

Gabriel Barbosa Candido  
 Gustavo Silva V. Aguiar  
 Diurno - Turma 1

## Relatório Experimento 1 - Pêndulo Simples

### 1. RESUMO

método?

O experimento foi, basicamente, dividido em três partes e trata-se de um pêndulo simples, formado por um corpo esférico preso a um fio que está acoplado ao teto. Tem como objetivos verificar a dependência do período com alguns parâmetros, estabelecer os limites de validade de algumas hipóteses, além de determinar, de forma empírica, o valor local da gravidade.

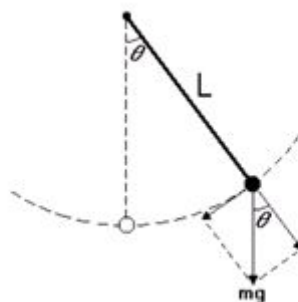
Na primeira parte do experimento foi deduzido o valor da gravidade local que, utilizando os dados obtidos, chegou-se em valores esperados. Depois, verificou-se a dependência do período com o comprimento do fio e, por último, a dependência com a amplitude inicial de lançamento.

### 2. INTRODUÇÃO

O objetivo desta experiência consiste em verificar a dependência do período com alguns parâmetros, estabelecer os limites de validade de algumas hipóteses, além de determinar, de forma empírica, o valor local da gravidade. Uma vez que se tenha uma pequena amplitude e ignora-se o atrito com o ar, o período  $T$  por ser dado através da fórmula a seguir:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (2.1)$$

Assim, o experimento tem como finalidade verificar a validade dessas hipóteses e até onde podemos considerá-las, além de verificar a dependência do período com outras grandezas (como a amplitude) quando estas hipóteses são violadas.

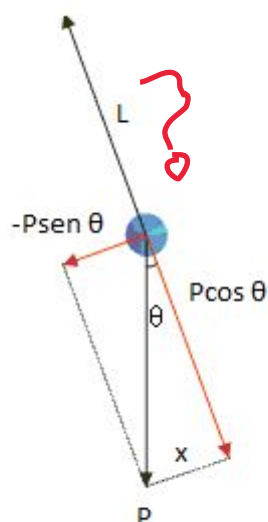


(2.2)

Faz-se as seguintes hipóteses:

- A haste é formada por um fio inflexível que se mantém sempre com o mesmo formato e comprimento;
- O centro de massa do pêndulo é aproximadamente igual ao centro de massa do objeto que realiza o movimento;
- Não existem outras forças atuantes no sistema, exceto pela gravidade e força que mantém o eixo do pêndulo fixo;
- O pêndulo realiza um movimento bidimensional.

Tendo essas hipóteses cumpridas é possível demonstrar a equação (2.1), uma vez que se observa que a força geradora do movimento oscilatório é dada por uma componente da força peso sobre o objeto, isto é, existem duas componentes para a força peso, sendo que uma delas é anulada, de acordo com a 3ª Lei de Newton, e a outra é responsável pela realização do movimento do corpo em questão. Além disso, o ângulo  $\theta$  pode ser definido como o quociente do arco descrito pelo ângulo, que no caso é  $x$ , e o raio,  $L$ , assim:



(2.3)

$$F = -P \cdot \sin \theta \Rightarrow F = -P \cdot \sin \frac{x}{L}$$

Porém, para ângulos pequenos,  $\sin \theta$  é aproximadamente igual ao próprio  $\theta$ , do que se segue:

$$F = -\frac{P}{L} \cdot x \Rightarrow F = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot x$$

Dado que  $m$ ,  $g$  e  $L$  são constantes em todo o movimento, podemos substituí-los por  $K$ , assim:

$$F = -K \cdot x$$

Com isso, temos que a força resultante do movimento descreve um Movimento Harmônico Simples e, como todo MHS, o período é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{L}}}$$

cancelando as massas e ajustando a equação, temos a fórmula conhecida para o período de um pêndulo simples:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

E é a partir dela que guiamos nosso experimento.

### 3. ARRANJO EXPERIMENTAL

Os materiais utilizados para a realização do experimento foram: um corpo esférico com aproximadamente 120g de massa; um fio, que fora acoplado ao corpo e ~~ao teto~~, servindo-nos como a haste do pêndulo; um tecido vermelho colocado ao fundo e com algumas marcações para facilitar a visualização do movimento do corpo; cronômetro dos celulares dos integrantes do grupo para a contagem de tempo dos períodos, com uma incerteza instrumental de 0,4s. pq?

incertezas?

Com o intuito de determinar a gravidade local foram mantidos todos os parâmetros fixos, já que, como demonstrado anteriormente, pela equação (2.1), o período tem como única variável o comprimento do fio. Assim, o valor, em graus, da amplitude inicial do movimento do corpo foi mantido em  $10^\circ$  e o comprimento do fio em 60 cm. Foram cronometrados o tempo de 16 oscilações por 6 vezes, para que a incerteza na medida fosse a menor possível. Foi feita a média dessas medições e, em seguida, esse valor foi dividido pela quantidade de períodos, obtendo-se, assim, o valor médio de um período. cuidados?

