

## Síntese Experimento 3 - Rolamento

6,4

Breno Pagotto Aguiar - nº USP: 11298553

Iago Santos Alves - nº USP: 11223701

**Turma 1 - Grupo 1**

### Descrição Experimental:

O experimento compreende o estudo do rolamento sem escorregamento de objetos em um plano inclinado. Foram utilizados três cilindros pequenos: um de alumínio maciço, um de latão oco e outro de latão maciço. Ademais, foi utilizada uma prancha que pudesse ser elevada através de calços de madeira.

O arranjo do experimento foi feito tal que o cilindro rolasse pela prancha inclinada com um certo ângulo  $\alpha$ . Logo, serão tratados duas distâncias: a distância percorrida pelo corpo e o comprimento total da prancha. A primeira corresponde à  $1,00 \pm 0,005$  metro (posteriormente foi medido o tempo para outros valores dessa distância) e, a segunda corresponde à  $1,20 \pm 0,01$  metro.

Além disso, foram feitas gravações com o cilindro partindo do lado esquerdo e do lado direito, pois o plano da mesa não é perfeitamente horizontal então tem-se para o lado esquerdo o ângulo do calço  $\alpha$  somado com um certo ângulo  $\beta$  e para o lado direito tem-se o ângulo  $\alpha$  subtraído do ângulo  $\beta$  por conta a imperfeição da mesa. Esses cálculos foram possíveis devido aos vídeos fornecidos, uma vez que os representantes deste grupo não tiveram contato com os equipamentos e com a montagem do experimento. Portanto, através dos períodos medidos obteve-se tempos de queda diferentes para ambos os lados, fornecendo, assim,  $t_1$  e  $t_2$ . Por fim, foi possível encontrar o valor médio para o tempo de rolamento.

Para dar progresso ao estudo do movimento, também foi calculado o momento de inércia dos cilindros.

O experimento realizado consistiu na determinação do tempo de duração para que o cilindro rolasse certas distâncias pelo plano inclinado. Para anotar os tempos, o instrumento utilizado foi o cronômetro virtual de aparelhos smartphone.

Na primeira etapa, foram medidos 10 períodos para a distância de 100cm (1 metro) de deslocamento do corpo. Com as 10 medições, encontrou-se o valor médio delas e a incerteza do tempo (cuja fórmula de cálculo está descrita na aba de *Fórmulas* desta síntese). Esse processo foi repetido para cada um dos três corpos, tanto para o lado esquerdo quanto para o lado direito, enumerando  $t_1$  como esquerdo e  $t_2$  como direito.

Na segunda etapa, foram medidos 10 períodos apenas para os cilindros de latão oco e de latão maciço, porém com 4 distâncias diferentes: 40cm, 60cm, 80cm e 100cm. Com os tempos, calculou-se o valor médio deles, bem como sua incerteza.

lado direito ou esquerdo?

ponto

mudando o calço de lado

imagens

como obteve parâmetros?

Ademais, elevou-se os valores médios ao quadrado, também calculando a incerteza desse período ao quadrado. Por fim, construiu-se dois gráficos com os valores obtidos: um para o latão oco e outro para o latão maciço, relacionando as distâncias e o quadrado do tempo, para linearizar os gráficos.

### Fórmulas:

Inércia rotacional para qualquer corpo:

$$I = \int r^2 dm$$

(Nessa fórmula,  $I$  corresponde ao momento de inércia do cilindro,  $r$  é a variação do raio,  $dm$  é o diferencial de massa do corpo.)

Inércia rotacional para um cilindro homogêneo:

$$I = \frac{M.R^2}{2}$$

(Nessa fórmula,  $I$  corresponde ao momento de inércia dos cilindros de alumínio maciço e de latão maciço,  $R$  é o raio do cilindro,  $M$  é a massa do corpo)

~~Inércia rotacional para um cilindro oco:~~

~~$$I = M.R^2$$~~

Esse é para anel...

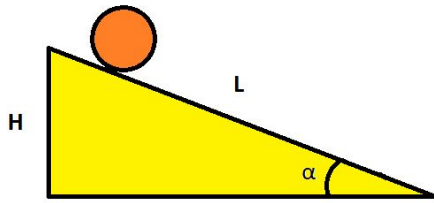
(Nessa fórmula,  $I$  corresponde ao momento de inércia do cilindro de latão oco,  $R$  é o raio do cilindro,  $M$  é a massa do corpo)

Para a incerteza do momento de inércia, foi feita a propagação de incerteza, resultando em:

$$(\text{inc } I)^2 = \frac{(I)^2 \cdot (\text{inc massa})^2}{(\text{massa})^2} + \frac{4 \cdot (I)^2 \cdot (0,5 \cdot \text{inc diâmetro})^2}{(0,5 \cdot \text{diâmetro})^2}$$

(Obs.: o fato do número 0,5 multiplicar o diâmetro e a sua incerteza é devido ao objetivo de trabalhar com o raio, o qual corresponde à metade do diâmetro)

Em relação ao ângulo da mesa com a prancha, pode-se estabelecer a função trigonométrica seno, a qual foi definida a seguir:



$$\text{sen}\alpha = \frac{H}{L}$$

(O seno de alfa corresponde à razão entre a altura do calço e o comprimento percorrido pelo cilindro)

não precisava  
calcular o seno...

