

97

7,7

Síntese: Eventos Aleatórios
 Licenciatura Diurna - Laboratório de Mecânica

Priscylla Guadagnoli Igor Oliveira Leonardo Lettieri
 Nº USP: 11011782 Nº USP: 11223799 Nº USP: 11223628
 Março, 2020

O presente documento visa realizar uma análise sobre um experimento requerido na disciplina de Laboratório de Mecânica. O texto descreve uma explicação do aparato experimental, apresentação de gráficos e informações quantitativas, que serão utilizadas para constituir uma discussão sobre o experimento abordado.

1 Descrição Experimental

O experimento consiste em duas caixas contendo oito dados cada uma. Os dados possuem seis faces, sendo quatro delas brancas e duas com um ponto negro. Uma das caixas possui dados com faces pontuadas adjacentes e a outra possui dados com faces pontuadas diametralmente opostas. Os oito dados de cada caixa foram juntamente jogados, anotando-se a quantidade de faces pontuadas. Este procedimento foi feito, inicialmente, dez vezes e cinquenta vezes. Por fim, para aumentar a base de dados, foram lançados duzentas vezes os dados de cada caixa.

(8)

Alguns

7,7

2 Dados Experimentais

A média experimental é a somatória do produto entre o número de sucessos e a frequência relativa para um dado sucesso, sendo representada a seguir:

$$\langle i \rangle_{exp} = \sum_{i=0}^n i F_n(i) \quad (1)$$

Através dos dados experimentais coletados para cada conjunto N de jogadas, é possível inferir uma probabilidade experimental P_{exp} . Esta grandeza é calculada a partir da média dos valores obtidos, dado pela Equação 1, sobre a quantidade de tentativas (n) por jogada. Assim-se então:

$$P_{exp} = \frac{\langle i \rangle_{exp}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i F_n(i) \quad (2)$$

Os dados para a probabilidade experimental P_{exp} obtida para os conjuntos de $N = 10$, $N = 50$, $N = 200$ e $N = 600$ em conjunto das suas respectivas incertezas, são apresentados a seguir:

N=10	Opostas	Adjacentes	Opostas
Probabilidade Exp.	0.3	0.3	0.4
Incerteza da Média	0.1	0.1	0.4

N=50	Opostas	Adjacentes	Opostas
Probabilidade Exp.	0.4	0.3	0.3
Incerteza da Média	0.2	0.2	0.2

N=200	Opostas	Adjacentes	Opostas
Probabilidade Exp.	0.35	0.34	0.36
Incerteza da Média	0.09	0.09	0.09

N=600	Todos os dados
Probabilidade Exp.	0.35
Incerteza da Média	0.05

3 Resultados e Gráficos

Utilizando da análise combinatória e de métodos estatísticos é possível desenvolver a função de probabilidade binomial (probabilidade esperada), em que a probabilidade para sucesso p é sempre a mesma para qualquer lance, a quantidade de tentativas é n e é instituído um determinado sucesso, neste caso entre 0 e 8 ($0 \leq i \leq 8$). Tem-se então:

$$P_n(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (3)$$

Através da Equação 3 é possível desenvolver a tabela a seguir, contendo as probabilidades esperada para um determinado i sucesso, assim:

Esperado	i	$P_n(i)$
0	0	0.0390
1	1	0.1561
2	2	0.273
3	3	0.2731
4	4	0.17
5	5	0.0683
6	6	0.017
7	7	0.0024
8	8	0.00015

Tabela 1 contendo as probabilidades esperadas para i .

Com intuito de expor uma análise experimental dos três diferentes conjuntos de dados é desenvolvido tabelas-resumo que inclui dados do número de sucesso i , número de ocorrência (N_i) e frequência relativa (F_i). As tabelas a seguir são referentes aos três conjuntos de dados: $N = 10$, $N = 50$ e $N = 200$, respectivamente.

