

Relatório 1

Pêndulo Simples

6,0

Gabriel Xavier Luz nºUSP 11223931
Giovani Melendes Salvador nºUSP 11223952
Universidade de São Paulo



Conteúdo

1	Resumo	3
2	Introdução	3
3	Descrição experimental	5
4	Dados experimentais e resultados	5
5	Discussão	10
6	Conclusão	11

melhor separar dados
de análise de dados..

1 Resumo

Neste trabalho iremos a partir da medição do período de oscilação de um pêndulo simples tentar observar os elementos que afetam ou não sua variação (sendo eles o tamanho do fio e o ângulo de lançamento), determinar um valor para a gravidade que atua sobre o pêndulo e compararmos com o valor mais preciso. Por fim queremos identificar até que ângulo a aproximação de $\sin(a)$ e $\text{tg}(a)$ é válida para a utilização da fórmula clássica do pêndulo simples.

2 Introdução

Trabalharemos com um pêndulo denominado "simples" por considerarmos que é feito com um objeto pendurado em um fio, cuja massa é muito menor que a do objeto para que o centro de massa do sistema fio+objeto fique praticamente no centro de massa do objeto pendurado. Além disso iremos desconsiderar o atrito que possa existir no pêndulo, assim a força que atua no movimento do sistema é uma força conservativa parecida com o sistema massa e mola característico em um movimento harmônico simples (MHS), como o visto anteriormente no curso de mecânica.

Para compreendermos como o período do pêndulo funciona vamos descrever primeiramente quais são as forças que atuam no corpo, assim como o sistema está posicionado no momento mais alto da trajetória do canto direito.

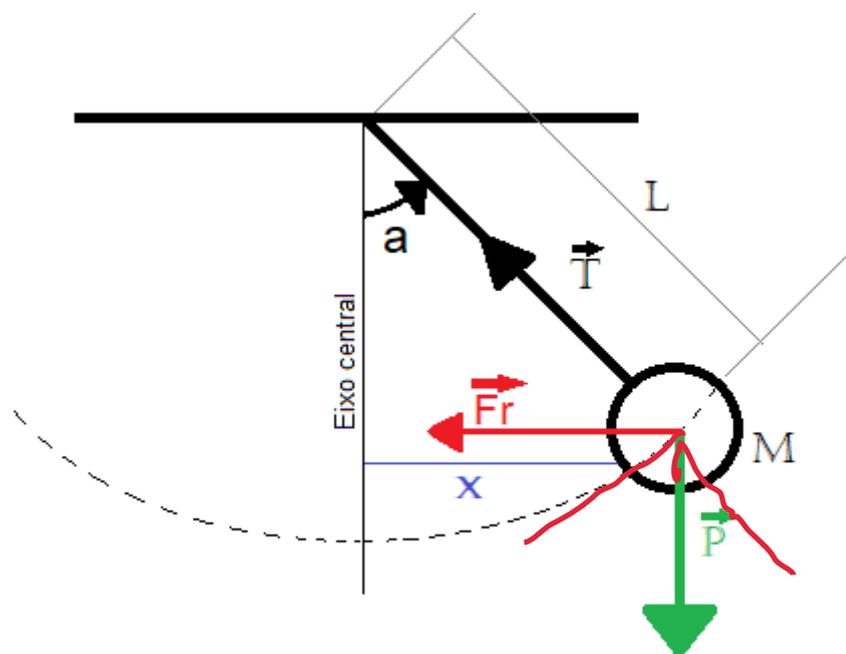


Figura 1: Demonstração do esquema de forças de um Pêndulo ideal.

Dessa maneira é possível construir dois triângulos, onde um relaciona os vetores que atuam no corpo e o outro com a distância até o eixo central e o comprimento do fio, ambos com o

Ponto...

mesmo ângulo "a" descrito anteriormente, assim trabalhando com um valor pequeno para este ângulo é possível chegar na seguinte relação (lembrando que para ângulos pequenos o valor do seno é aproximadamente igual ao da tangente).