Para calcular a incerteza do seno de alfa, foi feita a propagação de incerteza, resultando em:

$$(\text{inc sen}\alpha)^2 = \frac{(\text{sen}\alpha)^2 \cdot (\text{inc } h)^2}{(h_{\text{médio}})^2} + \frac{(\text{sen}\alpha)^2 \cdot (\text{inc compr})^2}{(\text{compr})^2}$$

Na primeira etapa, a incerteza dos tempos  $t_1$  e  $t_2$  foi calculada através da razão entre o desvio padrão dos 10 tempos medidos e a raiz de 10 (devido às 10 marcações):

$$\text{inc } t_1 = \frac{\text{DESVPAD}(t_1(1) : t_1(10))}{\text{raiz}(10)}$$

$$\text{inc } t_2 = \frac{\text{DESVPAD}(t_2(1) : t_2(10))}{\text{raiz}(10)}$$

Fórmula de  
incertezas no item  
análise de dados...

Para o período final do movimento, foi feita a seguinte dedução:

The image shows a handwritten derivation on lined paper. The steps are as follows:

$$X = \frac{1}{2} g \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) t_1^2}{K} \quad / \quad X = \frac{1}{2} g \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta) t_2^2}{K} = T$$

$$X = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha)}{K} t^2$$

Then, it defines  $c = \frac{2 \times K}{g}$ ,  $\sin \alpha = \frac{c}{t_1^2}$ ,  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{c}{t_1^2}$ , and  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{c}{t_2^2}$ .

Using trigonometric identities:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{c}{t_1^2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \frac{c}{t_2^2}$$

$$\sin \beta \cos \alpha = \frac{c}{t_1^2} - \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \beta \cos \alpha = -\frac{c}{t_2^2} + \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{c}{t_1^2} - \sin \alpha \cos \beta = -\frac{c}{t_2^2} + \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{c}{t_1^2} + \frac{c}{t_2^2} = 2 \sin \alpha \cos \beta \xrightarrow{\cos \beta = 1}$$

$$e. \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 \cdot T_2^2} = 2 \frac{L}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 T_1^2 \cdot T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 t_1^2 t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}}$$

(Nessa fórmula,  $t$  representa o tempo médio final de rolamento do corpo,  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos médios correspondentes aos lados esquerdo e direito do lançamento do corpo, respectivamente)

A incerteza desse período final acima foi deduzida a partir da seguinte maneira:

$$(t_1)^2 = a \quad \sigma_a = \frac{2 \cdot a \cdot \sigma_{t_1}}{t_1}$$

$$(t_2)^2 = b \quad \sigma_b = \frac{2 \cdot b \cdot \sigma_{t_2}}{t_2}$$

$$x = a + b \quad (\sigma_x)^2 = (\sigma_a)^2 + (\sigma_b)^2$$

Handwritten mathematical derivation on lined paper:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}}$$
$$x = \sqrt{2} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot (t_1^2 + t_2^2)^{-1/2}$$
$$x = \sqrt{2} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot x^{-1/2}$$
$$\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{t_1}}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t_2}}{t_2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_x}{x}\right)^2$$
$$x = \sqrt{\left(t^2 \cdot \frac{\sigma_{t_1}^2}{t_1^2}\right) + \left(t^2 \cdot \frac{\sigma_{t_2}^2}{t_2^2}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{x}\right)^2}$$

Para encontrar o valor de **K**, o qual é um parâmetro adimensional dependente da distribuição da massa **M** no volume do objeto (para um cilindro maciço homogêneo  $K = 3/2$ , enquanto que para uma massa concentrada numa “casca” de raio **R** (isto é, para  $r = R$ ),  $K=2$ ) foi utilizada a seguinte fórmula:

$$t = \sqrt{\frac{2Kx}{g \sin \alpha}}$$

isolando **K**:

$$K = \frac{t^2 \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot x}$$

(Nessas fórmulas, *t* é o tempo médio de cada cilindro, *x* é a distância percorrida pelo cilindro e *g* é a aceleração da gravidade promovida pelo Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo e equivale à  $9,78641 \pm 0,00001 \text{ m/s}^2$ )

A incerteza desse parâmetro **K** foi dada através da propagação de incertezas a seguir:

$$K = \frac{g \cdot H \cdot t^2}{2 \cdot x \cdot L} = \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot t^2}{2 \cdot x} = g \cdot H \cdot t^2 \cdot x^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\sigma K)^2}{K^2} = \frac{(\sigma g)^2}{g^2} + \frac{(\sigma H)^2}{H^2} + \frac{(2 \cdot \sigma t)^2}{t^2} + \frac{(-\sigma x)^2}{x^2} + \frac{(-\sigma L)^2}{L^2}$$

Entretanto, a incerteza de *x* foi desconsiderada nos cálculos. Isso ocorreu pois ela é pequena e irrelevante quando comparada à incerteza do seno de alfa.