Dados Experimentais									
N=10	Oposta		Adjacente		Oposta		Teórico		Pn(i)
	i	Ni	Fi	Ni	Fi	Ni	Fi		
0	0	0	1	0.1	0	0	0.039		
1	0	0	0	1	0.1	0.16			
2	5	0.5	4	0.4	1	0.1	0.27		
3	4	0.4	1	0.1	3	0.3	0.27		
4	0	0	4	0.4	4	0.4	0.17		
5	1	0.1	0	0	1	0.1	0.068		
6	0	0	0	0	0	0	0.02		
7	0	0	0	0	0	0	0.002		
8	0	0	0	0	0	0	0.0002		

Tabela 2 - Apresentação dos dados do experimento jogado dez vezes.

Dados Experimentais									
N=50	Oposta		Adjacente		Oposta		Teórico		Pn(i)
	i	Ni	Fi	Ni	Fi	Ni	Fi		
0	3	0.06	2	0.04	1	0.02	0.039		
1	4	0.08	11	0.22	9	0.18	0.156		
2	13	0.26	11	0.22	15	0.3	0.273		
3	13	0.26	10	0.20	18	0.36	0.273		
4	11	0.22	10	0.20	5	0.1	0.171		
5	4	0.08	3	0.06	2	0.04	0.068		
6	1	0.02	3	0.06	0	0	0.02		
7	1	0.02	0	0	0	0	0.002		
8	0	0	0	0	0	0	0.0002		

Tabela 3 - Apresentação dos dados do experimento jogado cinquenta vezes.

Dados Experimentais									
N=200	Oposta		Adjacente		Oposta		Teórico		Pn(i)
	i	Ni	Fi	Ni	Fi	Ni	Fi		
0	6	0.03	10	0.05	6	0.03	0.039		
1	24	0.12	27	0.135	22	0.11	0.16		
2	59	0.295	54	0.27	55	0.275	0.27		
3	50	0.25	52	0.26	57	0.285	0.27		
4	42	0.21	43	0.215	35	0.175	0.1707		
5	15	0.075	10	0.05	20	0.1	0.0683		
6	3	0.015	4	0.02	5	0.025	0.0171		
7	1	0.005	0	0	0	0	0.0024		
8	0	0	0	0	0	0	0.0002		

Tabela 4 - Apresentação dos dados do experimento jogado quatrocentas vezes.

Para analisar os dados experimentais obtidas para cada conjunto de N lançamentos, utiliza-se métodos estatísticos, tais como: média, desvio padrão e incerteza da média.

A média é dada pela soma dos k -ésimos termos de um conjunto dividido pela quantidade de jogadas (N). Pode ser, também, calculada através da Equação 1. A equação da média é dada por:

$$\langle i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N i_k \quad (4)$$

A partir da Equação 4 exposta a cima, é possível desenvolver uma análise sobre a média de cada conjunto de dados. Desta forma:

Opostas	Adjacentes	Opostas	
N=10	2.70	2.70	3.30
N=50	2.92	2.72	2.46
N=200	2.80	2.69	2.87

Tabela 5 - Informações da média para um determinado conjunto de jogadas.

O desvio padrão experimental é um método estatístico para analisar a dispersão dos dados em relação a média do este conjunto de dados. A equação que determina o desvio padrão é designada a seguir:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (i - \langle i \rangle)^2 N_i} \quad (5)$$

Tem-se também o desvio padrão esperado que é calculado da seguinte fórmula:

$$\sigma_e = \sqrt{np(1-p)} \quad (6)$$

Para um número de lançamento $n=8$ e probabilidade de obter faces pontuadas seja $p = 1/3$, pode-se concluir que o desvio padrão esperado é $\sigma_e = 1,33$. Utilizando da Equação 5 é possível interpretar a homogeneidade de um conjunto N de lançamentos. A tabela a seguir apresenta informações sobre o desvio padrão dos conjuntos de dados experimentais:

Opostas	Adjacentes	Opostas	
N=10	0.95	1.34	1.16
N=50	1.48	1.55	1.09
N=200	1.32	1.33	1.33

Tabela 6 - Grandezas relativas ao mesmo padrão de $1/3$ em conjuntos de dados.

