Experimento 2

Pêndulo Simples

Considere um pêndulo simples feito com um objeto dependurado em um fio, cuja massa é muito menor que a do objeto, de modo que o centro de massa do sistema fio+objeto praticamente coincide com o centro de massa do objeto.

Modelo do ponto material com pequenas oscilações e sem atrito

Nas condições acima, quando as oscilações tem amplitude pequena e ignora-se o atrito com o ar, o período T do pêndulo simples pode ser calculado como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (2.1)$$

onde g é a aceleração da gravidade local e ℓ, a distância entre o centro de rotação e o centro de massa do objeto.

Essa fórmula depende da validade das hipóteses; se elas forem violadas, a fórmula correta poderá depender de outras grandezas além de ℓ e g, como a amplitude do movimento, a massa e volume do objeto dependurado ou, ainda, ter uma dependência com o comprimento mais complicada que a da fórmula (2.1).

Neste laboratório, vamos realizar experimentos que permitam estabelecer limites de validade de algumas das hipóteses. Teremos à disposição duas aulas para realizar as atividades experimentais e mais uma para análise dos resultados.

Procedimento Experimental

Será necessário tomar certos cuidados na montagem do equipamento e nas medições para que os resultados experimentais possam ser interpretados corretamente. Em uma disciplina com mais créditos, um dos objetivos das aulas seria permitir a(o)s estudantes que percebessem seus equívocos depois da análise e repetissem a experiência, então, tomando as devidas precauções, mas nossos 2 créditos limitam-nos a acertar o experimento *de primeira*. Assim, relacionamos abaixo alguns dos cuidados essenciais no uso deste equipamento e que não são evidentes.

i) Embora não haja como evitar o atrito com o ar, é possível e necessário evitar o atrito do fio com o transferidor. Se o fio encosta no transferidor quando o pêndulo oscila, o movimento resultante estará mais longe de ser harmônico e vai requerer um modelo mais complicado para sua descrição. Assim, se você, depois de lançar o pêndulo, perceber que o fio encosta no transferidor, interrompa o movimento e lance-o de novo. Manter o suporte ligeiramente inclinado para frente um ou dois graus ajuda a evitar esse contato e não compromete a leitura do ângulo de oscilação no transferidor, que tem baixa precisão mesmo.

ii) O comprimento do fio precisa ser medido em todos os ensaios. Como o fio está preso por um imã, ele pode deslocar-se com a força de tensão no fio, que aumenta consideravelmente com o movimento circular do corpo suspenso. Assim, pode acontecer que o movimento durante as cronometragens desloque o imã, o que faz com que o período mude ao longo das repetições sucessivas. Desde que esse aumento do comprimento é indetectável a olho nu, deve-se medir o comprimento do fio antes de começar as cronometragens e depois de finalizá-las. Caso a diferença observada supere 3 mm, descarte os dados e repita a cronometragem.

Aula 1:

(1) Determinação experimental da aceleração da gravidade.

a) Medir o período do pêndulo em seis medições (de 20 oscilações cada) para oscilações de pequena amplitude (Θ<10) com comprimento ℓ=60 cm.

b) Determinar o valor médio da aceleração da gravidade, *g*, e sua incerteza, mediante o procedimento de propagação de incertezas.

(2) Determinação experimental da dependência do período *T* em função de ℓ: *T*(ℓ)

a) Medir o período de oscilação para, pelo menos, mais cinco comprimentos ℓ diferentes entre si e daquele usado no item anterior, com um mesmo ângulo inicial apropriado. Escolha tamanhos bem espalhados entre ℓ=30cm e 120cm adequados ao seu arranjo experimental.

b) Fazer um gráfico de *T* vs. $\sqrt{\ell}$ com as respectivas incertezas e sobrepor a função teórica esperada. Pense em como você poderia escolher os comprimentos para que *este* gráfico tenha pontos espaçados igualmente.

Aula 2:

(3) Determinação experimental da dependência do período de oscilação *T* em função da amplitude inicial da oscilação: $T(\theta_o)$

Antes de iniciar este procedimento, alinhe o zero do transferidor com o fio, de modo a poder medir as amplitudes dos movimentos com mais facilidade. Escolha uma das massas disponíveis que seja grande e deixe o fio com um comprimento de cerca de 60cm, de modo que o atrito com o ar seja relativamente menos importante, mesmo quando a amplitude for grande.

a) Medir o período para amplitudes iniciais θ_o de 5º, 10º, 15º, 20º, 25º e 30º. Cronometre 10 períodos de cada vez (6 repetições pelo menos para cada ângulo). Embora não seja possível realizar todos os lançamentos da mesma condição inicial de modo idêntico, procure reproduzir a amplitude inicial dentro de mais ou menos um grau, nas repetições sucessivas. Para cada conjunto de cronometragens relativas a um valor de θ_o, anote a amplitude no início e no fim da cronometragem e adote metade da diferença de um deles como incerteza e a média de todos como amplitude da oscilação.

b) Fazer um gráfico, em papel milimetrado, de $T(\theta_o)$, indicando os valores de *T* medidos e suas respectivas incertezas. Sobrepor a função teórica esperada para oscilações de pequena amplitude.