Na segunda etapa do experimento, a incerteza do tempo ao quadrado foi obtida através da fórmula:

$$\text{inc } t^2 = \frac{t^2 \cdot 2 \cdot \text{inc } t}{t} = 2 \cdot t \cdot \text{inc } t$$

Dados Experimentais:

Para cada cilindro, foi fornecida sua massa e seu diâmetro. Com isso, foi possível encontrar o momento de inércia. Além disso, foram fornecidas as alturas dos calços utilizados no experimento, bem como a distância percorrida pelo corpo no deslocamento e o comprimento da prancha, os quais já foram citados anteriormente e seguem abaixo.

	massa (kg)	inc m (kg)	Diâmetro (m)	inc Diâm (m)	I (kg.m/s <sup>2</sup> )	inc I (kg.m/s <sup>2</sup> )
<b>Alum. maciço</b>	0,2657	0,0001	0,05000	0,00005	0,0000830	0,0000002
<b>Latão oco</b>	0,2651	0,0001	0,05000	0,00005	0,0001657	0,0000003
<b>Latão maciço</b>	0,8298	0,0001	0,05000	0,00005	0,000259	0,000001

h1 (m)	h2 (m)	h3 (m)	h4 (m)	h5 (m)	h médio (m)	inc h (m)
0,03900	0,03875	0,03845	0,03830	0,03820	0,03854	<del>0,00005</del>

de onde vieram as incertezas?

Comprimento (m)	inc comprimento (m)
1,20	0,01

Distância (m)	inc distância (m)
1,000	0,005

<b>sen alfa</b>	<b>inc seno alfa</b>
0,0321	0,0003

Tabelas:

Para melhor organização dos dados coletados, foram construídas tabelas com os valores de tempo, distância e as incertezas.

**1ª ETAPA:**

**Esquerdo:**

	t1(1) (s)	t1(2) (s)	t1(3) (s)	t1(4) (s)	t1(5) (s)	t1(6) (s)	t1(7) (s)	t1(8) (s)	t1(9) (s)	t1(10) (s)	t1 médio (s)	inc t1 (s)
<b>Alum. maciço</b>	3,22	3,22	3,19	3,27	3,22	3,20	3,13	3,07	3,32	3,26	3,21	0,02
<b>Latão oco</b>	3,35	3,27	3,39	3,33	3,47	3,19	3,39	3,33	3,39	3,27	3,34	0,03
<b>Latão maciço</b>	2,94	3,00	3,01	2,97	3,07	3,12	3,00	3,00	3,14	3,20	3,05	0,03

**Direito:**

	t2(1) (s)	t2(2) (s)	t2(3) (s)	t2(4) (s)	t2(5) (s)	t2(6) (s)	t2(7) (s)	t2(8) (s)	t2(9) (s)	t2(10) (s)	t2 médio (s)	inc t2 (s)
<b>Alum. maciço</b>	3,14	3,33	3,27	3,13	3,15	3,33	3,14	3,20	3,14	3,33	3,22	0,03
<b>Latão oco</b>	3,47	3,46	3,47	3,67	3,46	3,46	3,58	3,46	3,40	3,72	3,52	0,03
<b>Latão maciço</b>	2,88	3,14	3,20	3,13	3,19	3,14	3,20	3,19	3,19	3,20	3,15	0,03



**Tempo médio:**

	<b>t (s)</b>	<b>inc t (s)</b>
<b>Alum. maciço</b>	3,21	0,18
<b>Latão oco</b>	3,42	0,20
<b>Latão maciço</b>	3,09	0,18

Com os tempos médios, foi possível obter o valor de **K**:

	<b>K</b>	<b>inc K</b>
<b>Alum. maciço</b>	1,62	0,18
<b>Latão oco</b>	1,84	0,22
<b>Latão maciço</b>	1,50	0,16

coerente

Dessa forma, nota-se que **K**, com suas respectivas incertezas, constituem os valores esperados, mostrando assim a qualidade do experimento que tinha como objetivo mostrar que o valor de **K** independe do material com o qual é formado o objeto, dependendo apenas de sua distribuição de massa.

discussão. Quais seriam os valores esperados?

## 2ª ETAPA:

Latão maciço:

	Distância ± inc distância (m)			
	<b>0,4 ± 0,005</b>	<b>0,6 ± 0,005</b>	<b>0,8 ± 0,005</b>	<b>1 ± 0,005</b>
t(1) (s)	1,78	2,43	2,80	3,07
t(2) (s)	1,84	2,30	2,89	3,21
t(3) (s)	1,98	2,43	2,78	2,96
t(4) (s)	1,91	2,35	2,74	3,06
t(5) (s)	1,77	2,37	2,67	3,08
t(6) (s)	1,98	2,43	2,75	3,14
t(7) (s)	1,85	2,42	2,81	3,02
t(8) (s)	1,85	2,42	2,95	3,13
t(9) (s)	1,78	2,37	2,89	3,07
t(10) (s)	1,98	2,62	2,82	3,20
t médio (s)	1,87	2,41	2,81	3,09
inc t (s)	0,03	0,03	0,03	0,02
t <sup>2</sup> (s)	3,50	5,83	7,90	9,57
inc t <sup>2</sup> (s)	0,10	0,13	0,15	0,15