A incerteza da média ou desvio padrão de média é dado pelo quociente entre o desvio padrão dos dados experimentais e da raiz quadrada do número de jogadas (N) de um determinado conjunto de dados. Assim:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (7)$$

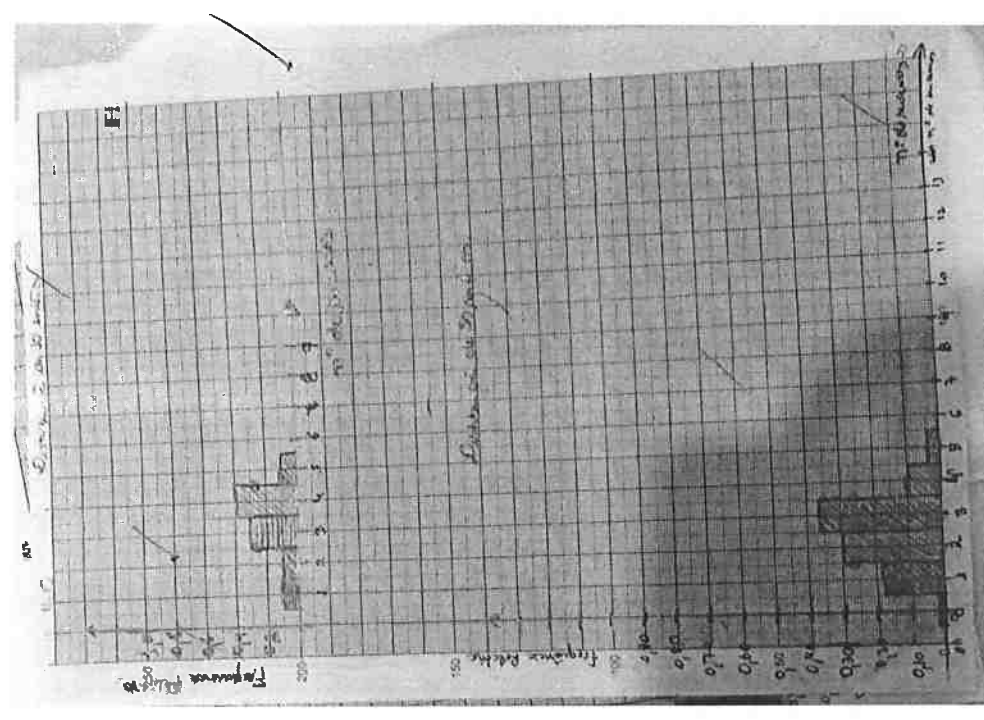
Através da Equação 7 é possível expressar o desvio padrão da média. A tabela a seguir apresenta a incerteza da média de cada conjunto de dados experimentais, além do desvio padrão de média esperado:

TSR
 1. RMI = 0.42
 0.42 = 0.42

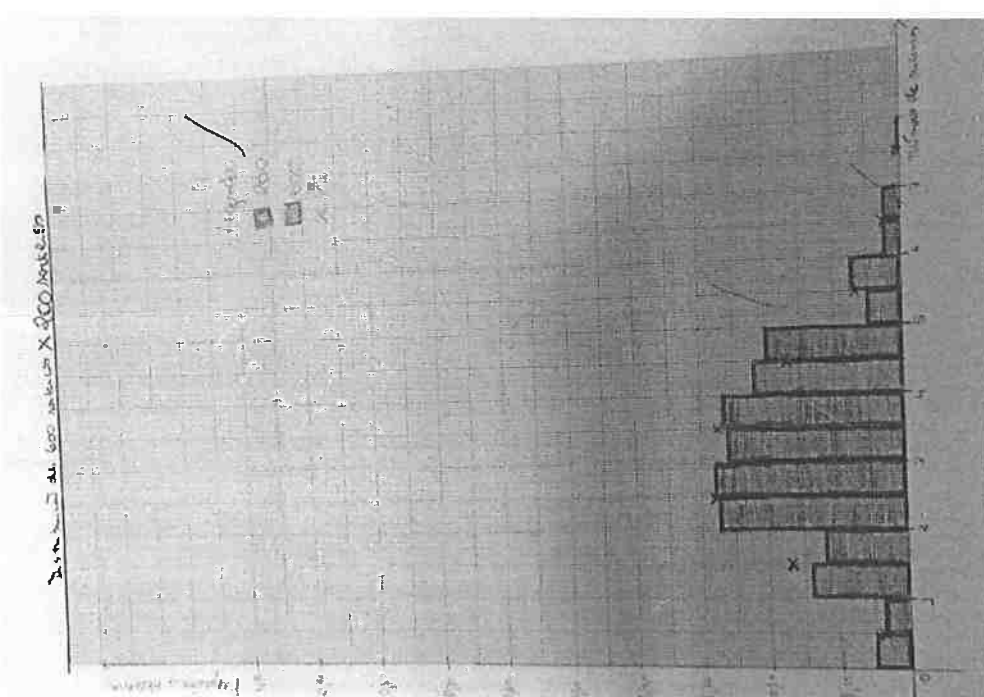
	Opostas	Adjacentes	Opostas	Esperado
N=10	0.30	0.52	0.37	0.42
N=50	0.21	0.22	0.15	0.19
N=200	0.003	0.004	0.004	0.004

Tabela 7 - Dados do teste para a hipótese de independência e esperados.

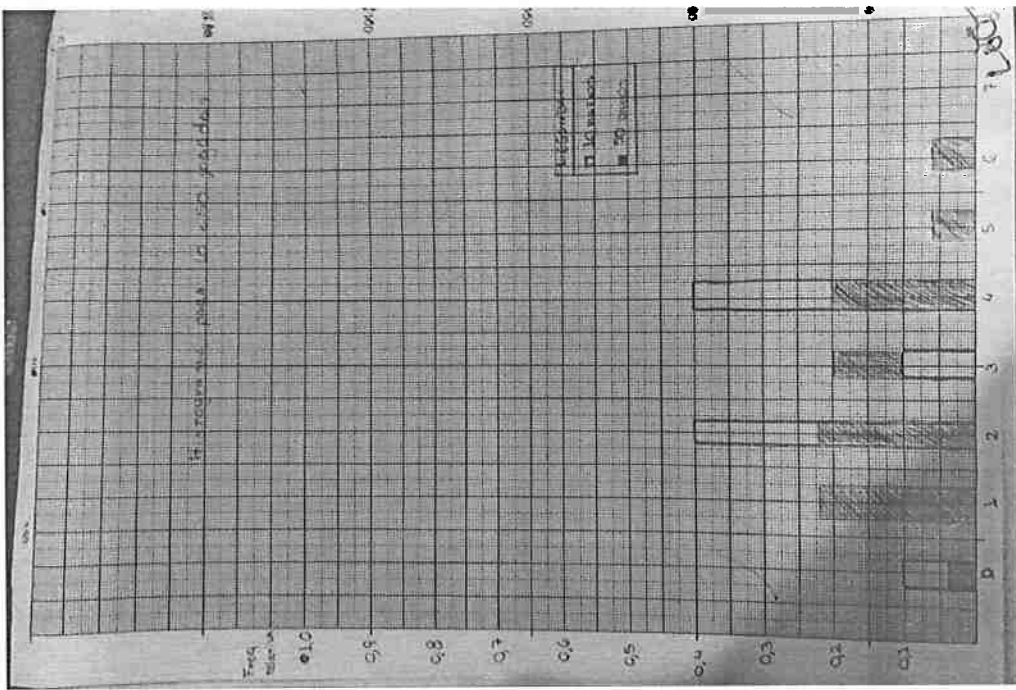
A seguir são apresentados os histogramas produzidos por cada integrante do grupo para N = 10, N = 50, N = 200 e N = 600.