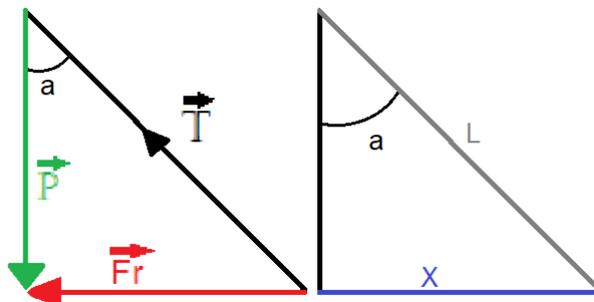


Figura 2: Demonstração figurada dos dois triângulos observáveis.

$$\operatorname{tg}(a) = \frac{\vec{F}_R}{\vec{P}} \quad \operatorname{sen}(a) = \frac{-x}{L}$$

$$\frac{\vec{F}_R}{\vec{P}} = \frac{-x}{L}$$

Isolando a Força resultante que atua neste corpo por fim chegamos nesta seguinte equação 1:

$$a = \frac{-xg}{L} \quad (1)$$

Agora para resolvermos esta equação de uma maneira que descreva como o período do pêndulo se comporta é necessário se lembrar das seguintes fórmulas e por fim resolver a equação.

$$a = -\omega^2 x \quad (2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

$$-\omega^2 x = -xg/L$$

$$\therefore \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

E por fim isolando o T temos a famosa expressão para o período de um pêndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4)$$

Nota-se que essa expressão para o período do pêndulo só é válida seguindo as três condições:

- O ângulo usado no experimento seja pequeno para que o valor do seno seja igual o da tangente;
- A massa do fio deve ser desprezível quando comparado com o objeto pendurado para que o centro de massa do sistema seja o mesmo do objeto;
- Não exista forças externas como o atrito agindo no sistema;

3 Descrição experimental

O experimento foi realizado virtualmente por conta da pandemia de COVID-19, as medidas foram tomadas a partir de vídeos do experimento gravados pelo professor. Por conta da ausência do laboratório, foram usados materiais mais casuais para realizar o experimento, sendo eles:

- 1 fio de barbante para pendurar o peso;
- 1 objeto esférico pesando aproximadamente 120 gramas;
- 1 cronômetro para a medição dos períodos;
- 1 câmera para filmar todo o experimento;

procedimento?
cuidados?
características dos
equipamentos?

4 Dados experimentais e resultados

Na tabela abaixo explicitamos os dados retirados no experimento para a medição da gravidade atrás vez do cálculo do período.

Tabela 1: Dados do ângulo, tamanho do fio usados e suas incertezas.

θ (graus)	incerteza	L (cm)	incerteza
10	1	60	1

justificativa para as
incertezas usadas

A Cronometragem do período foi feita 6 vezes com 16 oscilações do pêndulo em cada, e a incerteza do período foi colocada como a incerteza instrumental do cronômetro digital.

Tabela 2: Período cronometrado com 16 oscilações do pêndulo.

T16 (1)(s)	T16 (2)(s)	T16 (3)(s)	T16 (4)(s)	T16 (5)(s)	T16 (6)(s)	inc Tinst
24,72	24,55	24,89	24,96	24,6	24,69	0,01

Em seguida calculamos a média dos períodos obtidos tabela 2, achamos sua incerteza estatística, e concluímos sua incerteza final, calculada por meio da raiz quadrada da soma dos quadrados da incerteza estatística e instrumental. Por fim, através da média, achamos o valor do período de uma oscilação e sua incerteza. Com esses dados tentamos encontrar a aceleração gravitacional, e sua incerteza, comparando o resultado obtido com a gravidade medida de acordo com o Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG) da Universidade de São Paulo (9,7864137 m/s² e com uma incerteza de 0,00001) através do teste Z de comparação.

Tabela 3: Cálculo da média e incerteza da média dos períodos; período de 1 oscilação baseado na média e sua incerteza; cálculo da aceleração gravitacional através dos dados do experimento junto a sua incerteza e ao teste Z de comparação.