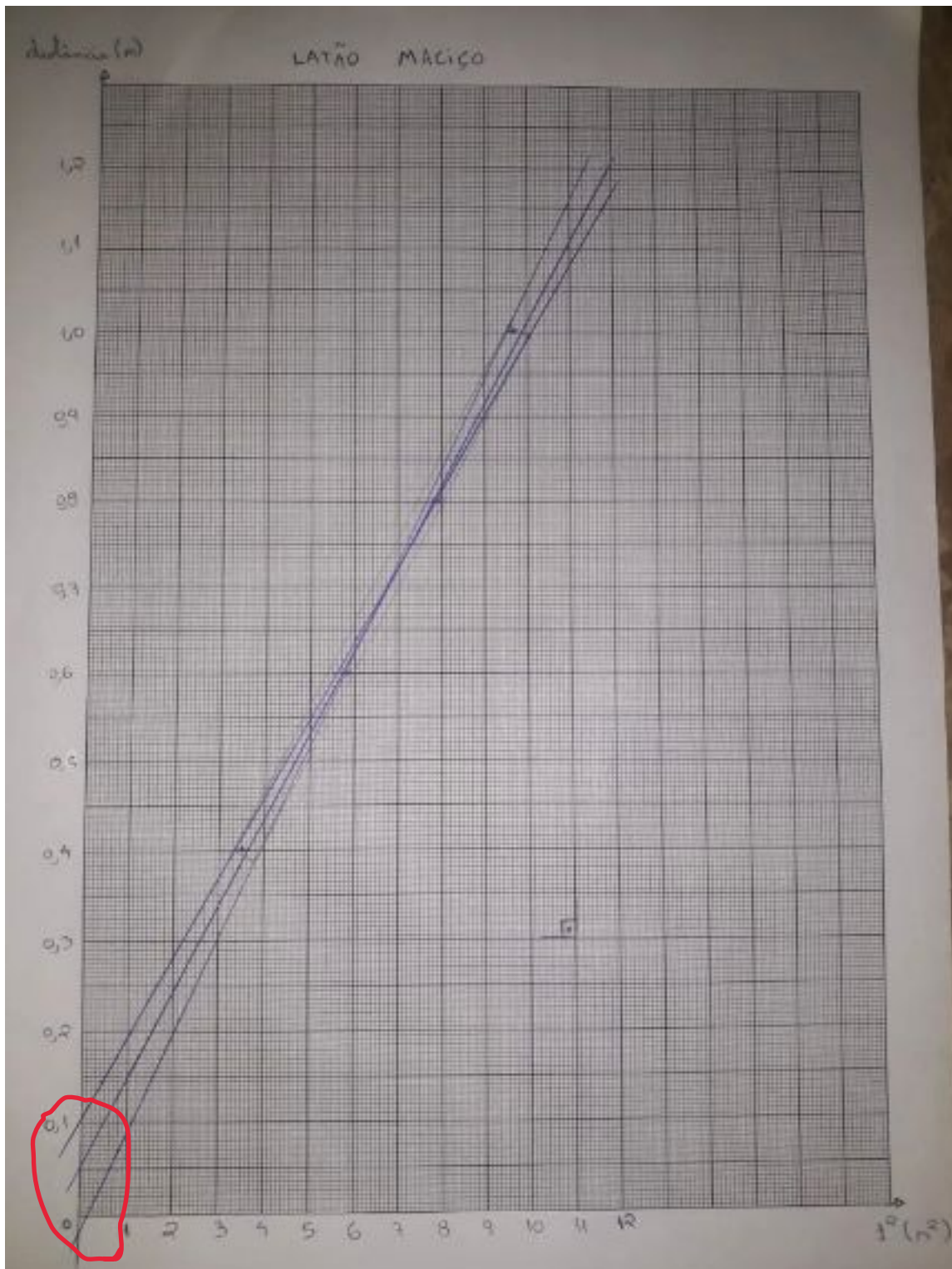
Latão oco:

	Distância $\pm$ inc distância (m)			
	<b>0,4 <math>\pm</math> 0,005</b>	<b>0,6 <math>\pm</math> 0,005</b>	<b>0,8 <math>\pm</math> 0,005</b>	<b>1 <math>\pm</math> 0,005</b>
t(1) (s)	2,12	2,43	3,17	3,49
t(2) (s)	1,97	2,45	2,99	3,44
t(3) (s)	2,17	2,30	2,90	3,07
t(4) (s)	1,94	2,45	3,17	3,42
t(5) (s)	2,10	2,48	2,94	3,30
t(6) (s)	2,00	2,69	2,92	3,19
t(7) (s)	1,99	2,58	2,90	3,31
t(8) (s)	2,19	2,54	2,97	3,25
t(9) (s)	1,82	2,64	3,12	3,45
t(10) (s)	2,15	2,48	3,04	3,27
t médio (s)	2,05	2,50	3,01	3,32
inc t (s)	0,04	0,04	0,03	0,04
t <sup>2</sup> (s)	4,18	6,27	9,07	11,02
inc t <sup>2</sup> (s)	0,15	0,18	0,20	0,28