(4) Determinação experimental da dependência do período em função da massa do objeto: $T(m)$

a) Pesar objetos de massas diferentes.

b) Medir o período de oscilação T para cada objeto com comprimentos ℓ próximos, dentro de um ou dois cm. Você tem duas opções:

i. Escolher um ângulo inicial tal que o atrito com o ar não desempenhe um papel muito importante e que a aproximação de pequenos ângulos valha.

ii. Deixar o fio bem comprido e usar uma amplitude grande, para ver se a massa desempenha algum papel pelo atrito com o ar.

c) Fazer um gráfico de $T(m)/\sqrt{\ell}$ com as respectivas incertezas. Sobrepor a função teórica na aproximação de pequenas oscilações.

Relatório:

o

- Especificação dos objetivos do trabalho prático.
- Uma introdução teórica que seja breve, mas que inclua a dedução da equação (2.1) e indique quais são as condições experimentais sob as quais ela é válida.[1]
- Os materiais usados e a descrição do experimento realizado.
- Os resultados experimentais, usando gráficos e tabelas, devidamente numerados e legendados. Não se esqueça de marcar valores igualmente espaçados nos eixos dos gráficos, bem como as unidades das grandezas representadas. Nas tabelas, toda a informação que valha para uma coluna inteira, como por exemplo a unidade, deve vir na primeira linha. As legendas dos gráficos devem ficar embaixo da figura e as das tabelas, acima delas.
- Determinação de g a partir do período medido no item (**1**), inclusive com a discussão do procedimento de propagação de incertezas.
- Determinação de g a partir da *média ponderada* dos períodos medidos no item (**2**) (veja nota ao fim deste roteiro sobre o cálculo da média ponderada).
- Determinação experimental da dependência do período em função da amplitude de oscilação $\boldsymbol{\theta_0}$, supondo $T = \alpha + \beta {\theta_0}^2$ e sua comparação com a expectativa do modelo simplificado do início do guia.
- Determinação experimental da dependência do período em função do comprimento do pêndulo (ℓ), supondo que $T = a + b\sqrt{\ell}$ e comparação com o que é esperado pelo modelo de ponto material com pequenas oscilações sem atrito.
- Determinação experimental da dependência do período em função da massa, a partir *dos seus dados*, na hipótese de uma dependência linear do período com a massa, e comparação com o que é esperado pelo modelo simplificado do início do guia.

---

[1]Cuidado com uma demonstração que parte de um pêndulo que roda *em torno* do eixo vertical; temos recebido deduções com interpretações sem sentido, apesar de chegarem à fórmula correta.

- Discuta se:
    i. O valor da aceleração da gravidade concorda com o conhecido pela equipe de laboratório.
    ii. Os valores de g obtidos nos experimentos 2 a 4 concordam com o determinado no item 1.
    iii. A dependência do período com o comprimento concorda com a fórmula 1.
    iv. A aproximação de pequenos ângulos vale para amplitude inicial maior ou da ordem de 25º.
    v. O período depende da massa. Aqui, é vital que use SEUS DADOS. Um trabalho em que *todos* os dados experimentais coincidam com as expectativas dentro de um desvio-padrão provavelmente terá erros nos cálculos ou estará maquiado.
    vi. Em cada um desses casos, justifique sua resposta e, caso você conclua que a teoria de pequenas oscilações é inadequada, explique que fenômeno físico é o responsável por isso.
- Conclusões gerais do trabalho realizado.

Nota. <u>Cálculo da média ponderada</u>

A medida de uma grandeza física deve ser dada por uma estimativa do seu valor, *x*, acompanhada do respectivo desvio-padrão □, ou seja, na forma $x \pm \sigma$, como é detalhado no apêndice II. Em algumas situações, tais como a da medida de g a partir do período e do comprimento do fio do pêndulo no experimento realizado, temos mais de um valor experimental. Vamos representar o conjunto de dados de que dispomos por $\{(x_i, \sigma_i), i = 1..m\}$, em que o índice *i* refere-se a cada um dos *m* comprimentos de fio usados. Nesse caso, queremos reduzir esse conjunto a um único valor e uma única incerteza, que será a nossa medida experimental; parece (e é) muito razoável determinar a estimativa da grandeza a partir de uma média ponderada de *todas*[2] as medições,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

em que os pesos p_i devem ser relacionados às precisões dos dados, quantificados por meio dos desvios-padrões σ_i, de forma que pesem mais os dados de maior precisão, que são os de menor desvio-padrão – ou seja, os pesos são inversamente proporcionais aos desvios-padrões. A teoria da estatística ensina que o peso correto é

$$p_i = \frac{1}{{\sigma_i}^2}$$

que concorda com a ideia intuitiva de aumento de precisão com a diminuição do desvio-padrão, embora a dependência com o *quadrado* do desvio-padrão seja algo inesperado.

Assim, vamos representar todo o conjunto de dados $\{(x_i, \sigma_i), i = 1..m\}$ pelo par de valores $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ das fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{{\sigma_i}^2}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{{\sigma_i}^2}} \qquad e \qquad {\sigma_{\bar{x}}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{{\sigma_i}^2}}$$

que chamamos respectivamente de média e desvio-padrão da média. Dessas fórmulas, é relativamente fácil deduzir que o desvio padrão da média de *N* dados que têm o mesmo desvio-padrão σ deduzido na análise do experimento 1 do semestre – confira!

---

[2]Resista à tentação de jogar dados fora para ficar só com os que se acumulam no centro do histograma. Precisamos avaliar as incertezas e obter resultados que possam ser comparados aos de outros experimentadores e, para isso, temos que preservar o caráter aleatório do nosso valor em particular, que se perde ao selecionar resultados experimentais.