T16 med(s)	inc T16 med	inc final	T1 (s)	inc t1	g (m/s ²)	inc g	Teste Z
24,74	0,07	0,07	1,546	0,004	9,91	0,17	0,75

discussão

como calculou incertezas??

Na tabela abaixo explicitamos os dados retirados no experimento para a medição do período e analisar sua dependência com o tamanho do fio (L).

Tabela 4: Dados do ângulo, massa e suas incertezas utilizados.

θ (graus)	incerteza
10	1
massa (g)	incerteza
120	10

A medição foi feita utilizando 6 diferentes valores de L e observando o período de 16 oscilações do pêndulo. A incerteza do período foi a instrumental, correspondendo a incerteza de um cronômetro digital, e a incerteza do tamanho do fio foi, também, ~~instrumental da trena.~~

Tabela 5: Período de 16 oscilações de 6 diferentes tamanhos do fio do pêndulo e suas incertezas.

L (cm)	inc L	T16(1)(s)	T16(2)(s)	T16(3)(s)	T16(4)(s)	T16(5)(s)	T16(6)(s)	incTinst
30	1	17,11	16,9	17,34	17,18	17,12	17,04	0,01
45	1	21,22	21,43	21,34	21,52	21,3	21,37	0,01
50	1	22,62	22,60	22,62	22,44	22,50	22,60	0,01
60	1	23,25	24,86	24,71	24,71	24,86	24,88	0,01
75	1	27,71	27,85	28,06	27,86	27,8	27,58	0,01
90	1	30,65	30,49	30,47	30,64	30,44	30,52	0,01

Obtivemos a média do período e de sua incerteza a partir dos dados da Tabela 5, e calculamos a incerteza final por meio da raiz quadrada da soma dos quadrados da incerteza estatística e instrumental. Visto isso, conseguimos deduzir o período e a incerteza de uma oscilação através da divisão do valor médio pelo total de oscilações por vez.

Para melhores compreensões do funcionamento do valor de L na fórmula teórica do pêndulo simples, decidimos explicitar-lo dentro da raiz, igual na fórmula (4).

Tabela 6: Período médio e sua incerteza calculados junto a incerteza final da média; período de uma oscilação e sua incerteza; Raiz do tamanho do fio e sua incerteza

T16 med (s)	inc T16 méd	inc final	T1 (s)	inc t1	\sqrt{L} (cm)	inc \sqrt{L}
17,12	0,06	0,06	1,070	0,004	5,48	0,09
21,36	0,04	0,04	1,335	0,003	6,71	0,07
22,56	0,03	0,03	1,410	0,002	7,07	0,07
24,55	0,26	0,26	1,534	0,016	7,75	0,06
27,81	0,07	0,07	1,738	0,004	8,66	0,06
30,54	0,04	0,04	1,908	0,002	9,49	0,05

Agora explicitaremos os dados retirados no experimento para a medição do período com o fim de analisar sua dependência com o ângulo inicial (θ).

Tabela 7: Dados da massa, comprimento do fio e suas incertezas

dados da reta ajustada para t em função de raiz de L ???

Massa (g)	Incerteza
120	10
L (cm)	Incerteza
50	1

A medição do período do pêndulo foi feito com 10 oscilações cada, houveram no total 6 variações no tamanho do ângulo inicial. A incerteza do ângulo foi colocada como 1 grau pois não tivemos acesso a ferramenta utilizada para fazer a medição do ângulo. A incerteza do período foi colocada como instrumental, relacionada ao cronômetro digital.

Tabela 8: Graus do ângulo inicial, 6 períodos de 10 oscilações e suas incertezas.