Gráficos:

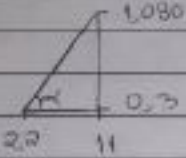
Foram desenvolvidos gráficos que relacionam a distâncias percorridas pelos cilindros e o tempo de duração. Eles encontram-se a seguir, juntamente com os valores obtidos para o coeficientes angular e linear e suas respectivas incertezas:

Latão maciço:



Pelo método gráfico, tem-se:

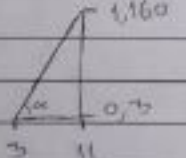
RETA MÍNIMA:


$$a = \tan \alpha = \frac{1,08 - 0,3}{11 - 2,2} = 0,0886$$
$$a_{\min} = 0,0886$$

$(2,2; 0,3)$   
 $y = a \cdot x + b$   
 $0,3 = 0,0886 \cdot 2,2 + b$   
 $b = 0,3 - 0,19492$   
 $b = 0,10508$   
 $b_{\min} = 0,1051$

leia no gráfico...

RETA MÁXIMA:


$$a = \tan \alpha = \frac{1,16 - 0,3}{11 - 3} = 0,1075$$
$$a_{\max} = 0,1075$$

$(3; 0,3)$   
 $y = a \cdot x + b$   
 $0,3 = 0,1075 \cdot 3 + b$   
 $b = 0,3 - 0,3225$   
 $b = -0,0225$   
 $b_{\min} = -0,0225$

RETA MÉDIA :

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \frac{0,1075 + 0,0886}{2} = 0,09805$$

$$\sigma_a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \frac{0,1075 - 0,0886}{2} = 0,00945$$

$$a = (0,09805 \pm 0,00945)$$

1 significativo...

$$b = \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2} = \frac{0,1051 + (-0,0225)}{2} = 0,0413$$

$$\sigma_b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} = \frac{0,1051 - (-0,0225)}{2} = \frac{0,1051 + 0,0225}{2} = 0,0638$$

$$b = (0,0413 \pm 0,0638)$$

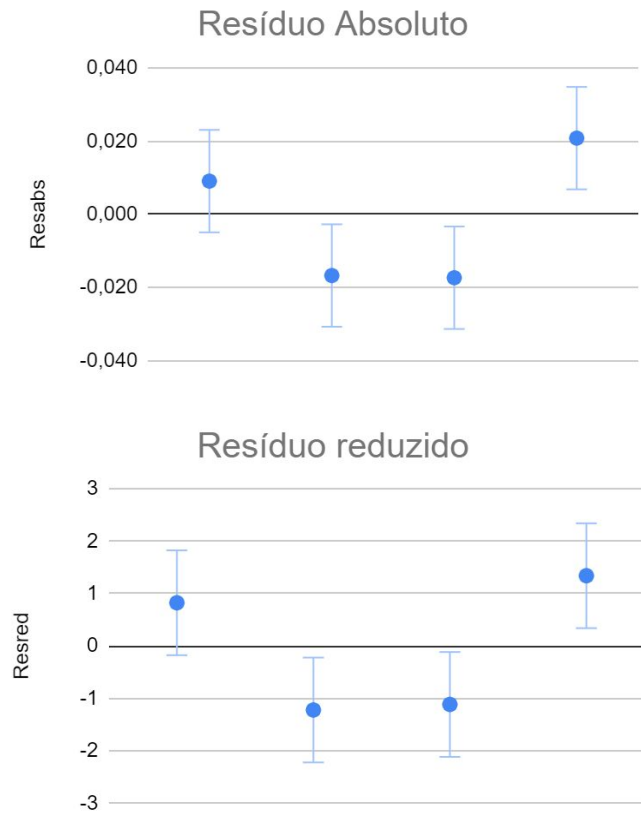
Portanto, a equação da reta é  $y = 0,09805x + 0,0413$

Foi feito também o método dos mínimos quadrados (MMQ) para achar os melhores parâmetros para o coeficiente angular e linear dos gráficos produzidos experimentalmente. Com isso:

$$a = 0,097 \pm 0,003$$

$$b = 0,052 \pm 0,019$$

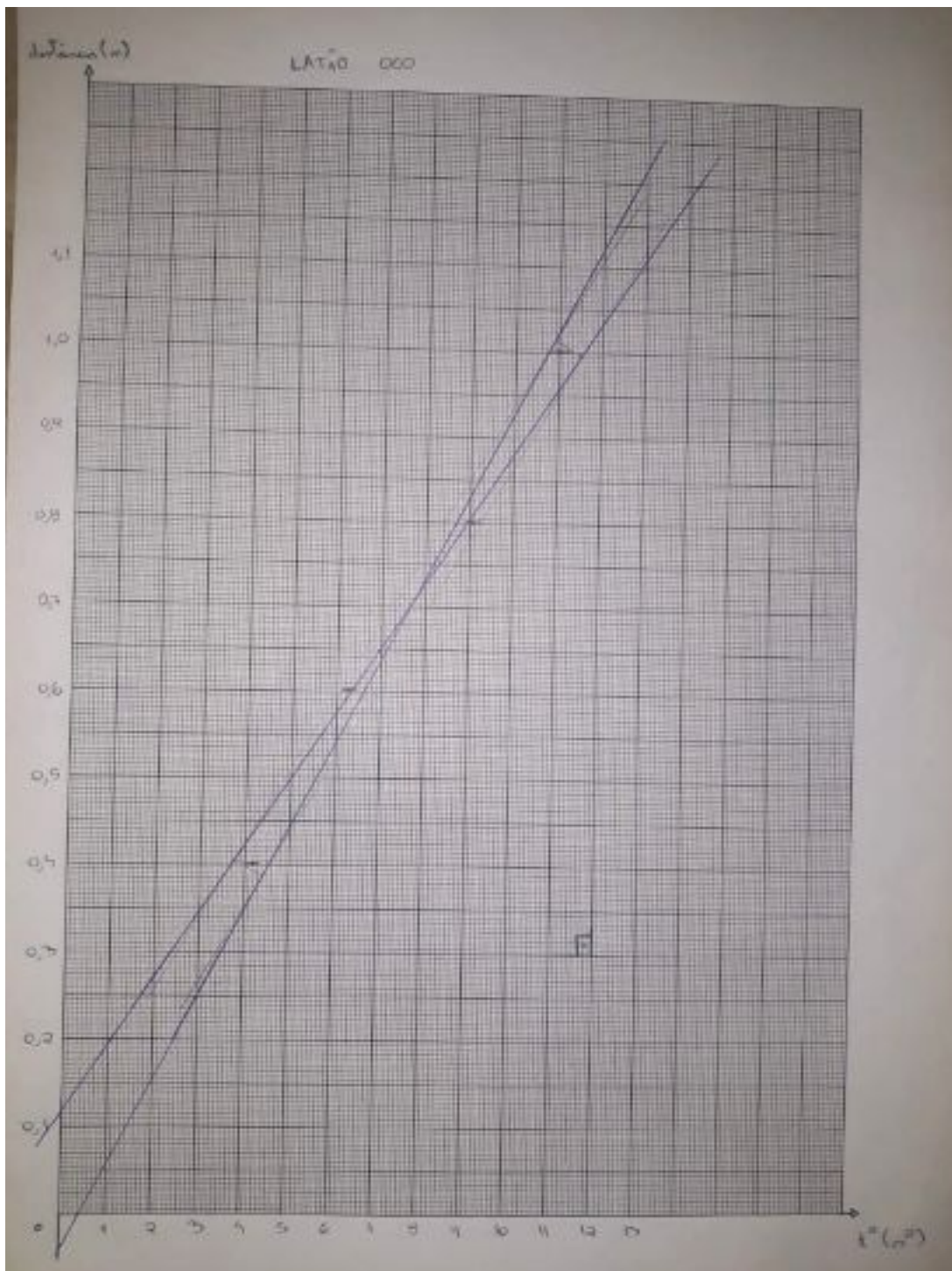
Após ajustada a melhor reta para os valores experimentais foi feito o resíduo dos valores obtidos, com isso tem-se:



Analisando os gráficos dos resíduos é possível afirmar que os valores experimentais coletados estão aproximados aos valores esperados pela função experimental, isso conclui que teve-se uma ótima coleta de dados.

