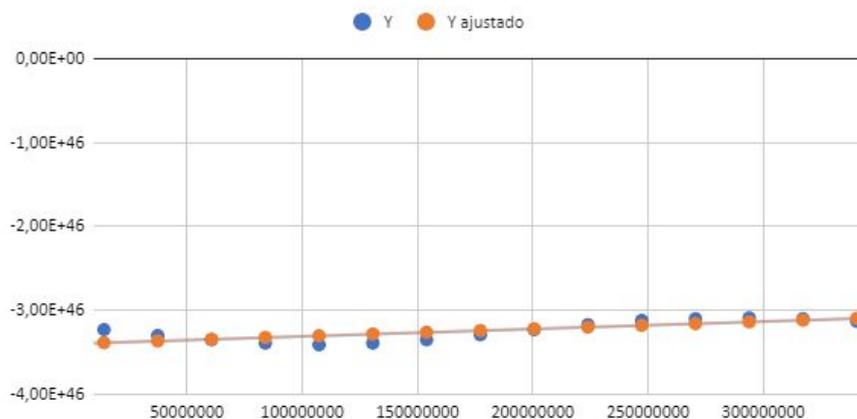


gráfico era para ter as
3 energias....

coeficientes?

Gráfico 4: Resíduo Absoluto X tempo (s)

Res abs versus T (s)

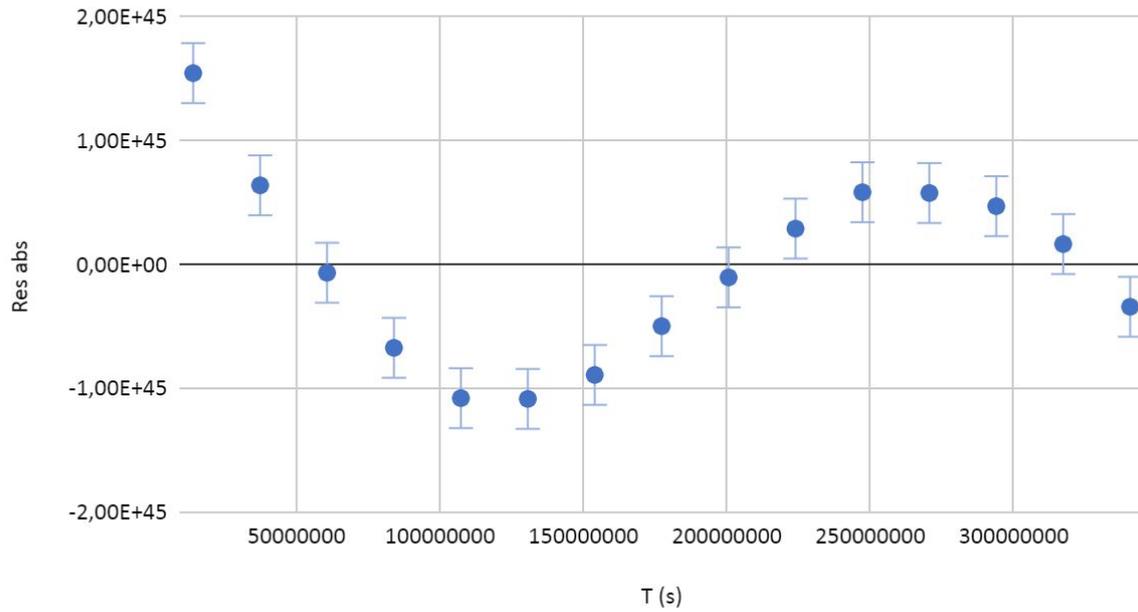


Gráfico 5: Resíduo Relativo X Tempo (s)

Res Rel versus T (s)