Em seguida, foram analisadas imagens nas quais o comprimento  $L$  do fio variou. O intuito era entender a dependência do período  $T$  com o comprimento  $L$ . Assim, foram tiradas as medidas de 16

oscilações, também por 6 vezes para vários comprimentos de fio. E, com um procedimento bem parecido com o anterior, obtivemos valores médios para um período.

Por fim, também experimentamos a dependência do período em relação à amplitude do ângulo de lançamento  $\theta$ . Para isso, foram medidos os períodos para 10 oscilações, por 6 vezes, com diferentes ângulos iniciais de lançamento. Com um procedimento igualmente parecido com os anteriores, obtivemos valores médios para um período e buscamos alguma relação entre os parâmetros.

#### 4. DADOS EXPERIMENTAIS

Aqui serão postos os resultados em forma de tabelas e gráficos, além de discutidos os cálculos realizados para tal e uma análise dos dados retirados do experimento.

##### 4.1 Tabelas

Sempre é necessário um texto explicando

I - Medidas dos períodos, em s, para  $L = 60\text{cm}$  e ângulo inicial =  $10^\circ$ :

T16 (1) (s)	T16 (2) (s)	T16 (3) (s)	T16 (4) (s)	T16 (5) (s)	T16 (6) (s)	inc Tinst (s)
24,37	24,35	24,38	24,40	24,33	24,25	0,01

não era 0,4s?

II - Dados para a determinação de g:

T16 med (s)	inc T16 med (s)	incf (s)	T1 (s)	inc t1 (s)	g (m/s <sup>2</sup> )	inc g (m/s <sup>2</sup> )	z
24,35	0,02	0,02	1,522	0,001	10,2	1,2	0,36930 39618

análise de dados

III - Determinação de g pela média ponderada

de onde vieram esses dados???

cálculo da incerteza de t medio?

G (m/s <sup>2</sup> )	inc g	Pi	Pi*Gi	Média Pond	Inc MP
10,71477143	0,514042992	3,784435556	40,54936197	10,17	0,02
10,23784056	0,390411389	6,560773463	67,16815265	Teste Z	
10,19810282	0,372592728	7,20329583	73,45995152	0,051453991	
10,13119121	0,341866973	8,556294176	86,68545238		
9,979356533	0,294540951	11,5267966	115,030013		
10,13911908	0,272487625	13,46810315	136,5547016		

errad

inconsistente

IV - Medidas dos períodos, em s, com ângulo inicial fixo e igual a 10° e L variando:

L (cm)	inc L (cm)	T16 (1) (s)	T16 (2) (s)	T16 (3) (s)	T16 (4) (s)	T16 (5) (s)	T16 (6) (s)	inc Tinst (s)
30	0,07	16,91	16,77	16,98	16,63	16,84	16,80	0,4
45	0,07	21,10	20,94	21,17	21,05	21,16	21,04	0,4
50	0,07	22,40	22,00	22,38	22,08	22,39	22,31	0,4
60	0,07	24,61	24,20	24,63	24,80	24,24	24,31	0,4
75	0,07	27,43	27,53	27,77	27,30	27,72	27,61	0,4
90	0,07	30,05	29,76	30,01	29,95	29,92	30,02	0,4

inconsistente

V - Dados para verificar dependência do período com o comprimento:

análise de dados

T16 med (s)	inc T16 med (s)	inc f (s)	T1 (s)	inc T1 (s)	raiz L (cm)	inc raizL	Tteorico (s)
16,82	0,05	0,40	1,051	0,025	5,477	0,006	1,100
21,08	0,04	0,40	1,317	0,025	6,708	0,005	1,347
22,26	0,07	0,41	1,391	0,025	7,071	0,005	1,420
24,5	0,1	0,4	1,529	0,026	7,746	0,005	1,556
27,6	0,1	0,4	1,723	0,025	8,660	0,004	1,739
29,95	0,04	0,40	1,872	0,025	9,487	0,004	1,905

VI - Medidas dos períodos, em s, para L fixo e igual a 50cm e o ângulo inicial variando:

ang θ (°)	inc angθ (°)	T10 (1) (s)	T10 (2) (s)	T10 (3) (s)	T10 (4) (s)	T10 (5) (s)	T10 (6) (s)	inc Tinst (s)
5	1	14,00	13,58	13,97	13,69	14,11	13,55	0,01
10	1	14,22	13,67	14,20	13,82	14,13	14,01	0,01
15	1	14,14	13,85	14,21	13,72	14,19	13,87	0,01
20	1	14,17	14,07	14,24	13,91	14,16	14,04	0,01
30	1	14,42	14,19	14,30	14,14	14,44	14,16	0,01
45	1	14,49	14,26	14,44	14,36	14,47	14,4	0,01