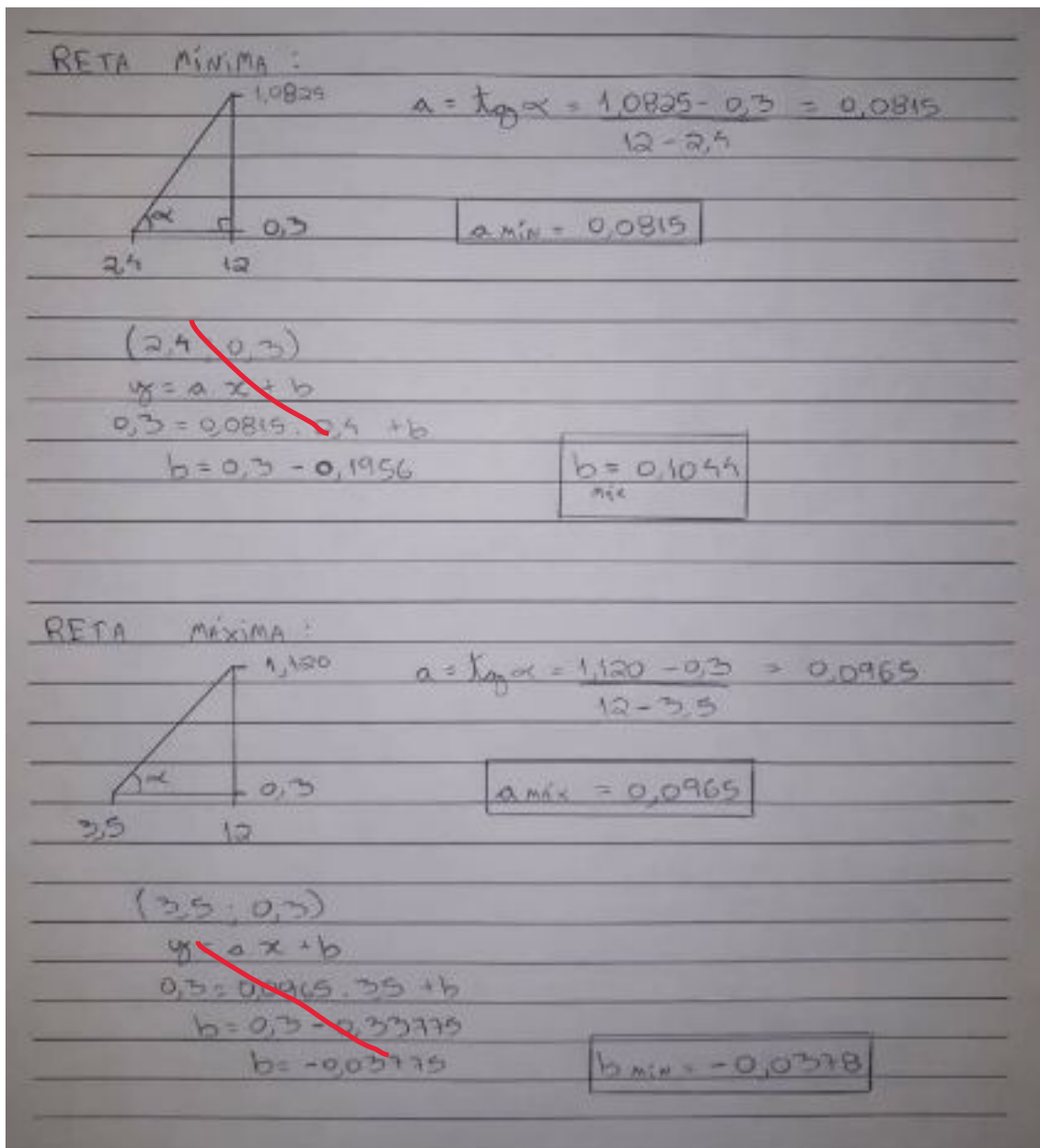


Latão oco:





Pelo método gráfico, tem-se:



RETA MÉDIA:

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \frac{0,0965 + 0,0815}{2} = 0,089$$

$$\sigma_a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \frac{0,0965 - 0,0815}{2} = 0,0075$$

$$a = (0,089 \pm 0,0075)$$

$$b = \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2} = \frac{0,1044 + (-0,0378)}{2} = 0,0333$$

$$\sigma_b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} = \frac{0,1044 - (-0,0378)}{2} = \frac{0,1044 + 0,0378}{2} = 0,0711$$

$$b = (0,0333 \pm 0,0711)$$

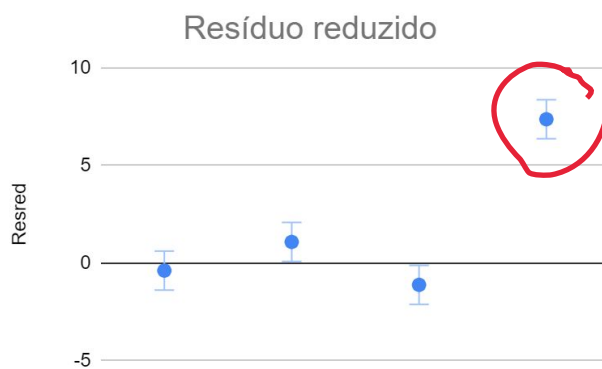
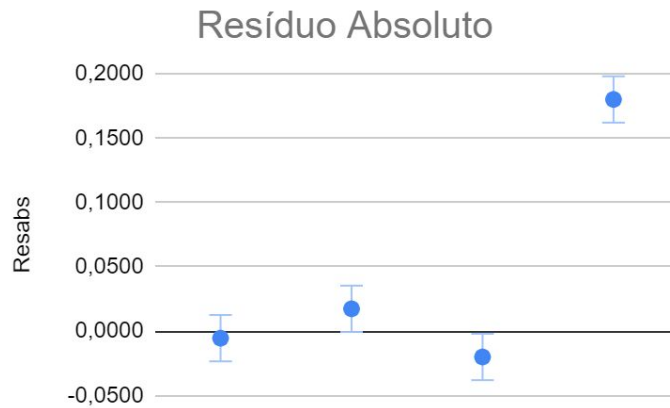
Portanto, a equação da reta é  $y = 0,089 \cdot x + 0,0333$

