Módulo 2

Cláudio Santos de Souza
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Volume 2
2ª edição

Construções Geométricas

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Construções Geométricas

Volume 2 - Módulo 2
2ª edição

Cláudio Santos de Souza
Roberto Geraldo Tavares Arnaut
Manoela Barros Matos (colaboradora)

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL
Apoio:
FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente
Masako Oya Masuda

Vice-presidente
Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática
UFF - Celso José da Costa
UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Cláudio Santos de Souza
Roberto Geraldo Tavares Arnaut
Manoela Barros Matos (colaboradora)

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Carmen Irene Correia de Oliveira
Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Jane Castellani

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni
Fabio Muniz
Sami Souza

CAPA
Eduardo Bordoni
Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S729c

Souza, Cláudio Santos de
Construções geométricas. v.2 / Cláudio Santos de Souza. – 2.ed. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009.
159p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-89200-66-3

1.Construções Geométricas. 2. Quadriláteros. 3. Traçado de ovais. I. Pimenta, Milene Maria D. II. Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. III. Matos, Manoela Barros. IV. Título.

CDD: 516.15

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2009/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Construções Geométricas

Volume 2 - Módulo 2

SUMÁRIO

Aula 12 – Quadriláteros I

Objetivos

Construir quadrados, retângulos e losangos utilizando suas principais propriedades e recursos de construções de triângulos.

A construção de quadriláteros vai recair de forma natural na construção de triângulos, basta lembrar que sua diagonal o divide em dois triângulos.

Problema 1: Construir um quadrado sendo dado um lado.

Resolução:

Seja o lado AB dado do quadrado.

1.1 Pela extremidade A do lado traçar uma perpendicular ao lado;

1.2 Com centro em A e raio AB constrói-se uma circunferência que intercepta a perpendicular em um ponto C;

1.3 Com centro em C, e logo a seguir com centro em B, constrói-se duas circunferências de raios AB, que se interceptarão nos pontos A e D;

1.4 O quadrilátero $ABDC$ é um quadrado.

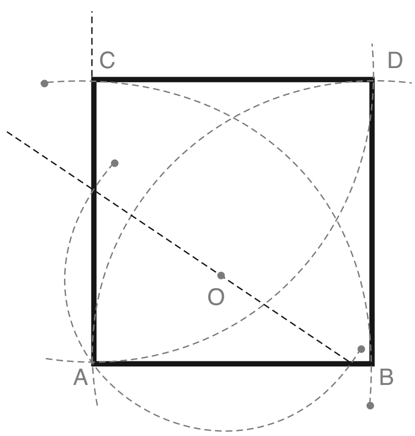


Figura 1

Justificativa: Note que os triângulos ABC e BDC são congruentes pelo caso L.L.L., e são triângulos retângulos isósceles. Logo os lados do quadrilátero $ABDC$ são iguais e seus ângulos internos são retos.

Sabe-se, pela Geometria Básica, que o apótema de um polígono regular é o segmento cujos extremos são o centro do polígono regular e o ponto médio de um lado. No caso de um quadrado, o apótema tem a medida que corresponde a métade do lado.

Exercícios:

1. Construir um quadrado sabendo que seu apótema tem medida a dada pelo segmento abaixo.

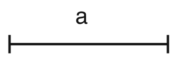


Figura 2

2. Construir um quadrado sabendo que sua diagonal tem medida d dada pelo segmento abaixo.

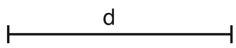


Figura 3

Problema 2: Construir um quadrado conhecendo a soma da diagonal com o lado.

Indiquemos por L o lado do quadrado, por d sua diagonal e por $s = L + d$. Assim, temos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$d = s - L \overset{d=L\sqrt{2}}{\Rightarrow} L\sqrt{2} = s - L \Rightarrow L(\sqrt{2}+1) = s \Rightarrow L = \frac{s}{\sqrt{2}+1} = s\sqrt{2} - s.$$

Daí o lado do quadrado procurado é a diferença entre a diagonal de um quadrado cujo lado é s e este lado s.

Resolução:

Seja o lado AB a soma da diagonal do lado de um quadrado com o seu lado.

1.1 Pela extremidade A do lado traçar uma perpendicular a AB;

1.2 Com centro em A e raio AB constrói-se uma circunferência que intercepta a perpendicular em um ponto C;

1.3 Com centro em B e raio AB construimos uma circunferência que intercepta o segmento CB em um ponto D;

1.4 O segmento CD é o lado do quadrado procurado;

1.5 Basta agora seguir os mesmos passos do problema 1 para achar o quadrado $CDEF$.

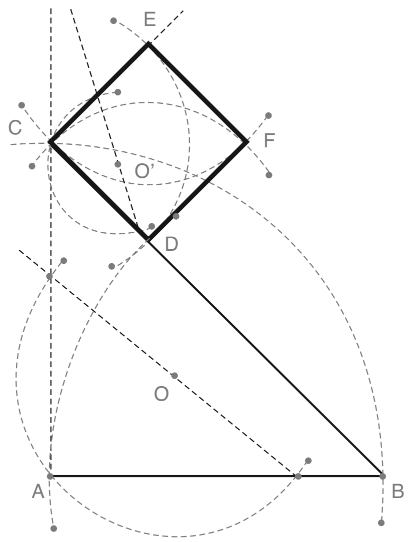


Figura 4

Existe um segundo processo para resolver o problema anterior. Suponha o problema já resolvido, isto é, que já tenhamos o quadrado construído.

- Prolonga-se a diagonal e rebate-se o lado sobre o prolongamento. Obtemos assim um segmento que é a soma do lado com a diagonal;
- Une-se a extremidade deste segmento com um dos outros vértices que não formam a diagonal formando um ângulo de $\dfrac{45^o}{2}$ com o seu prolongamento .

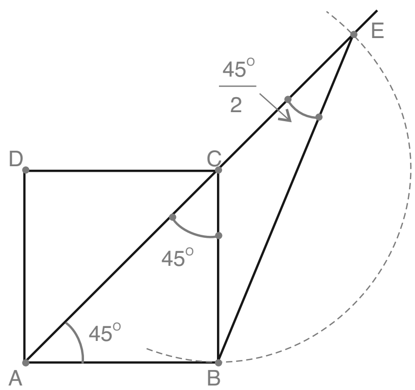


Figura 5

Justificativa: Por construção o triângulo BCE é isósceles de base BE, logo $C\widehat{B}E = C\widehat{E}B$. Por outro lado, $A\widehat{C}B = 45^o$ é ângulo externo do triângulo BCE não adjacente aos ângulos $C\widehat{B}E$ e $C\widehat{E}B$, daí $A\widehat{C}B = C\widehat{B}E + C\widehat{E}B$. Portanto, $C\widehat{E}B = \dfrac{45^o}{2}$.

Assim, para construir o quadrado basta construir ângulo de $\dfrac{45^o}{2}$ em um extremo, E, da soma do lado com a diagonal e no outro extremo, A, um ângulo de 45^o. Os lados destes ângulos se encontrarão em um dos vértices A do quadrado. Unindo o extremo A com o ponto B temos o lado do quadrado.

Exercícios:

3. Construir um quadrado conhecendo a diferença D da diagonal com o lado.

Figura 6

Sugestão: Basta seguir a mesma idéia do problema 2.

Problema 3: Construir um losango sendo dados as medidas, L e D, do lado e de uma diagonal, respectivamente.