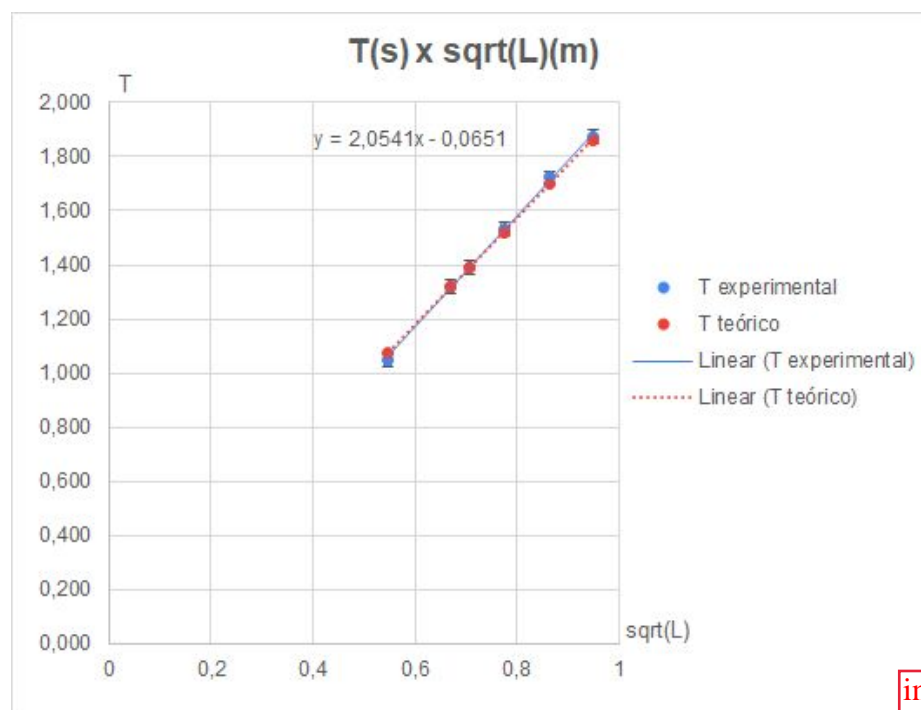
??

VII - Dados para verificar dependência do período com o ângulo:

conta Z errada...

T10 med (s)	inc T10 med (s)	incf (s)	Tl (s)	inc tl (s)	Tteoric o (s)	inc T teo (s)	z
13,82	0,10	0,10	1,382	0,010	1,420	0,001	0,3925221297
14,01	0,09	0,09	1,401	0,009	1,420	0,001	0,2126050108
14,00	0,09	0,09	1,400	0,009	1,420	0,001	0,2396498065
14,10	0,05	0,05	1,410	0,005	1,420	0,001	0,2123822249
14,28	0,05	0,05	1,428	0,005	1,420	0,001	-0,1326865747
14,40	0,03	0,04	1,440	0,003	1,420	0,001	0,5602861717

## 4.2 Gráficos

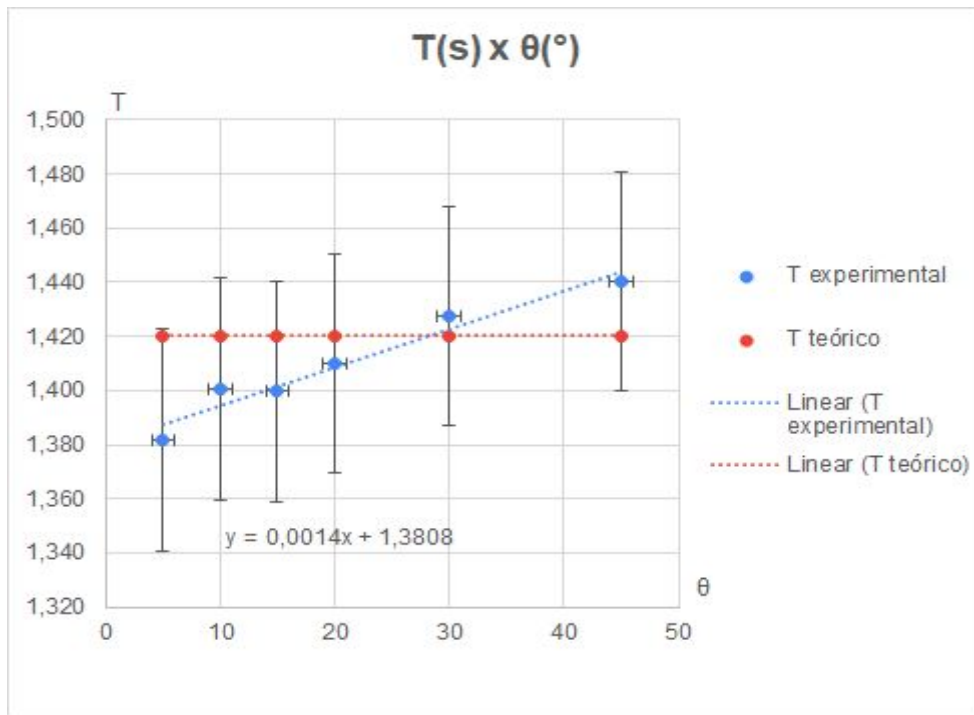


incertezas nos coeficientes?