θ (graus)	inc θ	T10(1)(s)	T10(2)(s)	T10(3)(s)	T10(4)(s)	T10(5)(s)	T10(6)(s)	inc Tinst
5	1	14,14	14,17	14,10	14,08	14,13	14,13	0,01
10	1	14,03	13,97	14,10	14,07	14,35	14,08	0,01
15	1	14,02	14,13	14,15	14,00	14,21	14,20	0,01
20	1	14,09	13,85	13,93	13,93	14,33	14,15	0,01
30	1	14,28	14,35	14,36	14,36	14,32	14,40	0,01
45	1	14,41	14,36	14,42	14,42	14,55	14,37	0,01

Observando os períodos obtidos chegamos as suas médias e a incertezas, visto isso calculamos a sua incerteza final sendo a raiz quadrada da soma dos quadrados da incerteza estatística e instrumental. Dividindo a média e a incerteza dos períodos pelo número de oscilações achamos o período de uma única oscilação e sua incerteza.

Através do da fórmula (4) calculamos o período teórico que deveríamos alcançar, visto que na fórmula não se depende do ângulo inicial. Calculamos também sua incerteza e o teste Z de

comparação entre o resultado experimental e o teórico obtido.

Tabela 9: Média dos períodos das 10 oscilações e suas incertezas; incerteza final de uma única oscilação e sua incerteza; período teórico de uma oscilação e sua incerteza.

que valores usou
para calcular?

T10 med(s)	inc T10 méd	inc final	T1 (s)	inc t1	T teórico (s)	inc T teórico	Teste Z
14,13	0,01	0,02	1,413	0,001	1,419	0,014	0,47
14,10	0,05	0,05	1,410	0,005	1,419	0,014	0,61
14,12	0,04	0,04	1,412	0,004	1,419	0,014	0,50
14,05	0,07	0,07	1,405	0,007	1,419	0,014	0,91
14,35	0,02	0,02	1,435	0,002	1,419	0,014	1,07
14,42	0,03	0,03	1,442	0,003	1,419	0,014	1,59

discussão

Nas tabelas a seguir está o coeficiente angular e linear da equação da reta ajustada pelos Métodos dos Mínimos Quadrados, assim possibilitando chegar em um período ajustado e suas respectivas incertezas.

Tabela 10: Coeficiente angular e linear da equação da reta ajustado pelo MMQ e suas respectivas incertezas.

a	b
0,00081	1,407
inc a	inc b
0,00007	0,002

ajuste manual do gráfico?

Tabela 11: Ângulos relacionados aos períodos ajustados com o MMQ.

θ (Graus)	T ajustado (s)
5	1,41136134
10	1,41543299
15	1,41950465
20	1,42357631
30	1,43171962
45	1,44393459

Abaixo está o gráfico que representa a comparação entre os resultados experimentais e teóricos obtidos do período pela variação do comprimento, nota-se que o eixo Y tem um valor baixo de incerteza para todos os pontos o que faz não ser visível no gráfico.

