



Márcio Martins Jacob Gustavo de Lima Ribeiro

10801127

11223865

Laboratório de Mecânica

Nemitala Added

5,7

# Síntese sobre o rolamento

Marcio Martins Jacob

Gustavo de Lima Ribeiro

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resumo da Síntese</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introdução ao experimento</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Descrição experimental</b>	<b>3</b>
3.1	Arranjo experimental . . . . .	3
3.2	Métodos experimentais . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Resultados de medições e cálculos</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Análise dos dados obtidos</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Discussão final e conclusões</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>11</b>

# 1 Resumo da Síntese

Cilindros de diferentes materiais e distribuições de massa rolam por um plano inclinado, a partir do tempo de queda, foi avaliado se a distribuição de massa dos cilindros analisados coincidia com o esperado e se possíveis irregularidades na mesa, na qual o plano está apoiado, afetam os resultados experimentais.

## 2 Introdução ao experimento

O experimento consiste em um cilindro que rola por um plano inclinado sem deslizar. Considera-se que o cilindro está em rotação em torno de um eixo fixo que passa por seu centro de massa. Por meio de sucessivas realizações do experimento com corpos com diferentes distribuições de massa, o objetivo principal do experimento é encontrar a relação entre o ~~momento de inércia dos~~ corpos utilizados com o tempo que demora para percorrer dada distância no plano inclinado.

## 3 Descrição experimental

inverte as frases...  
Ligagem direta é  
sempre melhor...

### 3.1 Arranjo experimental

Para a realização do experimento, foram utilizados:

- Um cilindro de alumínio maciço, um cilindro de latão maciço, um cilindro de latão oco. mesmas dimensões?
- Um plano de  $1,20 \pm 0,01$  metros de comprimento para os cilindros rolarem.
- Um calço para inclinar o plano de  $0,0386 \pm 0,0001$  metros. colocado aonde?
- Uma câmera para o registro fotográfico dos movimentos dos cilindros. video?
- Um cronômetro, com incerteza instrumental de ~~0,005~~ segundos, porém a ativação do cronômetro depende do tempo de reação do experimentador, que foi estimada em 0,2 segundos. Com isso, a incerteza total do instrumento é de 0,2 segundos. melhor deixar para a incerteza estatística
- Um paquímetro para medir o tamanho do calço.
- Uma trena para medir o comprimento do plano.

- Uma balança para medir as massas dos cilindros utilizados, cuja incerteza é de 0,0001 kg.

### 3.2 Métodos experimentais

A realização do experimento é iniciada ao analisar os vídeos gravados e coletar 10 medidas do tempo gasto ao se percorrer 1 metro do plano para cada cilindro, a partir dos tempos encontrados, calcula-se o tempo médio e a incerteza da média:

$$t_{\text{medio}} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{\text{medio}})^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

essas equações  
poderiam estar na  
análise de dados

Esse procedimento foi realizado com a tábua virada para uma ponta da mesa e depois para a outra, a fim de reduzir a influência das possíveis irregularidades da mesa nos dados coletados. Depois disso, foi calculado os momentos de inércia dos corpos, sendo que, para um cilindro em função de sua massa ( $m$ ) e seu raio ( $R$ ):

$$I = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} \quad (1)$$

Sendo o raio interno ( $r$ ), nulo para o cilindro maciço e  $\approx R$  para a casca cilíndrica. Utilizando as seguintes equações da dinâmica para o cilindro no plano inclinado:

$$\tau = I \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad \text{qual força aplicava o torque?} \quad (2)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \text{sen}(\alpha) - F_a \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\psi}{dt} \quad (4)$$

Utilizando-se das fórmulas (1) a (4), obtém-se uma expressão simplificada para o movimento de translação do cilindro:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g \text{sen} \alpha}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}} \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g \text{sen} \alpha}{K} \quad (6)$$

Onde  $K$  é um parâmetro adimensional, que será encontrado por meio dos dados coletados, e os resultados esperados são de  $K = 3/2$  para o cilindro maciço e  $K = 2$  para o cilindro oco. Pode-se encontrar o tempo de queda do cilindro em função das equações desenvolvidas acima:

$$t = \sqrt{\frac{2Kx}{g\text{sen}\alpha}} \quad (7)$$

que tempo?

Sendo o deslocamento no plano ( $x$ ), o torque ( $\tau$ ), a aceleração gravitacional ( $g$ ), o tempo ( $t$ ), a inclinação do plano ( $\alpha$ ), a posição angular ( $\psi$ ), o raio interno da casca esférica ( $r$ ), o raio externo da casca esférica ou o raio total do cilindro maciço ( $R$ ) e a força de atrito entre o cilindro e o plano ( $F_a$ ). O cilindro não desliza sobre o plano, portanto, por estar em rolamento puro,  ~~$F_a = 0$~~ .