3.1 Sobre uma reta r toma-se um segmento AB igual à diagonal dada;

3.2 Com centros nas extremidades constrói-se duas circunferências de raios iguais ao lado dado;

3.3 Tais circunferências se interceptam nos pontos C e D;

3.4 O quadrilátero $ACBD$ é o losango pedido.

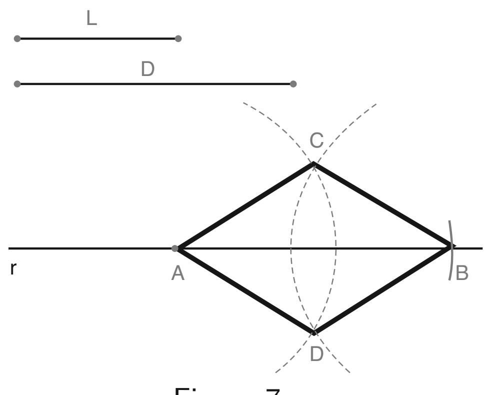


Figura 7

Justificativa: Lembremos que os lados do losango são iguais.

Exercícios:

4. Construir um losango conhecendo um ângulo interno α e a medida do lado.

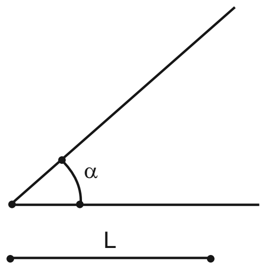


Figura 8

5. Construir um losango conhecendo as duas diagonais.

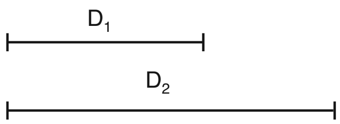


Figura 9

Sugestão: Lembre-se que as diagonais de um losango se encontram no ponto médio perpendicularmente.

6. Construir um losango conhecendo uma diagonal e o ângulo interno oposto a esta diagonal.

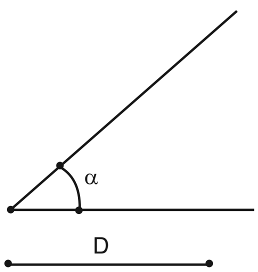


Figura 10

Sugestão: A diagonal do losango o divide em dois triângulos isósceles, tal que a altura coincide com a metade da diagonal.

Problema 4: Construir um retângulo sendo dados um lado e uma diagonal.

4.1 Sobre uma reta r toma-se um segmento AB igual lado dado;

4.2 Na extremidade A constrói-se uma reta perpendicular a r;

4.3 Com centro em B constrói-se um arco de circunferência de raio igual à diagonal dada. Interceptando a reta perpendicular em um ponto C;

4.4 Com centros em C e B constróiem-se duas circunferências de raios AB e AC, respectivamente. Que se encontram num ponto D. O quadrilátero $ABDC$ é o retângulo pedido.

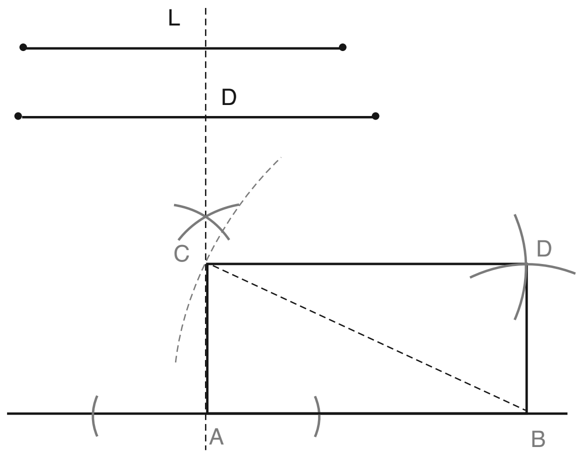


Figura 11

Justificativa: Como $AC = BD$, $CD = AB$ e CB é lado comum aos triângulos ABC e DCB, então tais triângulos são congruentes pelo caso L.L.L.. Assim $C\widehat{A}B = B\widehat{D}C = 90^o$ e $D\widehat{C}B = A\widehat{B}C$. Logo $ABDC$ é um paralelogramo, pois $CD = AB$ e $CD//AB$, e possui dois ângulos internos, opostos, que são retos. Portanto $ABDC$ é um retângulo.

Problema 5: Construir um retângulo conhecendo o semi-perímetro e a diagonal.

A construção deste retângulo recai na construção de um triângulo retângulo conhecendo a soma dos catetos e a hipotenusa.

5.1 Sobre uma reta r toma-se um segmento AB igual ao semi-perímetro;

5.2 Na extremidade B constrói-se um ângulo de 45^o considerando um dos lados o segmento AB;

5.3 Com centro em A constrói-se um arco de circunferência de raio igual à diagonal dada. Interceptando a reta que forma o ângulo de 45^o em dois pontos C_1 e C_2. Cada um desses pontos determinará um retângulo. Assim teremos dois retângulos, porém com as mesmas dimensões. Por isso, basta construírmos apenas um;

5.4 Pelo ponto C_1 traça-se uma reta perpendicular ao segmento AB. Interceptando-o no ponto B_1;

5.5 Com centros em C_1 e A constróiem-se dois arcos de circunferências de raios AB_1 e C_1B_1, respectivamente, que se interceptam em um ponto D;

5.6 O quadrilátero AB_1C_1D é uma solução para o problema.

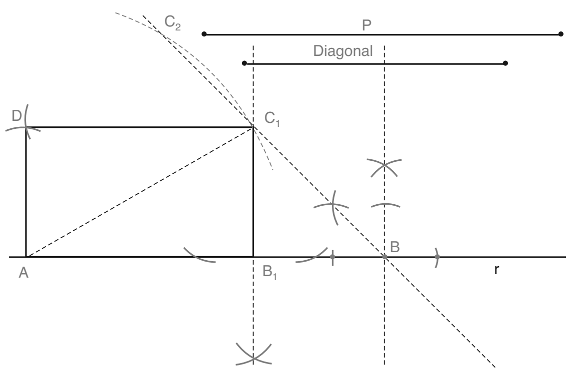


Figura 12

Justificativa: A mesma justificativa dada para construção de um triângulo retângulo conhecendo a hipotenusa e a soma dos catetos.

Exercícios:

7. Construir um retângulo conhecendo a diagonal e sabendo que seus lados são proporcionais aos segmentos de medidas a e b dados.

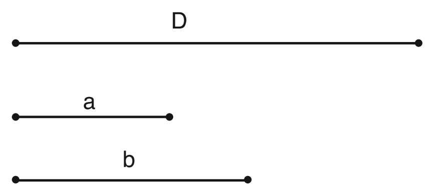


Figura 13

Sugestão: Construa um retângulo auxiliar de lados a e b, e sobre a reta suporte da diagonal deste retângulo construa um segmento na medida da diagonal dada, fazendo coincidir uma das extremidades. Após isso, pela extremidade que não coincide trace as paralelas aos lados do retângulo construído.

8. Construir um retângulo conhecendo a diagonal e a diferença entre as dimensões.

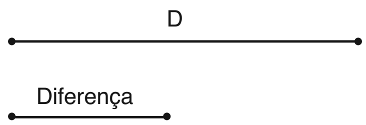


Figura 14

Sugestão: A resolução deste exercício segue de maneira análoga ao problema 5, onde o ângulo de 45^o é construído para a parte externa da diferença das dimensões.

9. Construir um retângulo conhecendo um ângulo entre as diagonais e o lado oposto a este ângulo.

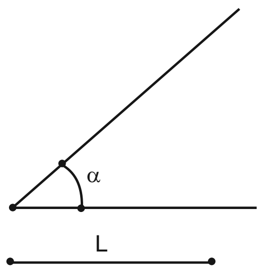


Figura 15

Sugestão: Este problema recai na construção de um triângulo isósceles conhecendo a base e o ângulo oposto.

10. Construir um retângulo conhecendo o raio da circunferência circunscrita e dois vértices consecutivos, A e B.

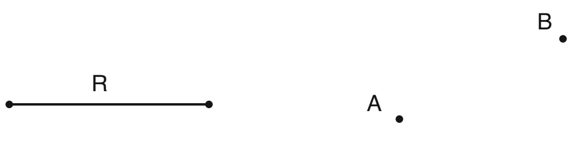


Figura 16

Sugestão: Lembre que o raio da circunferência circunscrita a um retângulo é a metade da diagonal, e que o centro deve estar a uma distância R dos vértices dados.