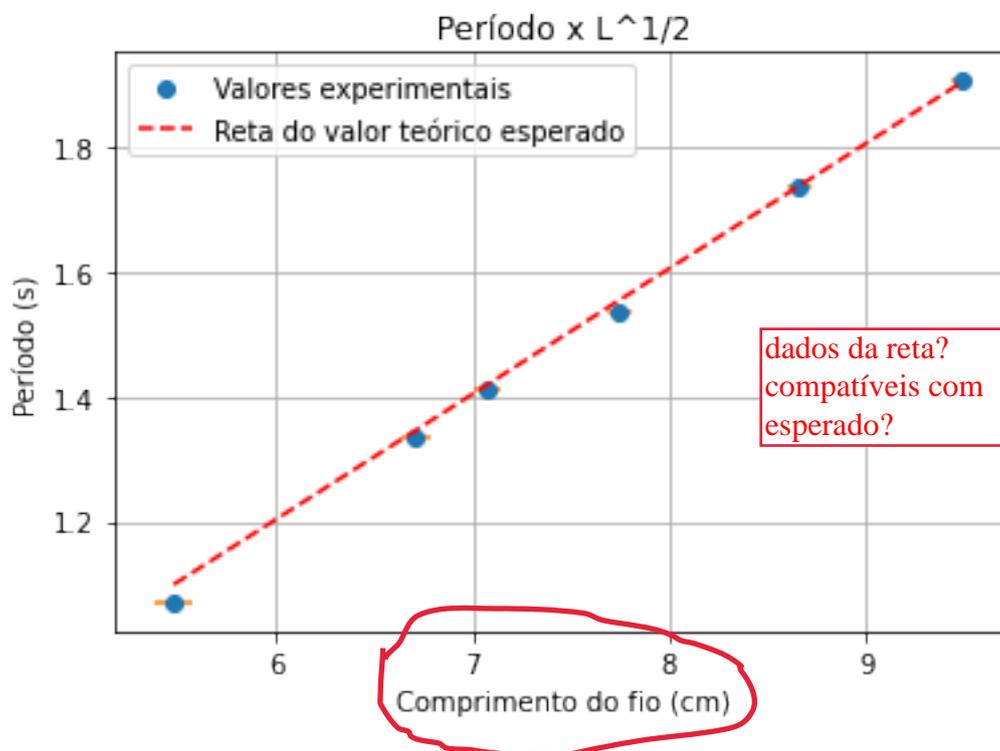


Figura 3: Gráfico de período por comprimento comparando o período experimental e teórico.

Por fim temos o gráfico que demonstra a relação entre o aumento do ângulo inicial com o período observado. Nele está descrito também uma reta que representa o valor teórico obtido. Mais a frente discutiremos sobre a relação entre o ângulo inicial e a eficácia da fórmula de pêndulo simples.

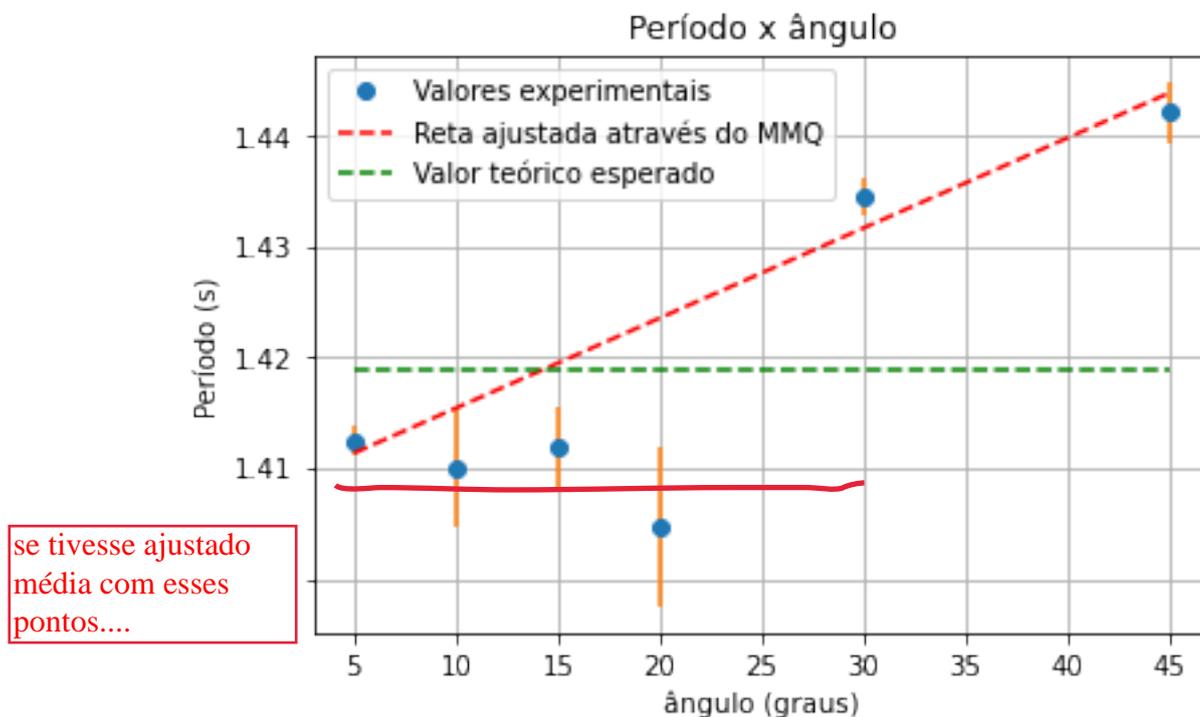


Figura 4: Gráfico de período por ângulo comparando a reta ajustada pelo MMQ e o valor teórico.