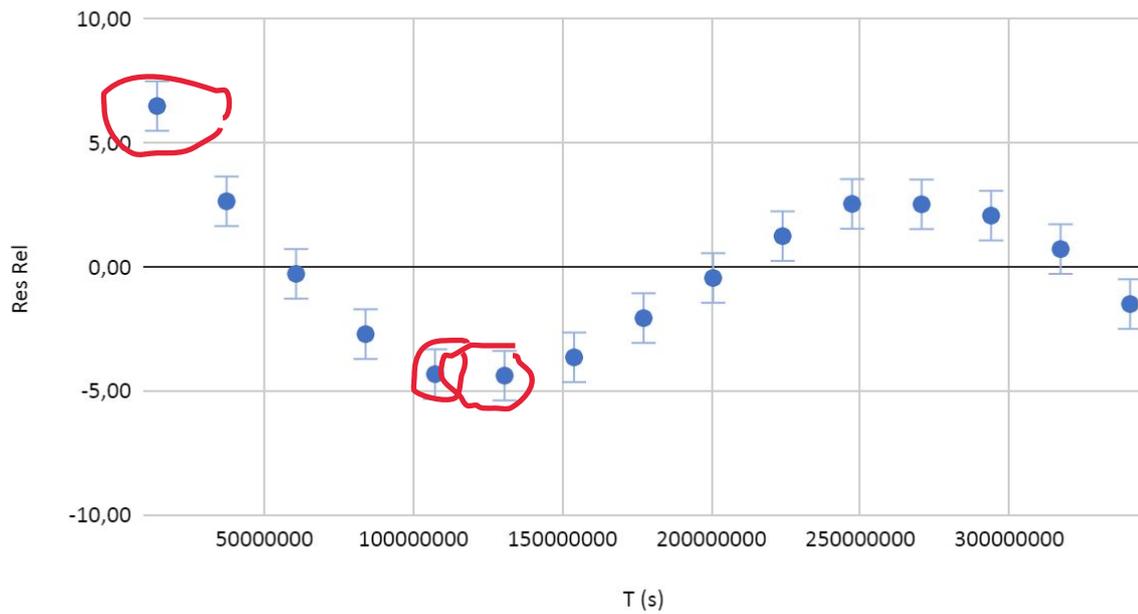
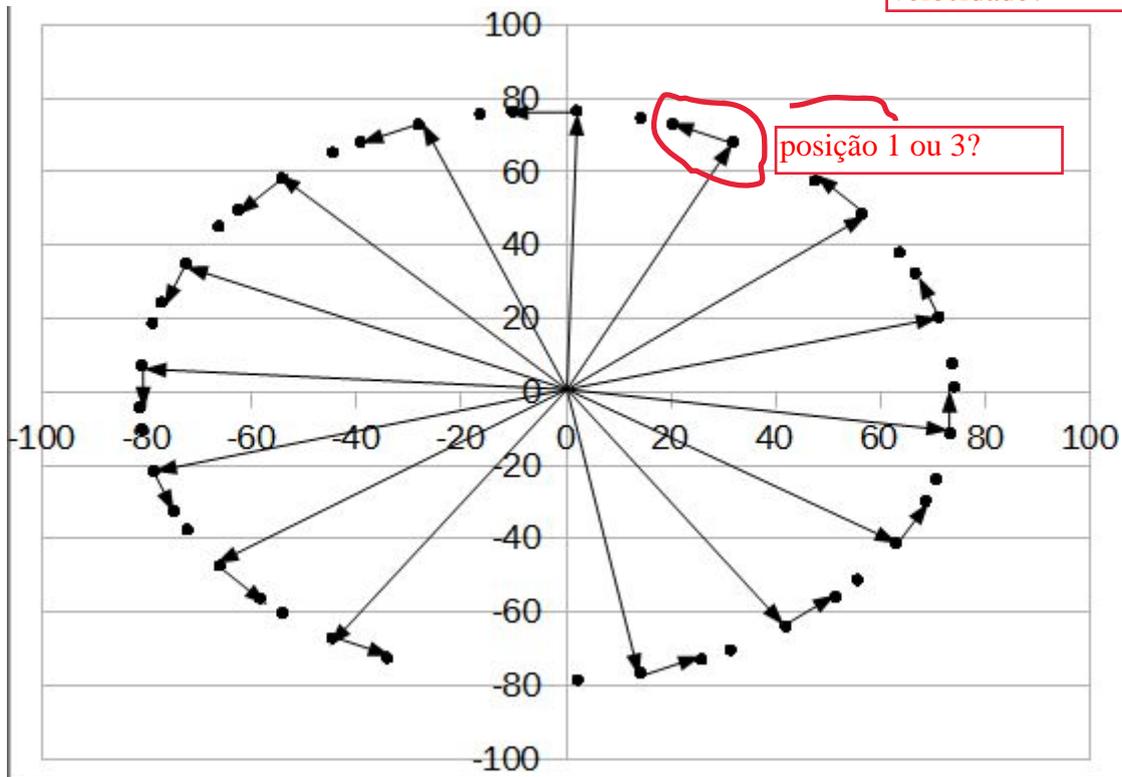


Gráfico 6: Vetores Posição e Velocidade do Planeta

calibração para vetores posição e velocidade?



Discussão

basta olhar o desenho da órbita...

Analisando a tabela (1) podemos constatar que o vetor posição do planeta não possui módulo constante, portanto mesmo que seja pequena a diferença, podemos dizer que o movimento orbital feito por Júpiter é elíptico. Outro fato importante a ressaltar é que a resultante das forças externas não é nula e portanto o momento linear não se conserva, no entanto, uma vez que o momento linear é massa vezes a velocidade e a massa do planeta é constante, temos que a velocidade do mesmo não é constante e como velocidade é deslocamento por variação de tempo e a variação de tempo é o mesmo para cada instante centrado, concluímos que o vetor deslocamento não é constante e varia de acordo com a posição orbital.

a órbita é fechada...
O vetor velocidade muda o tempo todo....

A partir da tabela (3), podemos notar que o ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade é próximo de 90° , variando entre 3° para cima e para baixo, mesmo com essa pequena variação, com isso, dizemos que a velocidade é tangencial a posição, sendo um dos principais fatores para o planeta orbitar o sol.

o que tem a ver?

Ao ver e analisar a tabela (5), concluímos que uma vez que o momento linear não se conserva e por consequência sua velocidade não é constante, a energia cinética também não será, como é observado. Assim como a energia potencial também não é constante uma vez que depende do vetor posição que varia conforme o tempo e temos a energia mecânica que no entanto se conserva, uma vez que a energia total de um sistema nunca se perde.

como prova isso experimentalmente?

Conclusão

Uma vez que observado como o módulo do vetor posição do planeta varia com o passar do tempo e o vetor deslocamento reafirma esta colocação visto que não é constante, podemos afirmar que a órbita de júpiter é elíptica, conforme o esperado.

pq é importante?

Observando a tabela (4) e o gráfico (2), podemos notar que o momento angular é praticamente constante como era esperado, levando em conta as considerações teóricas. No entanto, não é possível investigar a constância por meio MMQ ~~uma vez que trata-se de um valor teórico e não possui incerteza~~

como prova?

Uma vez que o módulo do vetor deslocamento não é constante e o intervalo de tempo é o mesmo para cada velocidade calculada, era o esperado que o módulo da velocidade não seja constante e por consequência o momento angular também não e na prática, de fato, os módulos dos vetores não são constante.

Por fim e como esperado, a energia mecânica do sistema é conservada. Mesmo que a energia cinética e potencial não se conserve, elas somadas permanecem constantes durante todo o intervalo de tempo necessário para realizar um período orbital.