Resumo

Nesta aula voçê aprendeu...

- Que para efetuarmos as construções de quadriláteros em geral utilizamos recursos de contruções de triângulos;
- A construir quadrados, losangos e retângulos utilizando suas propriedades principais.

Aula 13 – Quadriláteros II

Objetivos

Construir paralelogramos de forma geral e trapézios utilizando suas propriedades principais e recursos de construções de triângulos.

Na aula passada vimos as principais construções de quadrados, losangos e retângulos que são paralelogramos com propriedades particulares:

- Losango: lados iguais e diagonais perpendiculares;
- Retângulo: ângulos internos iguais e consequentemente retos;
- Quadrado: possui as propriedades do losango e do retângulo.

As propriedades dos paralelogramos que utilizaremos nesta aula são: lados opostos iguais, lados opostos paralelos e as diagonais se interceptam no ponto médio.

Vejamos, a seguir, as principais construções de parelelogramos.

Problema 1: Construir um paralelogramo sendo dados os dois lados distintos e o ângulo entre eles.

Sejam $A'B'$ e $C'D'$ os segmentos de medida iguais aos lados distintos do paralelogramo e α o ângulo entre esses lados.

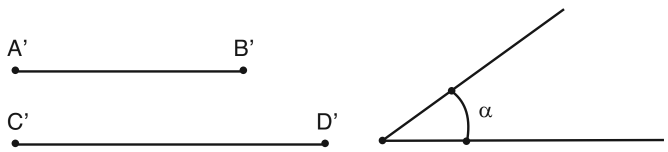


Figura 17

1.1 Sobre uma reta r construímos um segmento AB com medida igual a $A'B'$;

1.2 Sobre o vértice A transferimos o ângulo α;

1.3 Sobre o lado novo do ângulo α construído tomamos um ponto D tal que AD tenha medida igual a $C'D'$;

1.4 Com centros em B e D construímos as circunferências de raios AD e AB, respectivamente. Estas circunferências se encontrarão num ponto C, que será o quarto vértice do paralelogramo;

1.5 De modo alternativo, podemos construir as retas que passam por B e D que são paralelas aos segmentos AD e AB, respectivamente. Esta retas se encontrarão no ponto C.

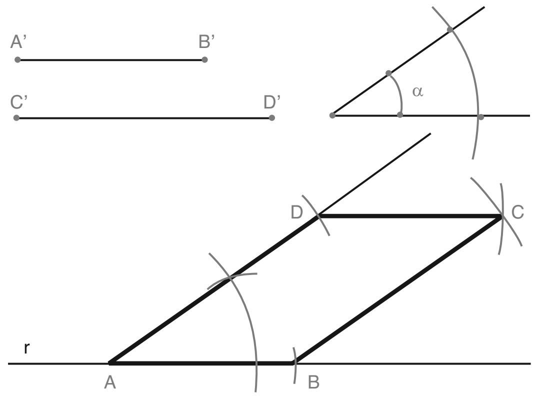


Figura 18

Justificativa: O quadrilátero construído possui lados opostos paralelos e iguais, assim ele é um paralelogramo.(Veja Geometria Básica)

Problema 2: Construir um paralelogramo sendo dados um ângulo α interno, o perímetro $2p$ e uma das diagonais D.

Como em um paralelogramo os ângulos opostos são iguais e os adjacentes são suplementares, então se conhecemos um ângulo temos os quatro ângulos internos do paralelogramo. Neste caso, podemos supor que o ângulo dado seja oposto à diagonal dada.

Supondo que o paralelogramo $ABCD$, a seguir, seja a solução do problema, façamos as seguintes construções:

- Rebatendo o lado AB sobre o prolongamento do lado AD, obtemos um ponto E tal que ED é o semi-perímetro;

- Traçando a semi-reta de origem em E que passa por B formamos um triângulo isósceles EAB, de base EB, cujo ângulo externo não adjacente aos ângulos da base é o ângulo interno dado. Portanto, o ângulo da base do triângulo isósceles corresponde à metade do ângulo dado;

- Observe também que a diagonal dada é oposta ao ângulo $B\widehat{E}A$ e que o ponto A é eqüidistante dos pontos E e B.

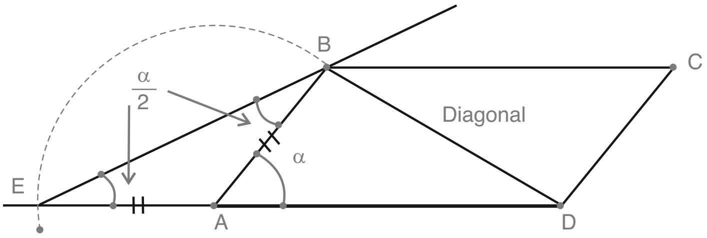


Figura 19

As propriedades relatadas anteriormente justificam a seguinte resolução para o problema 2.

2.1 Divide-se o perímetro dado ao meio, para obtermos o semi-perímetro e sobre uma reta suporte r constrói-se um segmento ED com medida igual ao semi-perímetro;

2.2 Divide-se o ângulo dado ao meio, utilizando a bissetriz do mesmo e na extremidade E do segmento construído transferimos a metade do ângulo dado;

2.3 Com centro no ponto D constrói-se uma circunferência de raio igual a diagonal dada. Esta circunferência intercepta o novo lado do ângulo transferido em dois pontos. Resultando assim em duas soluções que serão iguais. Neste caso, tomaremos um ponto e o indicaremos por B;

2.4 Traça-se a mediatriz do segmento EB obtendo o ponto A;

2.5 Com centros em B e D constróiem-se as circunferências de raios AD e AB, respectivamente. Que se interceptarão no quarto vértice C. O quadrilátero $ABCD$ é o paralelogramo pedido ver a Figura 20).

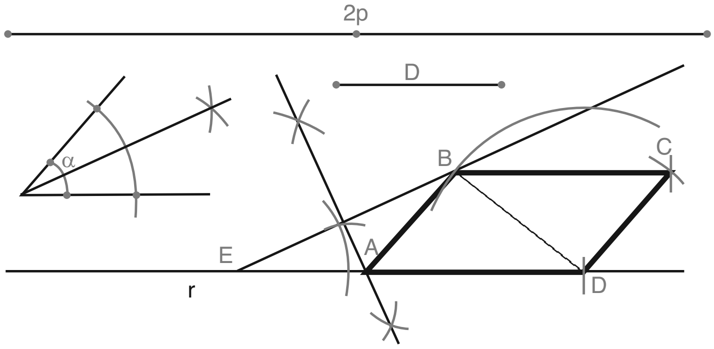


Figura 20

Exercícios:

1. Construir um paralelogramo conhecendo uma diagonal e os dois lados distintos (ver a Figura 21).

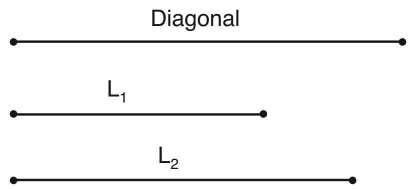


Figura 21

   Sugestão: A resolução do exercício 1 recai na construção de um triângulo sendo dados os três lados.

2. Construir um paralelogramo conhecendo as duas diagonais e um lado.

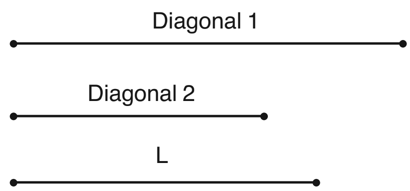


Figura 22

   Sugestão: Lembre que as diagonais de um paralelogramo se encontram no ponto médio.