5 Discussão

Após a explicitação dos resultados obtidos, sejam em gráficos ou tabelas, podemos adentrar alguns debates sobre o experimento e a eficiência da fórmula teórica que usamos como base (equação 4).

Segundo a formulação do período de um pêndulo simples é explícito sua relação com a gravidade, pois para seu movimento é essencial a ação da força peso. Em nosso experimento pudemos achar uma aceleração gravitacional a partir do período cronometrado e um certo comprimento de fio, assim comparamos com a aceleração gravitacional disponibilizada pelo IAG. Podemos afirmar que os valores tem a diferença de 1σ pelo teste Z de comparação, o que torna esse valor válido.

Visto que podemos calcular a gravidade através dos experimentos realizados, decidimos comparar-la novamente com o dado disponibilizado variando o comprimento do fio (podendo ser visto no anexo A). Comparamos todos os resultados para a gravidade utilizando o teste Z e obtivemos que mesmo variando o comprimento podemos observar um aproximação de até 1 sigma (menos para dois casos em que a propagação do erro causou um valor e

mas Z apresentava um tendência...

visto isso comparamos os dados experimentais com os teóricos e os juntamos na figura 3 onde podemos perceber que os dados

experimentais coincidem com os dados teórico, mostrando a dependência do período com relação a raiz quadrada do tamanho do fio (L) é igual a deduzida teoricamente.

Ao analisarmos a origem da fórmula (4) podemos identificar que há uma aproximação entre o valor de seno de θ e tangente de θ , visando a formulação final do período. Contudo é importante ressaltar que essa aproximação de valor nem sempre é válida, sendo assim invalidando a fórmula para certas ocasiões. existem ainda outros problemas nas entrelinhas dessa formulação, sendo eles: A massa do fio ser desprezível para que o centro de massa seja o mesmo da esfera; não ter outras forças externas agindo sobre o pêndulo. Em prol da validação desta fórmula observamos experimentalmente o comportamento do período de um pêndulo simples com relação a variação do ângulo inicial, e obtivemos que há uma constante entre os ângulos de 5 a 20 graus (dentro das barras de incerteza), implicando que haja uma validação da fórmula (4) para tais ângulo, porém com valores que oscilam muito dentro de suas incertezas. Além disso observamos também que com 30 e 45 graus há uma discrepância dos valores iniciais, assim explicitando a ineficiência da fórmula (4) para tais ângulos.

Portanto a utilização desta fórmula neste experimento se mostra não válida quando tratada de ângulos grandes (maiores do que 20 graus), visto isso, e as outras condições necessárias, achamos a fórmula (4) inapropriada para usos científicos aonde requer precisão. A expressão deveria carregar consigo a influência de qualquer variável que possa agir sobre o período do pêndulo.

análise do fator Z valida sua afirmação??

6 Conclusão

Neste relatório tivemos como objetivo analisar as circunstâncias em que a fórmula do período é válida, e com o desenvolvimento deste trabalho, é possível notar que a dependência em relação ao tamanho do fio que prende o corpo é descrita perfeitamente como na fórmula teórica, conseguimos demonstrar isso na figura 3 quando comparado o valor experimental com o teórico esperado, no entanto a massa do fio deve ser desprezível.

não mostrou....

Agora quando tratamos das outras dependências como o ângulo inicial e a ausência de forças externas, vimos que o uso não é válido. Com a variação dos ângulos, que supostamente não deveria influenciar o período, foi possível expressar uma equação de reta crescente. A constante que deveria aparecer se manifestou somente nos ângulos pequenos entre 5 e 20 graus, considerando suas incertezas. O que se deve ao fato de que o uso de ângulos grandes exclui a possibilidade feita da dedução da fórmula de assumir que o valor do seno é igual o da tangente.