(4.2.1) - Gráfico do período T em função da raiz do comprimento do fio, L.

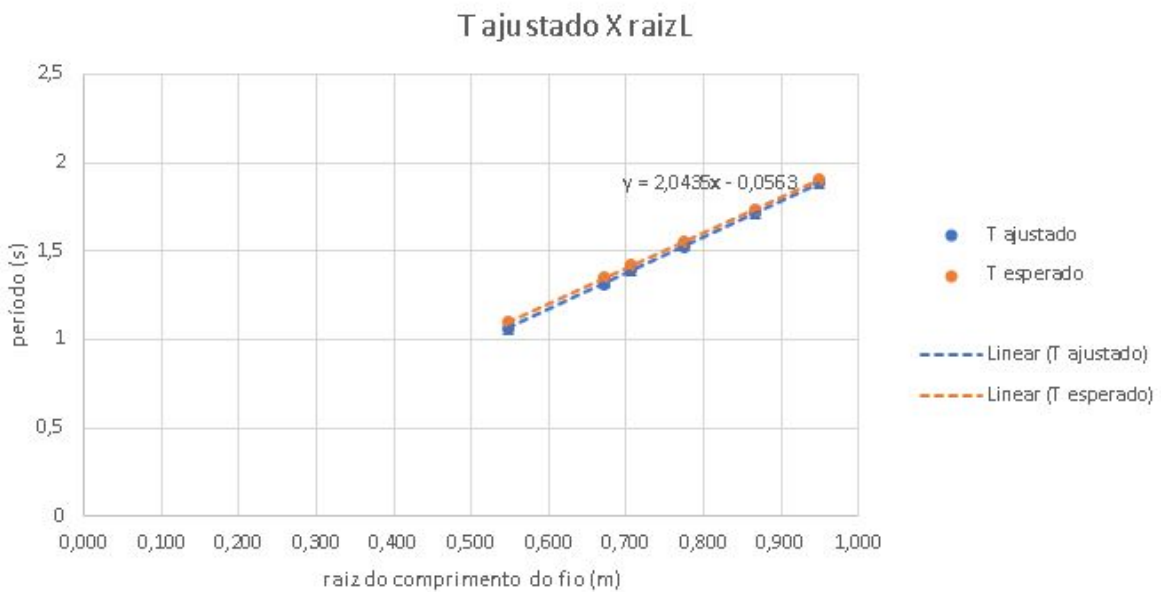
(OBS: as incertezas são menores que a menor divisão do gráfico e, por isso, não aparecem)

o que foi ajustado manualmente e o que foi ajustado por MMQ?



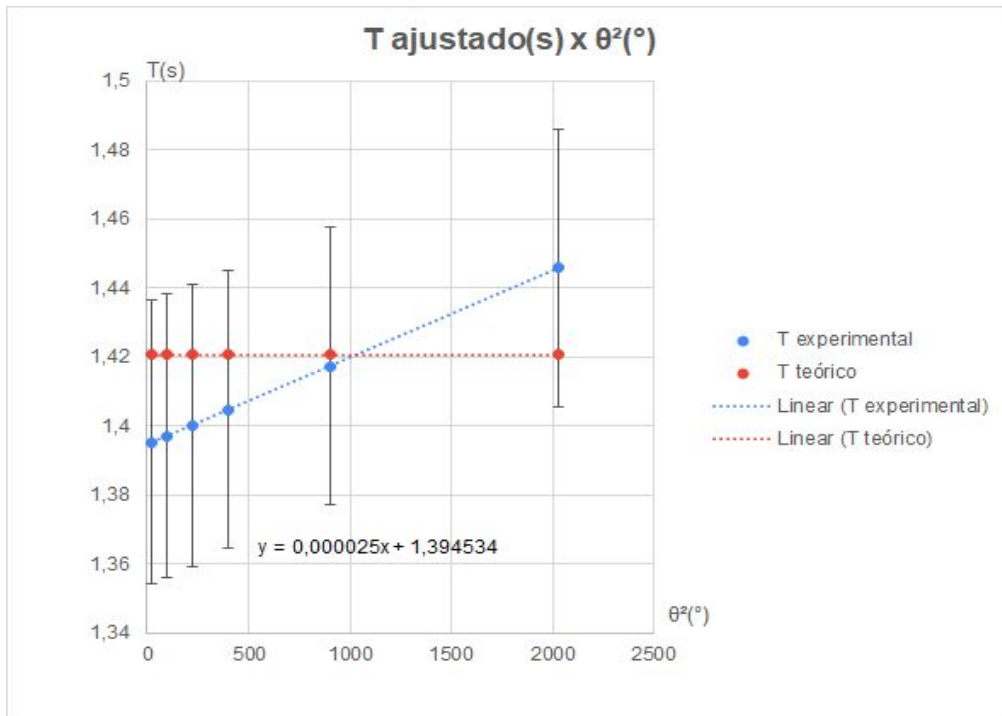
(4.2.2) - Gráfico do período T em função da amplitude do ângulo,  $\theta$ .

gráfico vai na análise



(4.2.3) - Gráfico ajustado do período T em função da raiz do comprimento do fio, L.