3. Construir um paralelogramo conhecendo as duas diagonais e um ângulo interno.

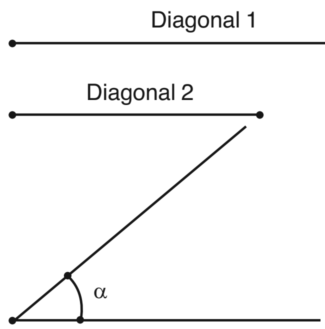


Figura 23

   Sugestão: A resolução do exercício 3 recai na construção de um triângulo conhecendo a base, a mediana relativa à base e o ângulo oposto à base.

4. Construir um paralelogramo conhecendo a base, a altura e uma diagonal.

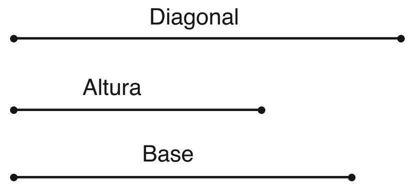


Figura 24

Sugestão: Construa uma base sobre uma reta, trace uma paralela a esta reta que esteja a uma distância igual a altura e utilize a diagonal para encontrar o terceiro vértice.

Problema 3: Construir um paralelogramo conhecendo um lado, a soma do outro lado com uma diagonal e o ângulo entre esta diagonal e o lado dado.

Assim como no problema 2, analisemos inicialmente o problema supostamente resolvido. Seja $ABCD$ o paralelogramo solução para o problema 3.

- Rebatendo o lado CB sobre o prolongamento da diagonal dada, AC, obtemos o ponto E tal que AE seja igual a soma dada;

- Observe que o ponto C é eqüidistante dos pontos E e B;

- Se AB é o lado dado, então AE forma com AB o ângulo dado.

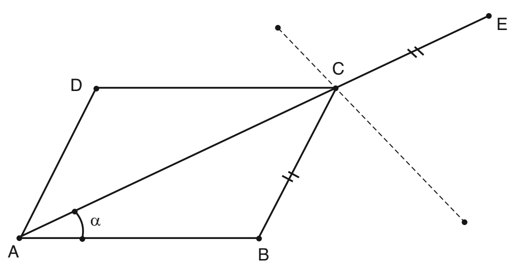


Figura 25

As propriedades, anteriormente relatadas, justificam o seguinte processo de construção.

3.1 Sobre uma reta suporte r constrói-se um segmento AB com medida igual ao lado dado;

3.2 Transfere-se o ângulo dado para a extremidade A do segmento construído;

3.3 Sobre o novo lado do ângulo construído constrói-se um segmento AE com medida igual a soma dada;

3.4 Traça-se a mediatriz do segmento BE, interceptando AE no ponto C que é o terceiro vértice do paralelogramo;

3.5 Com centros em A e C constróiem-se as circunferências de raios BC e AB, respectivamente. Tais circunferências se interceptarão no quarto vértice D do paralelogramo $ABCD$ pedido.

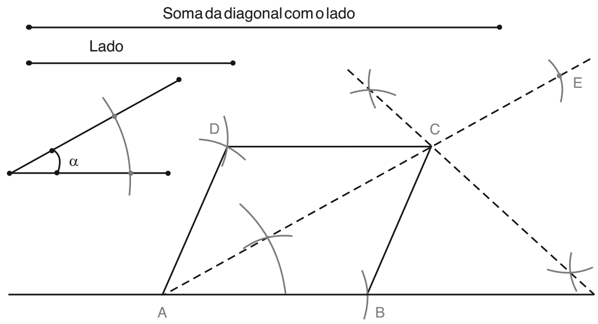


Figura 26

Exercícios:

5. Construir um paralelogramo conhecendo um lado, a diferença entre uma diagonal e o outro lado e o ângulo entre esta diagonal e o lado dado.

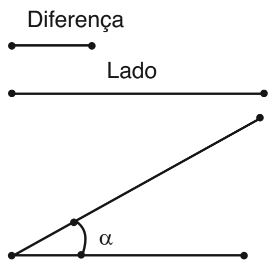


Figura 27

Sugestão: analise o problema resolvido rebatendo o lado para um ponto entre os extremos da diagonal.

Até o momento efetuamos construções de quadriláteros ditos paralelogramos. Faremos, a seguir, algumas construções de outros quadriláteros ditos trapézios, que por definição possui somente dois lados paralelos que são ditos bases, e os outros dois lados são chamados de laterais. Quando um trapézio possui as laterais iguais, então o trapézio é chamado de trapézio isósceles. Quando uma lateral é perpendicular as bases, então o trapézio é chamado de trapézio retângulo.

Problema 4: Construir um trapézio conhecendo as duas bases e as duas diagonais.

Vejamos o problema supostamente resolvido. Seja $ABCD$ o trapézio solução cujas bases são AB e CD.

- Pelo ponto C tracemos a reta paralela à diagonal BD. Esta paralela intercepta o prolongamento da base AB em um ponto E;
- Como $CE//BD$ e $AB//CD$ então $BECD$ é um paralelogramo, logo $DC = BE$ e $CE = BD$;
- Note então que o triângulo ACE possui os lados iguais às duas diagonais e a soma das bases.

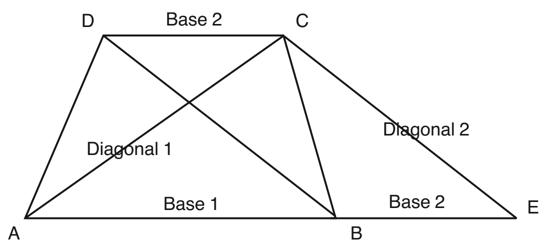


Figura 28

Neste caso, podemos resolver o problema efetuando as seguintes construções:

4.1 Sobre uma reta r construímos um segmento AB igual a uma das bases. Considere AB como a maior base;

4.2 Sobre a mesma reta construímos um segmento BE igual a segunda base, de tal forma que B fique entre A e E;

4.3 Construímos um triângulo utilizando AE como base e os outros lados sendo as duas diagonais do trapézio. Obtendo o terceiro vértice C;

4.4 Completando o paralelogramo de lados BE e CE obtemos o quarto vértice do trapézio $ABCD$ pedido.

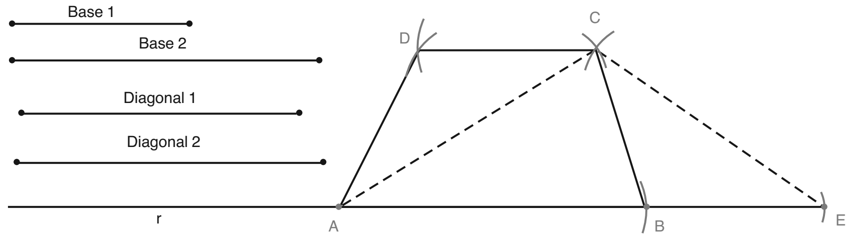


Figura 29

Exercícios

6. Construir um trapézio conhecendo as duas bases e as duas laterais.

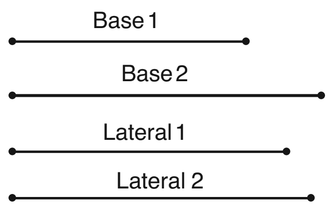


Figura 30

Problema 5: Construir um trapézio isósceles conhecendo uma base, o ângulo interno da base dada e a lateral.

Num trapézio isósceles os ângulos da base são iguais(Veja Geometria Básica).

A solução deste problema é simples e se justifica pela definição e pela propriedade anterior relativa a trapézio isósceles.