Novamente foi usado o MMQ para estabelecer os melhores parâmetros para o gráfico anterior. Assim:

$$a = 0,085 \pm 0,003$$

$$b = 0,051 \pm 0,024$$

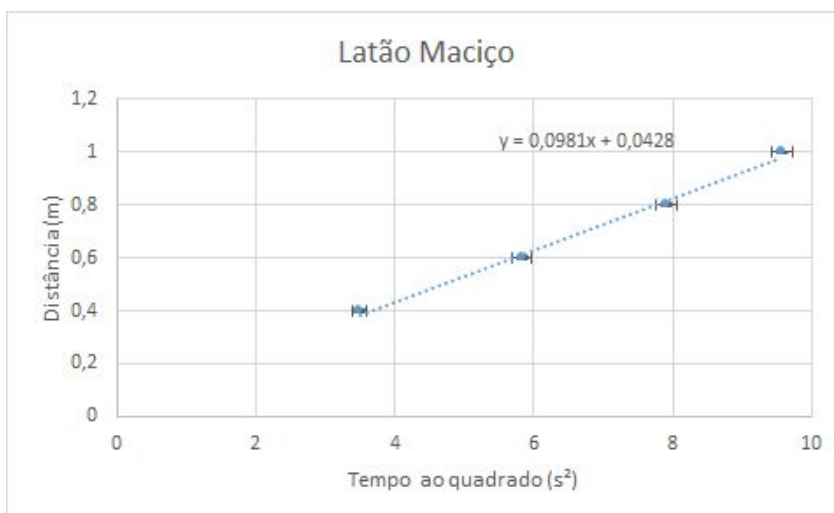
Após ajustada a melhor reta para os valores experimentais foi feito o resíduo dos valores obtidos, com isso tem-se:



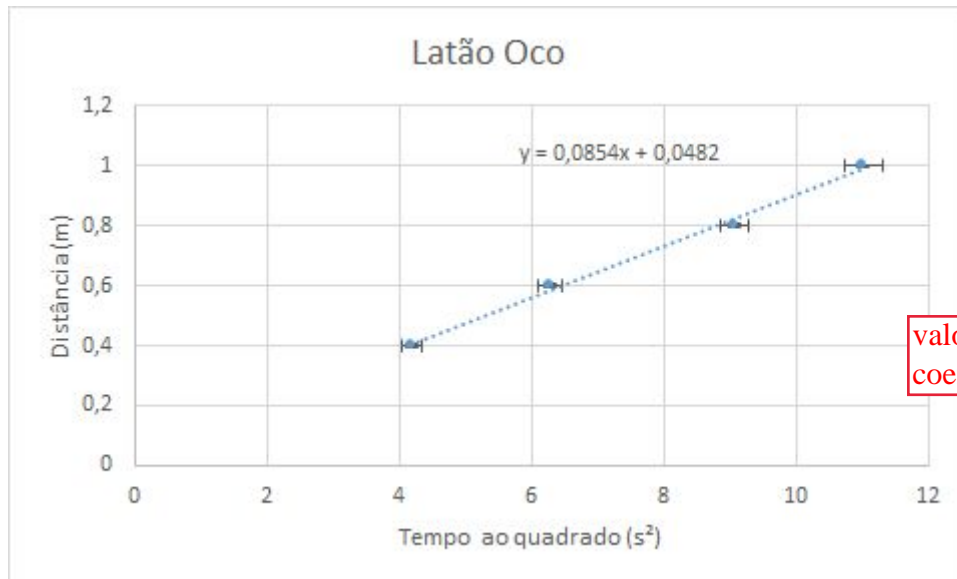
mais de 3 sig fora...

Checando os valores dos resíduos podemos afirmar que o último ponto experimental não se encaixa bem com a função obtida, pois está a mais de três sigmas do valor esperado, isto se dá pelo fato de uma má leitura dos dados.

Ademais, por meio do software Microsoft Excel, foi possível construir gráficos virtuais para serem comparados com os gráficos feitos pelo grupo. Esses gráficos encontram-se a seguir:



(Esse gráfico relaciona a distância percorrida pelo cilindro de latão maciço e o quadrado do tempo de deslocamento)



valor de k a partir do coeficiente angular

(Esse gráfico relaciona a distância percorrida pelo cilindro de latão oco e o quadrado do tempo de deslocamento)

### Conclusão:

Ainda que não tenha ocorrido o contato dos integrantes do grupo com os equipamentos e com a montagem do experimento, a sua realização e a análise mostraram-se possíveis, de tal forma que a obtenção dos dados experimentais, a utilização de fórmulas e a construção de gráficos não foi arruinada ou interrompida.

Além disso, a compatibilidade entre os resultados adquiridos e os almejados pode ter sido prejudicada devido à falta de precisão do olho humano durante as observações das gravações, bem como o tempo de reação do corpo humano ao iniciar e parar o cronômetro virtual utilizado.

Outrossim, os gráficos feitos à mão pelos integrantes podem ter sido distorcidos ~~pelos~~ programa que processa os dados do relatório nos dispositivos eletrônicos usados para construí-lo. Ou seja, a visualização dos gráficos é diferente virtualmente quando comparada com o contato físico com o gráfico feito.

Por fim, pode-se perceber que **K** correspondeu com os valores esperados. Isso comprovou que o parâmetro independe do material com o qual é formado o objeto, dependendo apenas da distribuição de sua massa. Logo, o objetivo do experimento foi atingido: analisar o movimento de rolamento sem escorregamento de um corpo cilíndrico, bem como o parâmetro **K** que envolve esses corpos.