(OBS: as incertezas são menores que a menor divisão do gráfico e, por isso, não aparecem)



(4.2.4) - Gráfico ajustado do período T em função da amplitude do ângulo,  $\theta$ .

### 4.3 Cálculos e análise de dados

O experimento foi, basicamente, dividido em três partes. Primeiramente, buscamos determinar o valor da aceleração da gravidade local. Depois, a determinação experimental da dependência do período com o comprimento do fio e, por fim, a determinação experimental da dependência do período com o ângulo inicial de lançamento do corpo.

Na primeira parte, usamos como ponto de partida a equação (2.1), em que o período tem como única variável L. Portanto, uma vez que se estabelece um comprimento de fio fixo, pode se estabelecer um valor para g, da seguinte forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (4.3.1)$$

O maior problema, porém, está em estabelecer uma incerteza para o valor estimado. Para tanto, foi preciso propagar as incertezas tanto do período T, quanto do comprimento do fio, L. Assumindo g como descrito pela equação (4.3.1), as incertezas foram propagadas da seguinte forma:

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2$$



Apesar de parecer assustador, uma vez que se façam as derivadas parciais corretamente, temos uma equação em que todos os valores são conhecidos.

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^3}\right)^2 \sigma_T^2 \Rightarrow \sigma_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^3}\right)^2 \sigma_T^2} \quad (4.3.2)$$

Dessa forma, atribuindo para cada parâmetro o seu valor, foi possível estabelecer uma incerteza para o valor estimado da aceleração da gravidade.

Outra forma de estimar o valor para g seria através da média ponderada dos períodos medidos em (IV). O cálculo se daria pela razão da somatória da gravidade atribuída a cada média de um período para cada comprimento L vezes um fator P pela somatória de P's. Ou seja:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i x_i}{\sum_{i=1}^m p_i}$$

entendi o que fez...

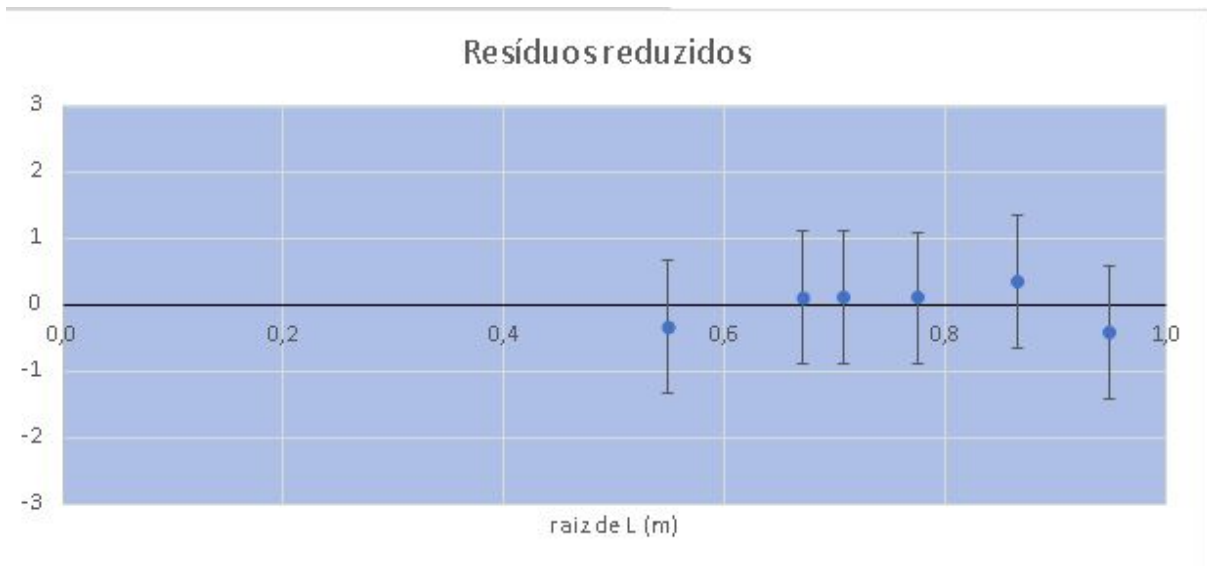
Na segunda parte, fizemos uma breve comparação da equação (2.1) com a equação de ajuste de reta para o período em função do comprimento do fio  $T=a\sqrt{\ell}+b$ , em que  $a$  é o coeficiente angular da reta e  $b$ , o coeficiente linear. Ou seja, esperava-se que

$$(4.3.3) \quad a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad e \quad b = 0$$