Além disso, não podemos esquecer o fato de existir um pouco de resistência do ar no pêndulo e outras forças dissipativas fazendo com que a idéia da força resultante ser conservativa não seja válida, portanto podemos concluir que o uso dessa equação não é útil em situações mais comuns do dia-a-dia. Para discutir com maior detalhes outros tópicos que podem ou não influenciar no período seria necessário uma coleta de dados sobre a massa do objeto preso, e talvez uma análise sobre a área de contato com o ar do corpo em cima da trajetória, o que pode ser realizado em trabalhos futuros.

análise das incertezas?

Anexo A: Tabela da relação da variação do comprimento do fio com a aceleração da gravidade e comparando com os dados do IAG.

L(m)	T1(s)	inc t1	g (m/s ²)	inc g	teste z
0,3	1,070	0,004	10,35	0,35	1,63
0,45	1,335	0,003	9,96	0,22	0,80
0,5	1,410	0,002	9,93	0,20	0,70
0,6	1,534	0,016	10,07	0,20	1,40
0,75	1,738	0,004	9,80	0,13	0,11
0,9	1,908	0,002	9,76	0,11	0,28

OBS: Para melhorar a precisão do gráfico, optei por não começar o eixo Y no 0, e sim ~~no~~ no 1,38.

Gráfico de Período pela Variação do ângulo inicial

Legenda:
• Reto ajustado dos dados experimentais
• Reto dos dados Teóricos

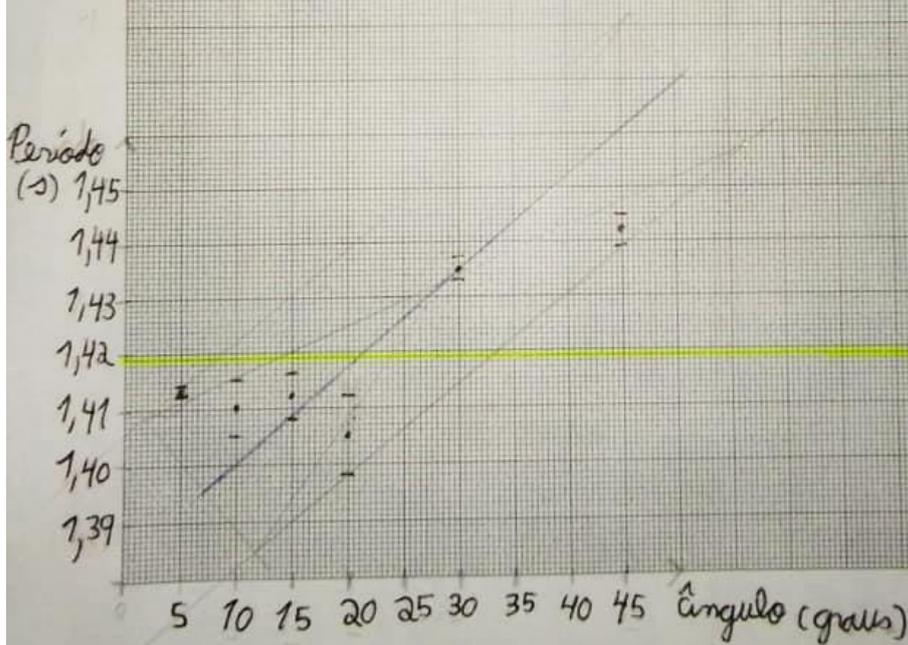
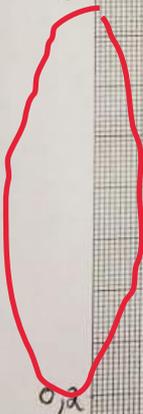


Gráfico do Período Pela Raiz de L

As incertezas
são pequenas
e suficientes
para não serem
relevantes no
gráfico

Período
(s)