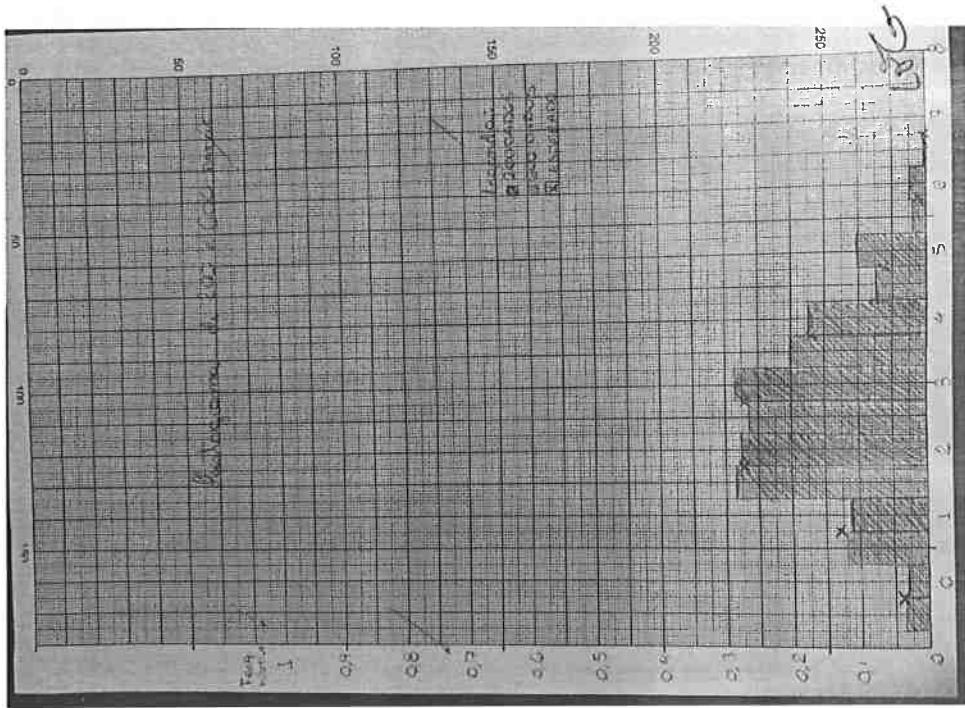
Histograma 1 - Apresentação dos dados da frequência relativa por sucesso para N=10 e para N=50. Autor(a): Priscyla Guadagnoli.