Após recolhidos os dados e estabelecido o valor médio para um período ( $T_1$ ), procuramos definir uma incerteza para  $\sqrt{\ell}$ . Para tanto, através de propagação de incertezas, foi encontrada a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \sigma_{\sqrt{L}}^2 &= \left(\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \Rightarrow \sigma_{\sqrt{L}}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{L}}\right)^2 \sigma_L^2 \\ \sigma_{\sqrt{L}}^2 &= \left(\frac{\sigma_L}{2\sqrt{L}}\right)^2 \Rightarrow \sigma_{\sqrt{L}} = \frac{\sigma_L}{2\sqrt{L}} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Uma vez definida a variável e sua incerteza, através da redução de resíduos, tentamos definir os coeficientes angular e linear da reta, compará-los e observar se eram coerentes ou não com o esperado em (4.3.3), obtendo os seguintes resultados:



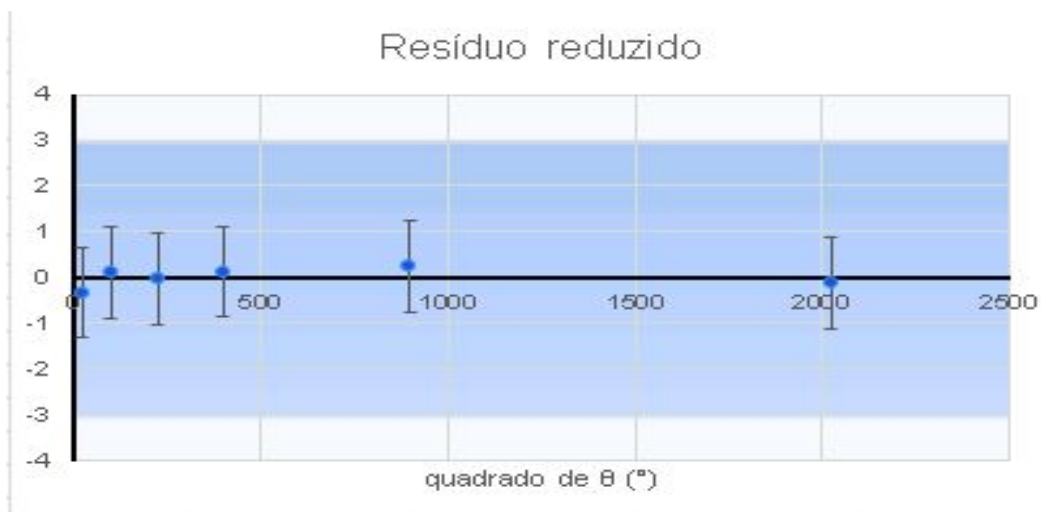
(4.3.5)

(OBS: os gráficos e o MMQ foram construídos com os dados das tabelas IV e V)

Na terceira parte, por fim, supondo  $T=\alpha+\beta\theta^2$ , através do Método dos Mínimos Quadrados, foi determinada a dependência do período T em função da amplitude de oscilação  $\theta$  de forma experimental (4.2.4). O procedimento fora semelhante ao anterior, mantiveram-se todos os parâmetros fixos, com exceção de  $\theta$  e foram coletados 6 medições em um intervalo de 10 períodos para cada ângulo de oscilação, foram tiradas as médias dessas medidas e calculou-se o período de 1 oscilação. A incerteza em  $\theta$  fora estimada em  $\pm 1^\circ$ . Assim:

$$\alpha = 1,39 \pm 0,02$$

$$\beta = 0,00003 \pm 0,00002$$



(4.3.6)

(OBS: os gráficos e o MMQ foram construídos com os dados das tabelas VI e VII)

Assim, é possível perceber que o comportamento do período é o esperado pela teoria, isto é, a natureza interna dos dados se comporta de forma parecida com o esperado, portanto, confirma que o modelo funciona tanto para pequenas amplitudes, quanto para amplitudes maiores.

## 5. DISCUSSÃO

Na primeira parte do experimento foi deduzido o valor da gravidade local, utilizando os dados da tabela (I). A partir do resultado obtido para um período e com os valores dos parâmetros já conhecidos foi possível concluir a aceleração da gravidade local segundo a equação (4.3.1) e sua incerteza foi estimada através da expressão (4.3.2). Portanto, fazendo o teste  $Z$ , comparando os valores teórico, experimental e as incertezas da gravidade, uma vez que o resultado foi  $\leq 3$ , pode-se concluir que o resultado encontrado é congruente com o valor de laboratório.

Adiante, através do Método de Mínimos Quadrados, foi possível estabelecer valores para os coeficientes angular ( $a$ ) e linear ( $b$ ) do ajuste de reta e, com isso, verificar a dependência (ou não) do período com o comprimento do fio e compará-los com a equação (2.1). Obtendo os seguintes resultados:

$$a = 2,04 \pm 0,09$$

$$b = -0,06 \pm 0,07$$

Comparando com a equação inicial e tendo os valores dos coeficientes teóricos explicitados em (4.3.3), podemos concluir que os resultados obtidos experimentalmente para averiguar a dependência de  $T$  com  $L$  concordam com os resultados obtidos teoricamente, uma vez que os valores de  $a$  e  $b$  convergem bastante. De acordo com o teste  $Z$  realizado com os coeficientes angulares e lineares, o resultado obtido foi  $\leq 1$ .