5.1 Sobre uma reta r construímos um segmento AB igual a base dada;

5.2 Em cada extremidade do segmento AB construímos um ângulo igual ao ângulo dado, com os novos lados situados no mesmo semi-plano determinado pela reta r;

5.3 Em cada lado novo dos ângulos da base construímos um segmento de medida igual a lateral dada, obtendo dois pontos C e D;

5.4 O quadrilátero $ABCD$ é o trapézio pedido.

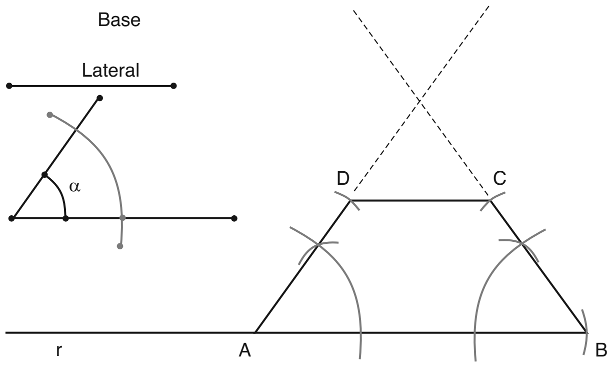


Figura 31

Exercícios

7. Construir um trapézio isósceles conhecendo a base maior, a diagonal e sabendo que as diagonais se interceptam num ponto que as divide na razão 1 para 2, isto é, em dois segmentos que correspondem a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ da diagonal.

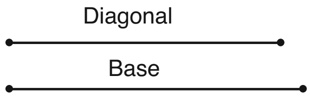


Figura 32

Sugestão: basta dividir a diagonal em três partes iguais, e utilizando $\frac{2}{3}$ da diagonal constrói-se um triângulo isósceles com a base.

Problema 6: Construir um trapézio retângulo conhecendo a base menor, a soma da base maior com a lateral perpendicular e o ângulo agudo interno.

Supondo o problema resolvido consideremos o trapézio $ABCD$ como solução para o problema e efetuemos o seguintes processos inversos da construção:

- Supondo a lateral reta AD, rebate-se AD sobre o prolongamento da base maior AB, obtendo um ponto E;

- Observe que o triângulo EAD é retângulo e isósceles, logo o ângulo $D\widehat{E}A = 45^o$;

- Apoiando a base menor DC sobre a base maior fazendo coincidir C e B, obtemos um ponto F entre A e B tal que $FB = DC$;

- Observe que o quadrilátero $DCBF$ é um paralelogramo, logo $DF//CB$.

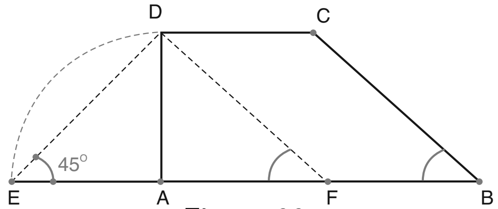


Figura 33

A análise anterior justifica a seguinte solução para o problema:

6.1 Sobre uma reta r construímos um segmento EB igual a soma da base maior com a lateral reta;

6.2 Na extremidade E constrói-se um ângulo de 45^o considerando EB como um dos lados;

6.3 Na extremidade B constrói-se um segmento FB igual à base menor dada tal que $F \in EB$. E na mesma extremidade constrói-se um ângulo igual ao ângulo agudo dado, considerando EB como um dos lados;

6.4 Pelo ponto F traça-se uma reta paralela ao lado do ângulo agudo, que interceptará o lado do ângulo de 45^o em um ponto D;

6.5 Pelo ponto D traça-se uma reta perpendicular a r interceptando-a no ponto A;

6.6 Com centro em D e raio igual à base menor constrói-se um arco de circunferência que interceptará o lado do ângulo agudo num ponto C;

6.7 O quadrilátero $ABCD$ é o trapézio pedido.

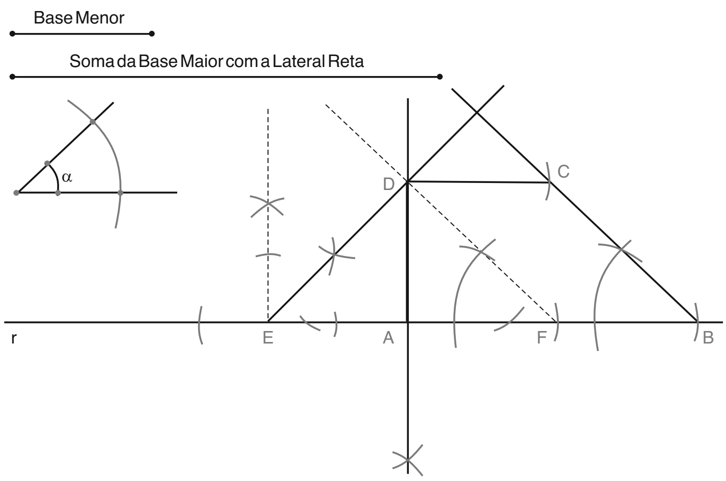


Figura 34

Exercícios

8. Construir um trapézio retângulo conhecendo a diagonal menor, um ângulo interno agudo e sabendo que a lateral reta é igual à base menor.

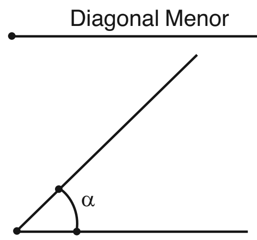


Figura 35

Sugestão: Suponha o problema resolvido e observe que a diagonal forma ângulo 45^o com as bases.

9. Construir um trapézio retângulo conhecendo a base menor, a diferença entre a base maior e a lateral reta, e a diagonal maior.

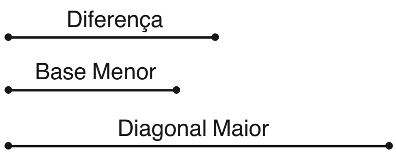


Figura 36

Sugestão: Suponha o problema resolvido e siga os passos do problema 8 rebatendo a lateral reta para a parte interna da base maior, e utilize a diagonal maior no lugar do ângulo interno.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A construir paralelogramos de forma geral utilizando suas principais propriedades;
- A construir trapézios gerais, trapézios isósceles e trapézios retângulos utilizando as principais propriedades.

Aula 14 – Translação

Objetivos

Utilizar translações de figuras na resolução de problemas de construções geométricas.

Translação

Chamamos de translação de um ponto o deslocamento de um ponto A para um ponto A' sobre uma reta r. A reta r sobre a qual foi efetuada a translação é chamada de **direção** da translação e a distância entre os pontos é chamada de **amplitude**. Além da direção e da amplitude devemos, em cada translação, definir um sentido, pois em uma direção existem dois sentidos de deslocamento de um ponto. Temos então três características para fazer uma translação que vamos denominar de vetor v.

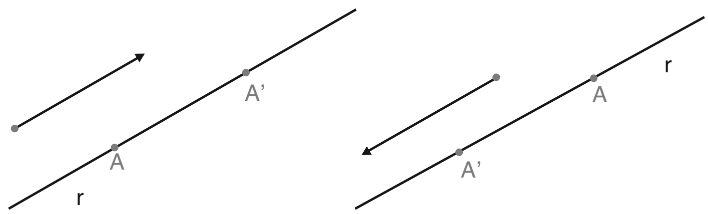


Figura 37

A translação de uma figura F segundo uma direção, uma amplitude e um sentido fixos é a figura F' formada por todos os pontos transladados da figura F. Dizemos que F' é uma transformação de F por translação, e as figuras são ditas **homólogas**.

A translação, bem como a simetria axial e a homotetia, que estudaremos em seguida, são chamadas de transformações de figuras.

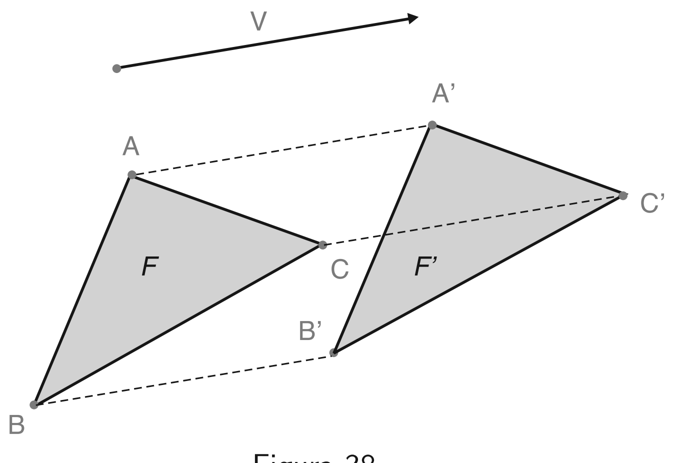


Figura 38

Propriedades da Translação

- Sejam AB e $A'B'$ segmentos tais que as extremidades são homólogas por uma translação, então $AB = A'B'$ e $AB//A'B'$.