Após os dados serem coletados, o valor de  $K$  será encontrado numericamente por meio da equação (6). E o tempo de queda pode ser encontrado por meio da fórmula (7), ao se utilizar  $\beta$  como a variação na inclinação do plano por conta das irregularidades da mesa. A partir da equação (6), incluída na fórmula da cinemática:

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2}$$

Com  $x_o = 0$  e  $v_o = 0$  temos:

$$x = \frac{gt^2\text{sen}\alpha}{2K}$$

Sendo  $t_1$  o tempo de queda para o plano virado para a direita, e  $t_2$  para a esquerda, e ao considerar as constantes da equação ( $x, g, K$ ) podemos simplificar para:

$$c = \frac{2Kx}{g}$$

Com isso, é possível elaborar o sistema de equações:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{c}{t^2}$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{c}{t_1^2}$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{c}{t_2^2}$$

Da trigonometria:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Assim, ao somar a segunda equação do sistema com a terceira:

$$2\text{sen}\alpha \cos\beta = \frac{c(t_1^2 + t_2^2)}{t_1^2 \cdot t_2^2}$$

Ao aproximarmos o desnível causado pela mesa para um valor nulo,  $\beta \approx 0$ :

$$\cos\beta = \cos 0 = 1$$

Com isso, tem-se que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{c(t_1^2 + t_2^2)}{2t_1^2 \cdot t_2^2}$$

Ao substituir a primeira equação do sistema na equação acima:

$$\frac{c}{t^2} = \frac{c(t_1^2 + t_2^2)}{2t_1^2 \cdot t_2^2}$$

$$t^2 = \frac{2t_1^2 \cdot t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2t_1^2 \cdot t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}}$$

Então, pode-se propagar a incerteza dessa fórmula, que é feita por derivadas parciais, sabendo-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{\frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\sqrt{2}xy^4}{\sqrt{x^2y^2(x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{\frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\sqrt{2}x^4y}{\sqrt{x^2y^2(x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Tem-se que o resultado final da incerteza da fórmula ( $\sigma_t$ ) do tempo médio entre os tempos de queda de cada lado da mesa é:

$$\sigma_t = \sqrt{\left( \frac{x^3\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_y \right)^2 + \left( \frac{y^3\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_x \right)^2}$$

não combina...  
Falta um fator 2  
dentro da raiz

Após isso, será medido o tempo para de queda para distâncias menores (40cm, 60cm, 80cm e 100cm) e apenas para os cilindros de latão, o oco e o maciço. Repetindo 10 vezes para cada distância, com isso, será calculado o tempo médio e a incerteza da média. E

ponto

vc misturam procedimento experimental com procedimento de análise...

depois, o quadrado do tempo médio e sua incerteza, que é propagada a partir da incerteza da média por:

$$\sigma_{t_{\text{quadrado}}} = 4(\sigma_{t_{\text{médio}}})^2$$

A partir do valor de  $t^2$  encontrado, faz-se um ajuste de reta com os valores encontrados e com o auxílio do método dos mínimos quadrados, assim, pode-se encontrar o valor de  $K$  ao encontrar a inclinação da reta ajustada.

Após isso, dadas as duas maneiras de encontrar os valores de  $K$ , a primeira, numericamente, tem sua incerteza, que foi propagada por derivadas parciais, é calculada por:

$$\sigma_K = tg \cdot \text{sen}\alpha \sigma_{t_{\text{quadrado}}}$$

cade o x e incerteza?

Já para o segundo método de encontrar  $K$ , por meio do ajuste de reta, que será do tipo  $y = ax + b$ , com isso, a incerteza do método utilizado é:

$$\sigma_{K_2} = g \text{sen}\alpha \frac{\sigma_a}{2}$$

só é assim porque vc inverteu os eixos...

## 4 Resultados de medições e cálculos

	massa	inc m	Diâm	inc D	l	inc l
Al maciço	0,2657	0,0001	0,05	0,0005	0,000083	0,000003
Latão oco	0,2651	0,0001	0,05	0,0005	0,000166	0,000002
Latão maciço	0,8298	0,0001	0,05	0,0005	0,00026	0,00001

Figura 1: Dados dos cilindros utilizados

unidades?

Direito		
	t2 médio	inc t2
Al maciço	3,26	0,23
Latão oco	3,53	0,25
Latão maciço	3,19	0,24

dados que mediu?