Finalizando, analisando os dados experimentais, conclui-se que a aproximação de pequenos ângulos vale para a amplitude inicial maior ou da ordem de  $25^\circ$ , já que os dados de tais amplitudes com suas incertezas, de acordo com (4.2.2), (4.2.4) e (4.3.6), estão dentro do espectro do resultado teórico.

comparação entre  
valores medidos e  
valor teórico?

## 6. CONCLUSÃO

Relembrando os objetivos buscados pelo experimento, podemos tirar uma série de conclusões, entre elas: verificamos a dependência do período com os parâmetros de comprimento e amplitude; determinamos, empiricamente, valores coerentes para a aceleração local da gravidade; não foi possível determinar limites de validade para as hipóteses iniciais.

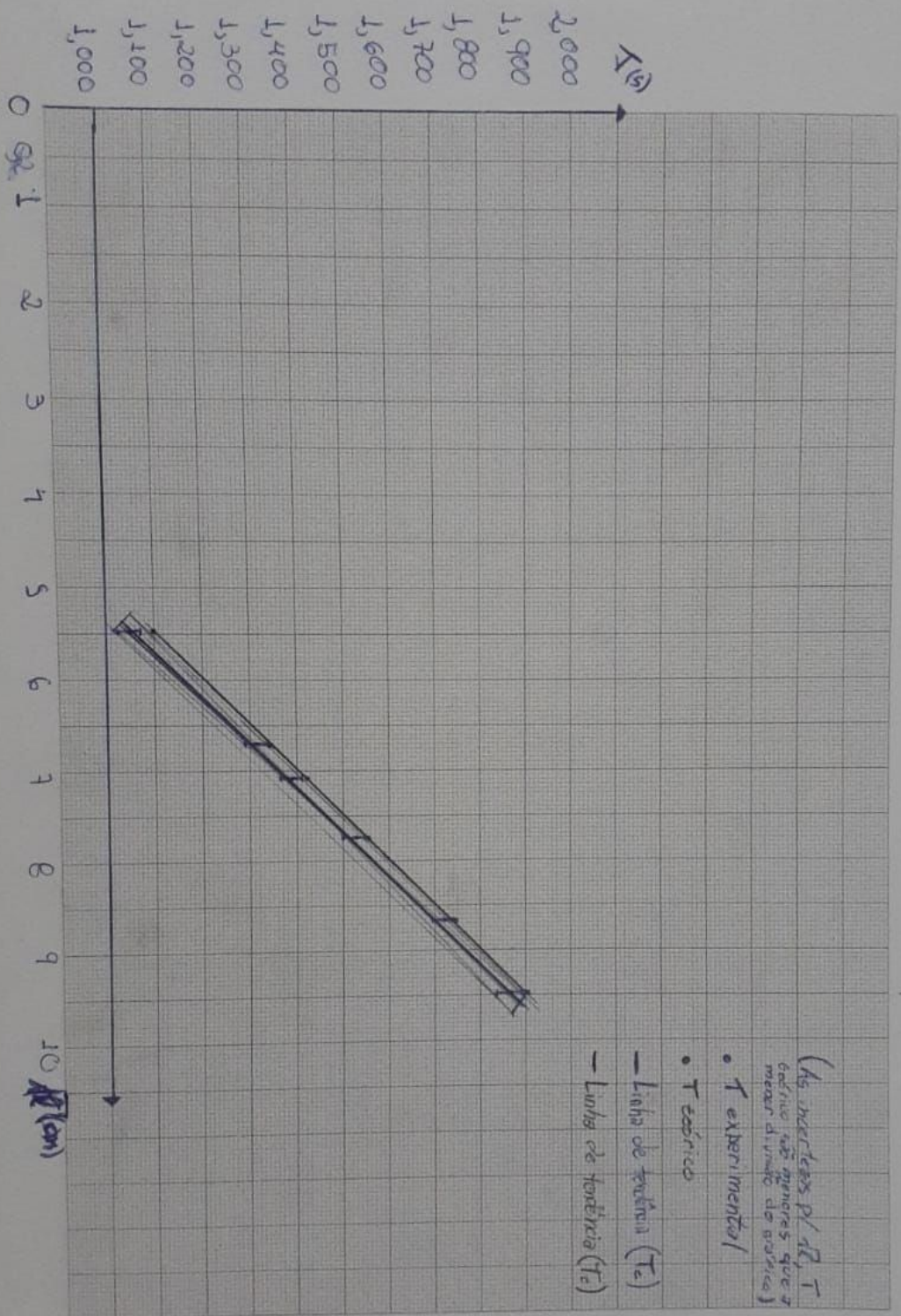
Guiados pela equação (2.1), concluímos a dependência do período com o comprimento do fio, o que era esperado. Concluímos, também, a dependência do período com a amplitude, que faz sentido para baixos ângulos iniciais, uma vez que foi assumido a aproximação de  $\text{sen}\theta = \theta$ . Porém, a