- Figuras homólogas são congruentes

Aplicações de translação em construções geométricas

Estudaremos as aplicações de translação em construções geométricas diretamente em problemas.

Problema 1: Dado um triângulo ABC construir um segmento $DE = m$ tal que $D \in AB$, $E \in AC$ e $DE//r$.

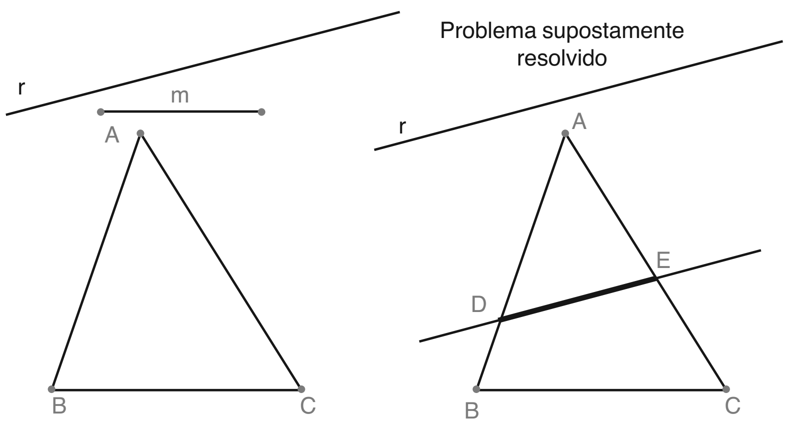


Figura 39

Resolução:

1.1 Prolonga-se o lado AB do triângulo interceptando com r num ponto F;

1.2 Sobre o mesmo semiplano que contém o ponto C, determinado pelo lado AB, marcamos um ponto G sobre r tal que $FG = m$;

1.3 Pelo ponto G traçamos a reta paralela ao lado AB. Esta reta interceptará o lado AC no ponto E;

1.4 Pelo ponto E traçamos a reta paralela a r que intercetará no ponto D.

O segmento DE é o segmento procurado.

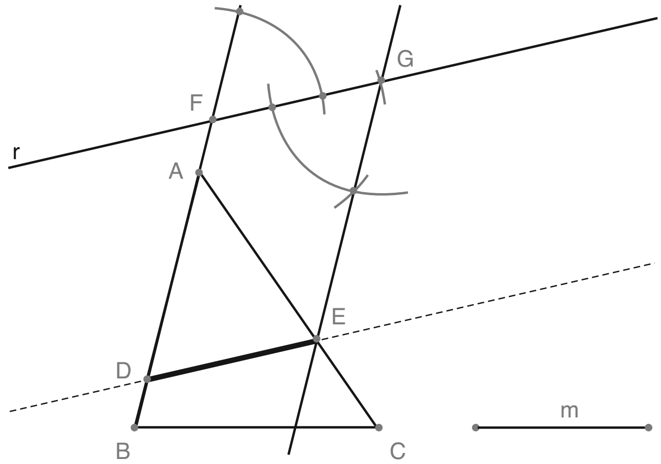


Figura 40

Exercícios:

1. Construir um paralelogramo inscrito no triângulo ABC de tal forma que um dos lados do triângulo contenha um dos lados do paralelogramo e o segundo lado do paralelogramo seja paralelo a r e de medida m.

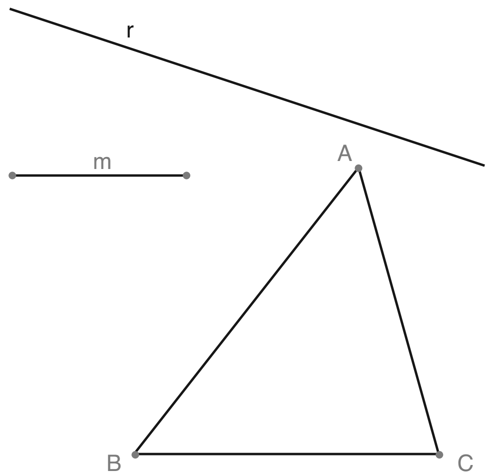


Figura 41

Problema 2: Dadas as duas semi-retas $x = \overrightarrow{AX}$ e $y = \overrightarrow{AY}$ de mesma origem, construir a circunferência de raio R que seja tangente a x e que intercepte y formando uma corda de comprimento m.

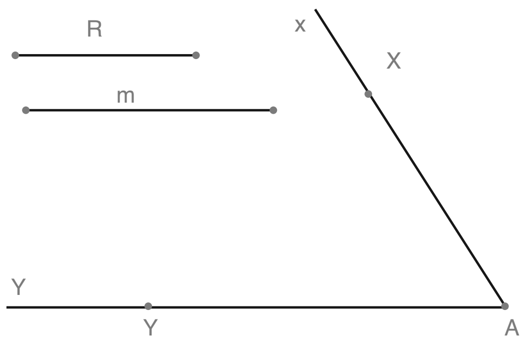


Figura 42

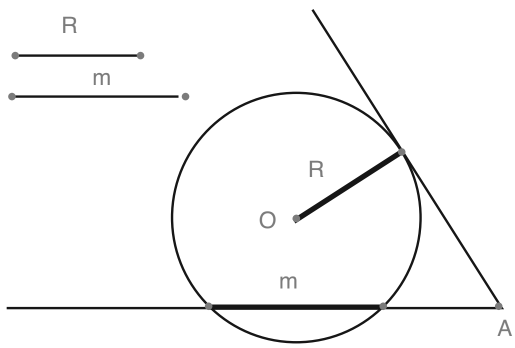


Figura 43

Resolução:

2.1 Construa um segmento CD sobre uma das semi-retas de medida m;

2.2 Com raio igual a R constróiem-se as circunferências de centros em C e D que se interceptarão, no interior do ângulo formado pelas semi-retas, em um ponto E;

2.3 Pelo ponto E traça-se a reta r paralela ao lado do ângulo que contém CD;

2.4 Trace por um ponto F qualquer do outro lado do ângulo uma reta perpendicular e nesta perpendicular constrói-se um segmento FG de medida igual ao raio R da circunferência desejada, de tal forma que o ponto G se situe no interior do ângulo;

2.5 Pelo ponto G trace uma reta s paralela ao lado que contém F;

2.6 As retas r e s se encontrarão no centro O da circunferência desejada.

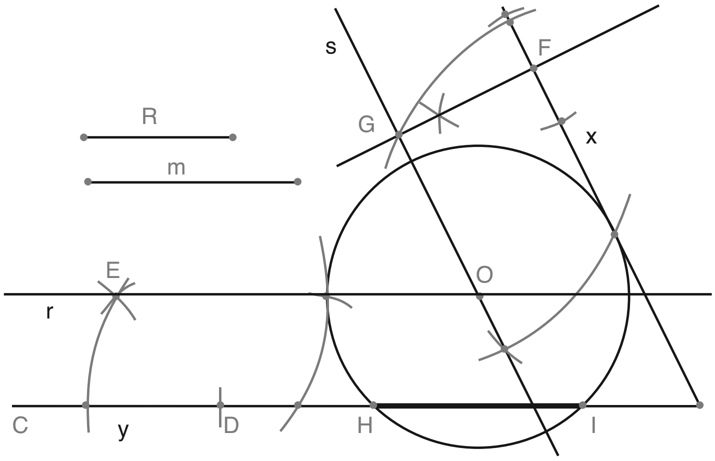


Figura 44

Justificativa: O ponto O está a uma distância R da semi-reta x logo é tangente a esta semi-reta. Observe que os triângulos ECD e OHI são isósceles de mesma altura e laterais iguais portanto são congruêntes, e assim $CD = HI = m$.