Figura 2: Tabela do deslocamento para o lado direito

Esquerdo		
	t1 médio	inc t1
Al maciço	3,32	0,22
Latão oco	3,17	0,22
Latão maciço	3,53	0,21

inc com 1 significativo

Figura 3: Tabela do deslocamento para o lado esquerdo

Tempo médio	t	inc t
Al maciço	3,29	0,27
Latão oco	3,34	0,22
Latão maciço	3,35	0,22

Figura 4: Tempo médio dos deslocamentos

unidades?

	Distância + inc	t médio	inc t	t <sup>2</sup>	inc t <sup>2</sup>
Latão Oco	40+0,5	2,29	0,23	5,226	0,2116
	60+0,5	2,77	0,21	7,678	0,1764
	80+0,5	3,07	0,25	9,44	0,25
	100+0,5	3,35	0,27	11,19	0,2916

Figura 5: Dados coletados para o cilindro oco de latão

	Distância + inc	t médio	inc t	t <sup>2</sup>	inc t <sup>2</sup>
Latão Maciço	40+0,5	2,05	0,22	4,194	0,1936
	60+0,5	2,47	0,22	6,101	0,1936
	80+0,5	2,81	0,27	7,91	0,2916
	100+0,5	3,13	0,24	9,8	0,2304

Figura 6: Dados coletados para o cilindro maciço de latão

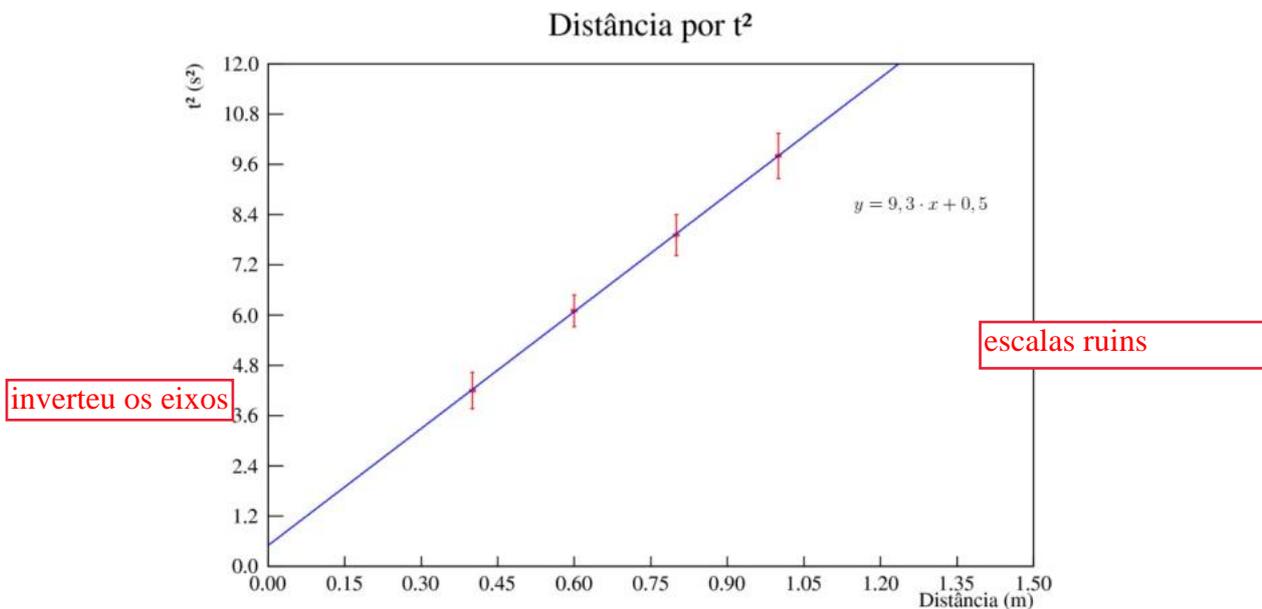
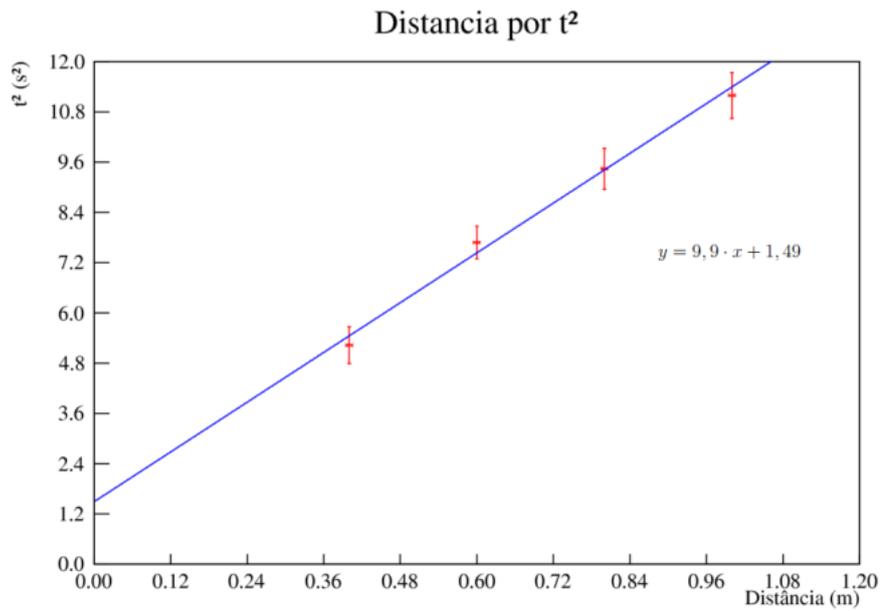