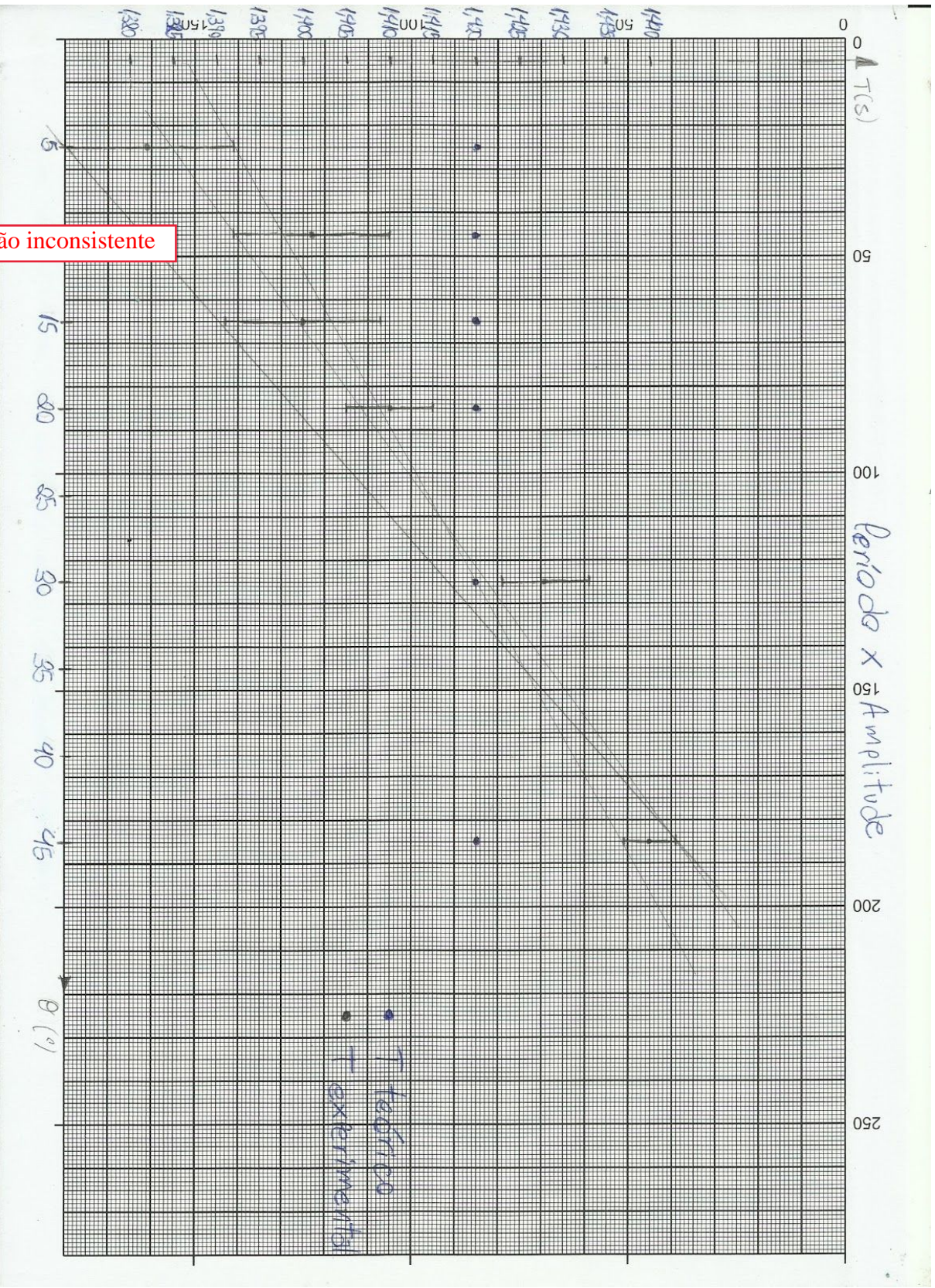
aproximação é válida apenas para ângulos baixos, já que tal aproximação não é válida para todos os ângulos. O que pode explicar a diferença entre os resultados obtidos e o esperado para o experimental é a dificuldade de leitura e obtenção dos dados, bem como a incerteza estatística na cronometragem dos tempos de oscilações do pêndulo.

Além disso, os valores de aceleração local da gravidade experimentais convergiram para o valor teórico esperado.

E, por fim, não foi possível determinar os limites de validade para as hipóteses iniciais, já que estas dependiam da invalidade da aproximação para ângulos grandes, que não foi dada pelos dados obtidos.

# Período ( $T$ ) $\times$ ( $\sqrt{L}$ ) Comprimento





região inconsistente

$T_{\text{teórico}}$   
 $T_{\text{experimental}}$