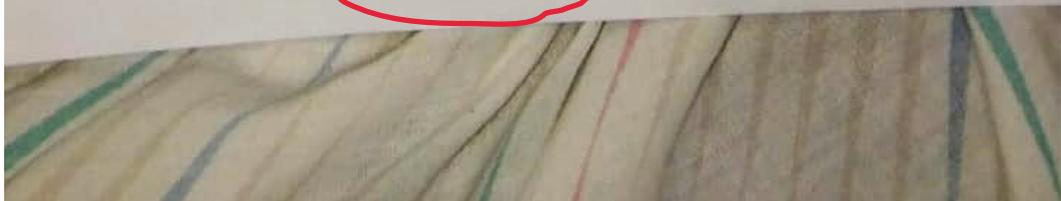
2
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1



0,2
0,1

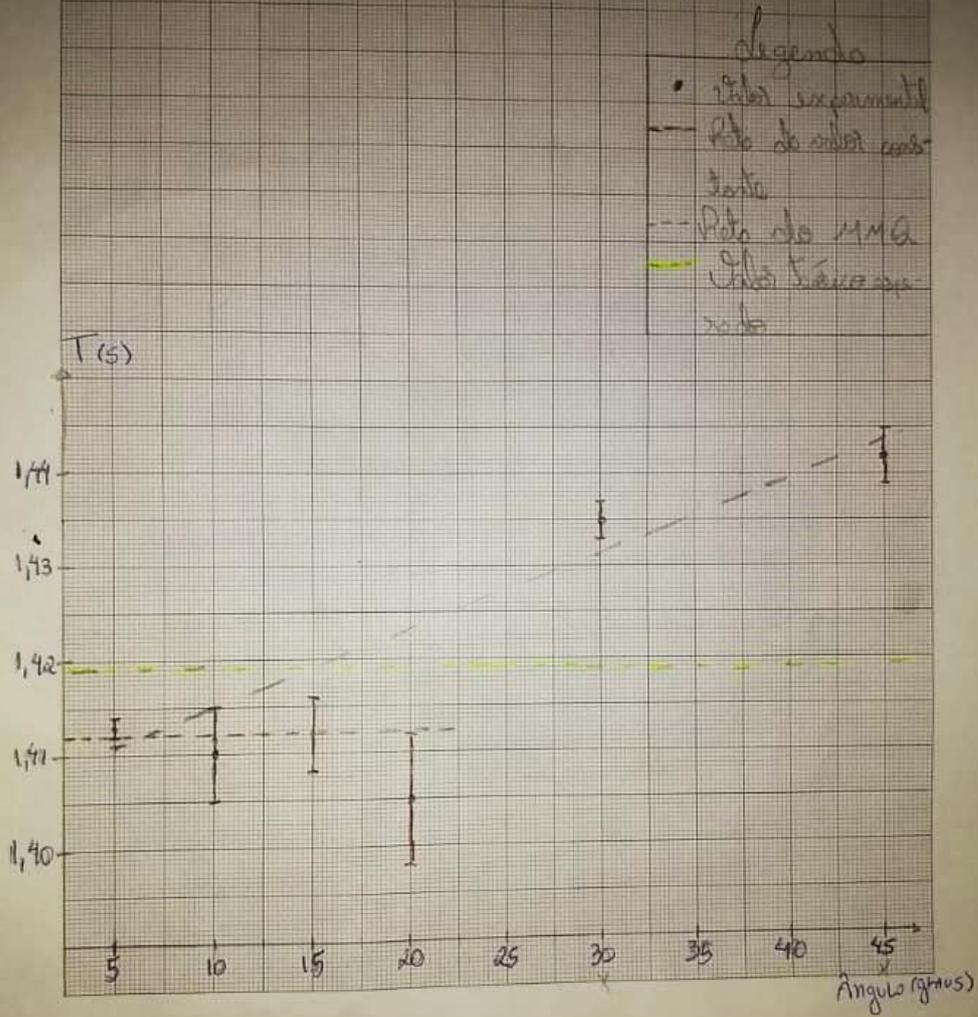
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Comprimento (cm)



Gabriel Oscar Cruz n° 13223731

Período versus ángulo



Fabrizio Xavier Luz nº USP 11223931
Período versus raiz do comprimento