Figura 7: Gráfico de distância por tempo ao quadrado para o cilindro de latão maciço



de novo...

Figura 8: Gráfico de distância por tempo ao quadrado para o cilindro de latão oco

K	Al maciço	1,7	0,2
	Latão oco	1,7	0,2
	Latão maciço	1,8	0,2

Figura 9: Tabela dos valores numéricos de K

latão oco		latão maciço	
a	b	a	b
9,9	1,48	9,3	0,5
$\sigma a$	$\sigma b$	$\sigma a$	$\sigma b$
0,6	0,38	0,5	0,3

gráficos e ajustes na mão?

Figura 10: Tabela dos valores da reta ajustada

Latão Maciço		
K	1,46	0,09
xo	0,1	
Latão Oco		
K	1,56	0,08
xo	0,15	

Figura 11: Tabela dos valores de K encontrados por MMQ

## 5 Análise dos dados obtidos

Isso aqui é discussão...

Como pode ser visto na figura 9, os valores obtidos de  $K$  estão no intervalo esperado (entre 1,5 e 2), porém tanto no primeiro método, onde  $K$  foi obtido numericamente a partir do tempos médios para que cada cilindro percorresse a distância de um metro, quanto no segundo método, onde  $K$  foi obtido a partir de um ajuste de reta e seus resultados estão na figura 11, não há diferença significativa entre os valores de  $K$  encontrados. Assim, não há como diferenciar plenamente o cilindro de latão maciço do oco, pois como visto na fórmula (1), a medida do raio interno conta para o valor de  $K$ . Assim, os dados mostram que o cilindro oco não é uma casca cilíndrica ideal, onde  $r \approx R$ .

Com seus resultados, poderia ser...

É importante notar, também, que a incerteza da distância percorrida no plano não influi no experimento, pois a distância é calculada ~~com a precisão do equipamento utilizado (trena)~~. Assim, a distância é fixa e estamos calculando o tempo gasto para o cilindro percorrer cada distância previamente medida pelo experimentador, assim, a incerteza vem no tempo, onde conta o acionamento do instrumento e o tempo de reação do experimentador. ~~Para esse efeito, a incerteza da distância é negligenciada.~~

## 6 Discussão final e conclusões

usou incerteza instr muito gds

O objetivo de relacionar a distribuição de massa entre os cilindros utilizados no experimento não foi atingida. No primeiro método podemos ver que os tempos médios para que os cilindros percorressem a distância de 1 metro são todos compatíveis em 1 sigma, ou seja praticamente não houve uma distinção entre os valores de  $K$  e, portanto, não foi possível relacionar os tempos de queda com a distribuição de massa de cada corpo utilizado. Já no segundo método os valores de  $K$ , retirados da reta ajustada aos dados por MMQ, foram compatíveis em 2 sigmas, ou seja, tivemos uma distinção maior entre os valores, porém os valores ainda são muito próximos e portanto não houve como diferencia-los relacionando com a distribuição de massa. Ademais o experimento foi realizado a partir de filmes, nos quais a determinação do tempo decorrido para que o cilindro passasse pelo ponto escolhido foi relativamente difícil, uma vez que não havia como determinar de fato o momento em que o cilindro chegava ao ponto analisado, assim afetando a leitura do tempo para esse trajeto. Assim, uma sugestão para aperfeiçoar o experimento, seria gravar quadros específicos do movimento dos cilindros, com uma malha no fundo, para medir a posição em função do instante gravado na foto.

análise dos coeficientes?

incertezas gdes?

## 7 Referências bibliográficas

Vuolo J. H. - Fundamentos da teoria de erros, Notas de estudo de Física.