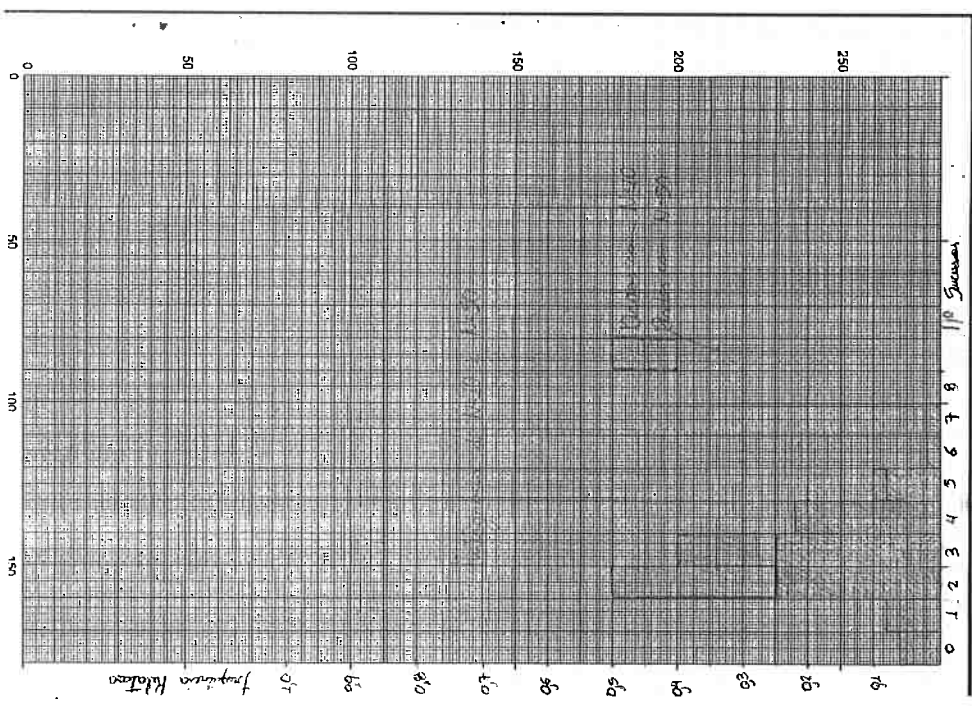
Histograma 2 - Apresentação dos dados da frequência relativa por sucesso para N=200 e para N=600, assim como a probabilidade esperada. Autor(a): Priscyla Guadagnoli.



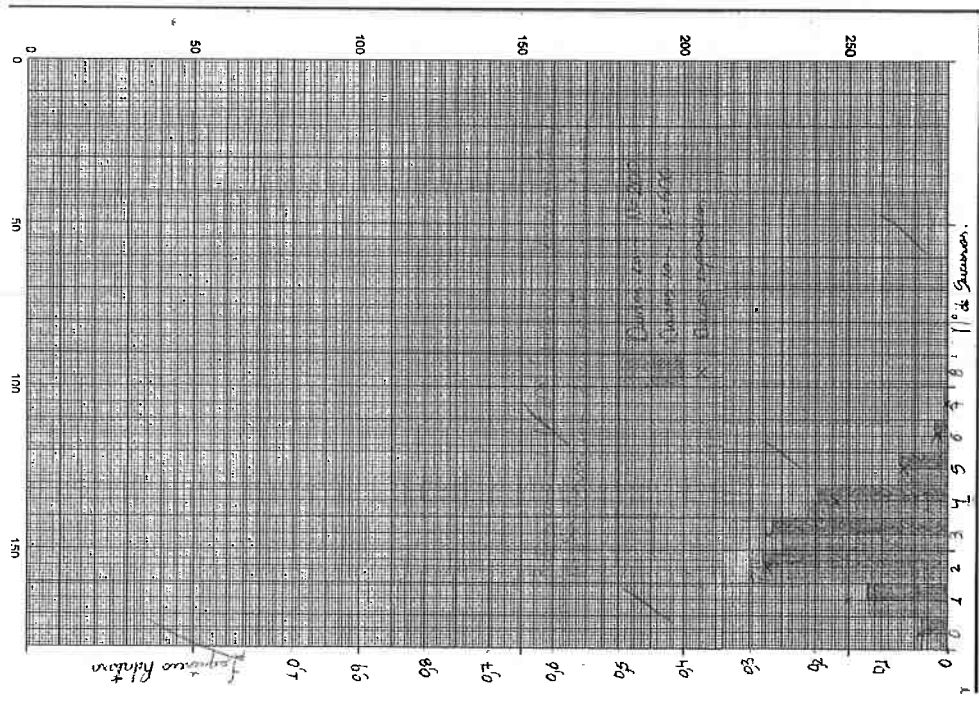
Histograma 1 - Apresentação dados da frequência relativa por um dado sucesso para $N=10$ e para $N=50$.
Autor(a): Leonardo Lettiere.



Histograma 2 - Apresentação dados da frequência relativa por sucesso para $N=200$ e para $N=500$, assim como a probabilidade esperada. Autor(a): Leonardo Lettiere.



Histograma 5 - Apresenta dados da frequência relativa por um dado sucesso i para $N=10$ e para $N=50$.
Autor(a): Igor Oliveira.



Histograma 6 - Apresenta dados da frequência relativa por sucesso para $N=200$ e para $N=600$, assim como a probabilidade esperada. Autor(a): Igor Oliveira.

4 Discussão

A partir do rearranjo dos dados em forma de tabela e histogramas, é possível fazer uma análise quantitativa das informações obtidas através do experimento e, conseqüentemente, comparar com dados esperados, ou seja, oriundos da equação probabilística binomial. Com base nos dados calculados e obtidos experimentalmente, tem-se uma inquirição de forma qualitativa, vislumbrando o significado das grandezas expostas.

Sabendo que os dados utilizados no experimento possuem seis faces, sendo duas delas pontuadas (sucesso) e quatro vazias (fracasso), a probabilidade de sucesso p esperada seria de $1/3$. A seção **Dados Experimentais** apresenta dados para a probabilidade experimental (obtida através dos dados experimentais), assim como seu respectivo desvio padrão da média, para diferentes quantidades de jogadas N . Quando o número de jogadas aumenta os dados para a probabilidade experimental de jogadas N tornam-se mais próximos do valor esperado ($1/3 = 0,333$), além de obter uma incerteza menor. Quando se tem uma quantidade de seiscentas jogadas ($N = 600$), o desvio padrão da média é mínimo, comparada com as demais incertezas, e a probabilidade experimental é bem próxima da esperada ($p = 0,35$). Uma característica importante de se observar é que as informações obtidas através dos dados de faces adjacentes apresentam uma maior compatibilidade com a grandeza esperada para a probabilidade de sucesso, em comparação com os dados caracterizados com faces opostas.

A influência da quantidade de jogadas para obter uma melhor representação da probabilidade experimental (idêntica à esperada) é perceptível, assim é possível desenvolver um melhor resultado em relação as grandezas probabilísticas. Por conta da quantidade de jogadas não ser grande o suficiente, os dados para uma quantidade de sucessos 7 e 8 são superestimados, não havendo informações suficientes para deferir uma veracidade nas probabilidades experimentais mencionadas nas Tabelas 2, 3 e 4.

Através da análise dos histogramas, expostos na seção **Resultados e Gráficos**, foi possível observar que a distribuição dos 200 e 600 lançamentos resultaram em valores experimentais cada vez mais próximos das probabilidades esperadas. Assim, pode-se relatar que, conforme o número de jogadas aumenta, os dados experimentais se aproximam dos dados teóricos. Este pensamento pode ser melhor fundamentado a partir da Tabela 6, em que o desvio padrão dos diferentes conjuntos experimentais de dados se aproximam cada vez mais do desvio padrão relativo a expressão da probabilidade binomial, determinada pela Equação 6. Assim, para uma grande quantidade de jogadas tem-se uma homogeneidade dos dados parecida com a distribuição binomial, ou seja, a dispersão dos dados experimentais e esperados são semelhantes.

Os histogramas feitos por cada aluno possuem um formato parecido, com dados, em sua maioria, localizados próximos do número de sucessos em 2 e 3. Isto ocorreu excepcionalmente por conta da maior probabilidade de obter fracassos ($2/3$). Fica mais claro estas ideias quando vislumbram-se as Tabelas 2, 3 e 4, em que o maior número de ocorrências (N_i) acontecem, majoritariamente, para sucessos 1 em 2 e 3. Por fim, analisando o histograma com $N = 600$ jogadas, percebe-se a mesma tendência analisada nos histogramas de menor número de jogadas, notando que o histograma com seiscentas jogadas apresenta uma maior proximidade dos valores esperados, onde sua média e desvio padrão experimentais são bem próximos da distribuição binomial esperada.

comparar
comparar