Definição: Dados um segmento AB e um ponto C que não lhe pertence seja $\alpha = A\widehat{C}B$. Dizemos assim que C é um ponto de onde se enxerga o segmento AB segundo o ângulo α.

Problema 3: Dadas as duas retas r e s, concorrentes em A, e um ponto $B \in r$. Obtenha um ponto $C \in s$ de onde se enxergue AB segundo um ângulo de 60^o.

Observando a figura do problema resolvido notamos que existem duas soluções para este problema.

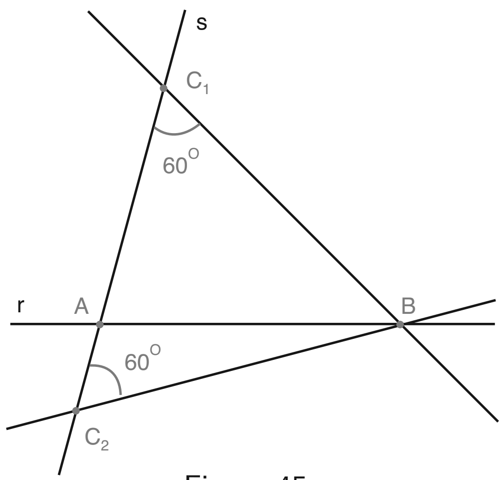


Figura 45

Resolução:

3.1 Por um ponto $D \in s$ qualquer constróiem-se duas retas distintas que formam ângulo de 60^o com s;

3.2 Pelo ponto B traçam-se as duas retas paralelas às retas obtidas no item anterior. Tais paralelas interceptarão a reta s nos pontos C_1 e C_2 que são soluções para o problema.

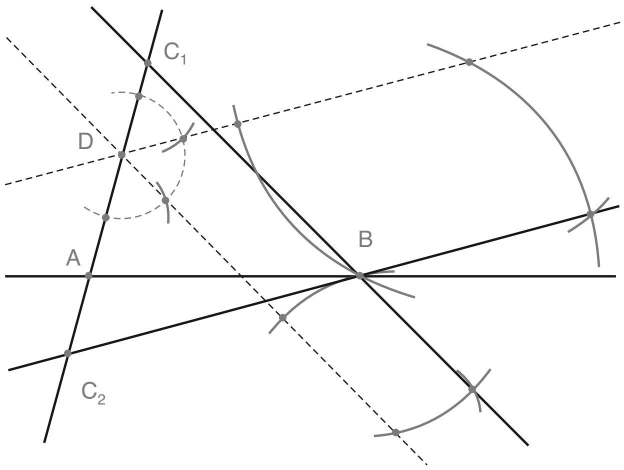


Figura 46

Exercícios:

2. Construa um triângulo eqüilátero de lado ℓ, que possua um lado contido em r e um de seus vértices pertença a λ.

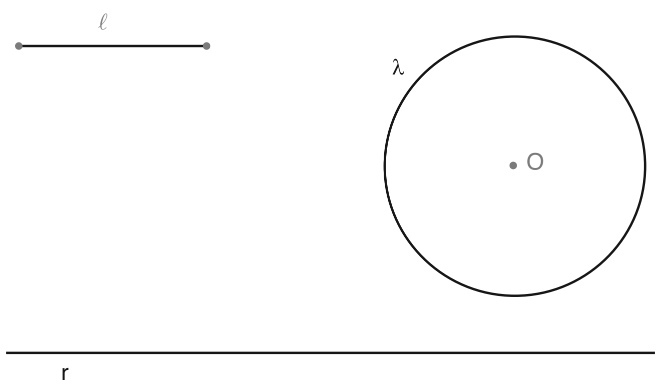


Figura 47

3. Construa o triângulo isósceles com a sua base contida em r, seu ângulo da base é igual a α e O é o seu incentro.

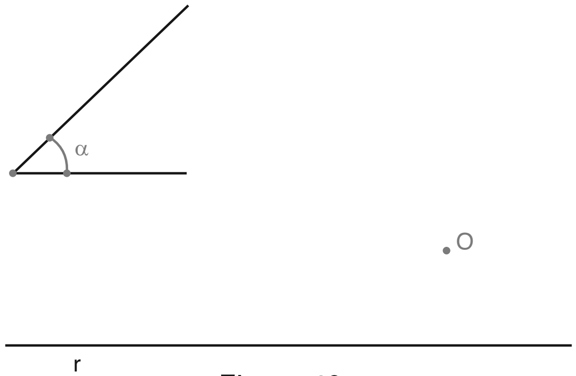


Figura 48

4. São dados dois segmentos r e l, duas retas concorrentes a e b. Construa uma circunferência de raio r, tangente à reta a e de tal modo que a reta b a intercepte segundo uma corda de comprimento l. (Olhar o problema 2).

   Dados: A medida do segmento r é: $1\ cm$.
   A medida do segmento l é: $1,6\ cm$.

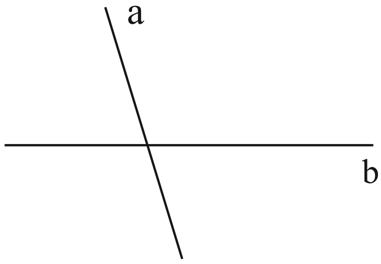


Figura 49

Problema 4: Dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, secantes nos pontos A e B, considere um segmento de comprimento ℓ. Obtenha o segmento PQ tal que $A \in PQ$, P pertença à circunferência de centro O_1 e Q pertença à circunferência de centro O_2. Observando a figura do problema resolvido notamos que existem duas soluções para este problema.

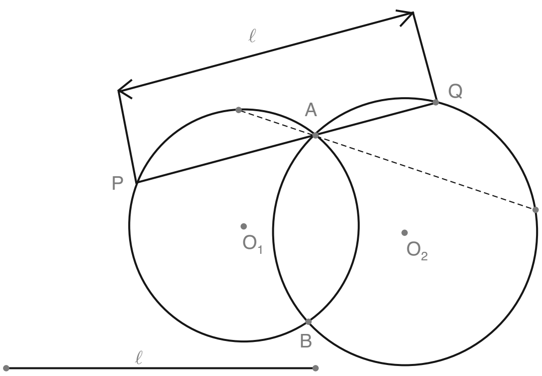


Figura 50

Resolução:

Na figura do problema resolvido tracemos as perpendiculares ao segmento PQ que passam pelos centro O_1 e O_2. Tais retas interceptam PQ nos pontos C e D que dividem os segmentos PA e AQ no meio, respectivamente. Desta forma o segmento CD possui medida $\frac{\ell}{2}$. Supondo o raio da circunferência de centro em O_2 maior que o raio da circunferência de centro em O_1, transladamos paralelamente o segmento O_1C até apoiá-lo sobre O_2D seguindo a direção de PQ, obtendo em O_2D um ponto E. O quadrilátero CO_1ED é um retângulo e, conseqüentemente, o triângulo O_1O_2E é retângulo onde um dos catetos mede $\frac{\ell}{2}$. Isto justifica a seguinte construção:

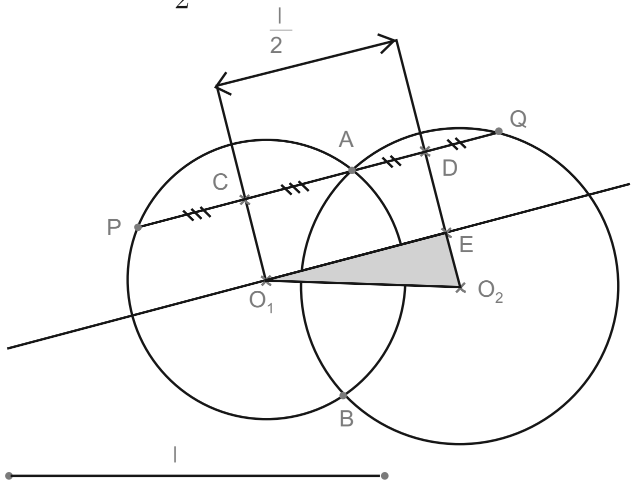


Figura 51

3.1 Divide-se o segmento ℓ ao meio;

3.2 Constrói-se a circunferência de diâmetro O_1O_2;

3.3 Com centro em O_1 constrói-se um arco de circunferência de raio $\frac{\ell}{2}$, que interceptará a circunferência obtida no item 3.2 nos pontos E_1 e E_2;

3.4 Pelo ponto A traçam-se as paralelas aos segmentos O_1E_1 e O_1E_2.

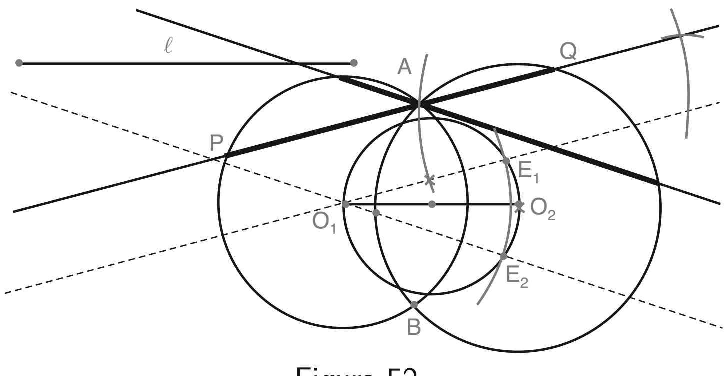


Figura 52

Observações

- No problema anterior, do cateto de medida $\frac{\ell}{2}$ o que importa é a sua direção, pois nos dá a direção de PQ;

- Como a medida do cateto não pode ultrapassar a hipotenusa então a medida máxima de $\frac{PQ}{2}$ é a distância entre os centros da circunferência, e neste caso o cateto coincidirá com a hipotenusa. Assim, para obtermos PQ máximo basta tomá-lo paralelo ao segmento determinado pelos centros das circunferências.

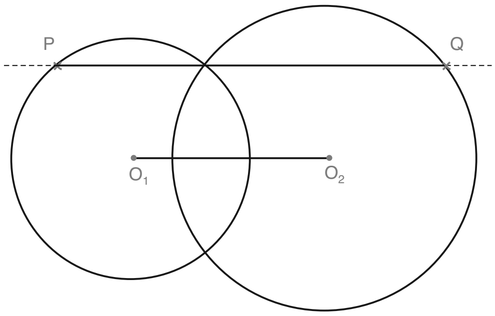


Figura 53

Podemos utilizar esta propriedade para solucionar o seguinte problema.

Problema 5: Circunscreva a um triângulo ABC dado um triângulo eqüilátero de lado máximo.

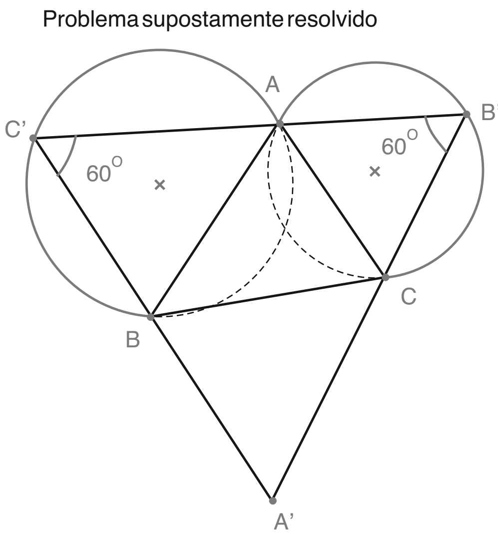


Figura 54

Observe que o lado do triângulo eqüilátero possui suas extremidades nos arcos capazes do ângulo de 60^o relativo aos lados do triângulo ABC e passam pelo vértice comum aos lados que determinam os arcos. Como os lados são de medida máxima, então são paralelos aos segmentos determinados pelos centros dos arcos. Podemos então resolver o problema efetuando as seguintes construções:

Considere o triângulo ABC.

5.1 Construa os arcos capazes de 60^o relativo aos lados AB e AC. Obtendo os centros O e O', respectivamente;

5.2 Pelo ponto A trace a paralela ao segmento OO' que interceptará os arcos nos pontos B' e C';

5.3 Trace as retas que contém os segmentos $B'C$ e $C'B$. Tais retas se encontrarão no ponto A';

5.4 O triângulo $A'B'C'$ é o triângulo procurado.

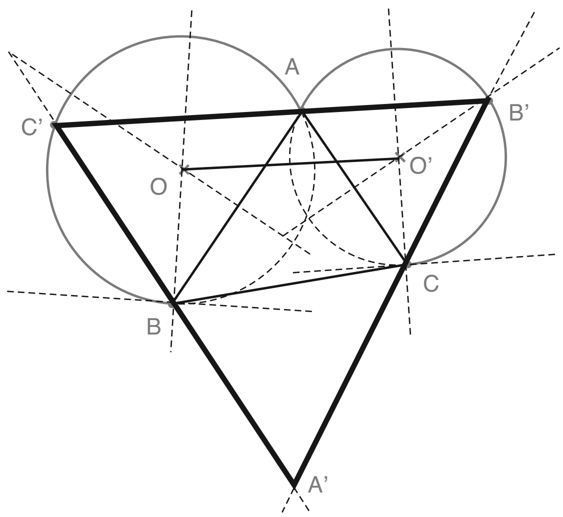


Figura 55

Exercícios:

5. Construa o retângulo $ABCD$ sabendo que $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, $S \in DA$ e $AB = 3,6\ cm$.

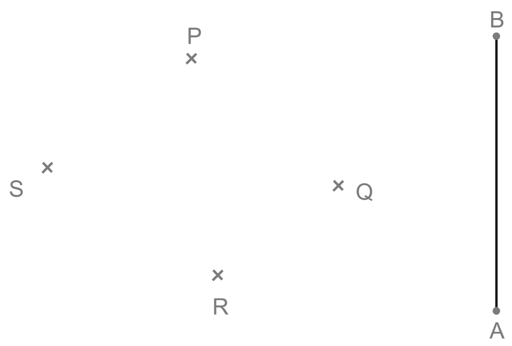


Figura 56

6. Construa o quadrado $ABCD$ de perímetro máximo, sabendo que $P \in AB$, $Q \in BC$ e $R \in AD$.

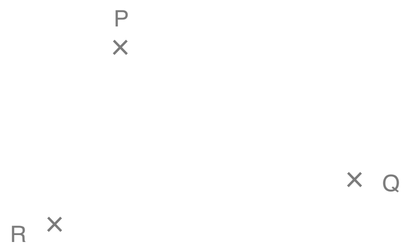


Figura 57

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A solucionar diversos problemas de construção geométrica utilizando translações de figuras.

Aula 15 – Simetria Axial ou Rebatimento

Objetivo

Resolver diversos problemas de construção geométrica utilizando simetria axial.

Dizemos que dois pontos A e A' são simétricos em relação a uma reta r, que não os contém, quando tal reta coincide com a mediatriz do segmento AA'. A reta r é chamado de eixo de simetria.

Observações:

- Um ponto A coincide com seu simétrico se e somente se $A \in r$.
- Podemos obter o simétrico de um ponto A em relação a uma reta r através do método estudado no Problema 2 da Aula 3. Relembremos os passos:

  1. Com centro em um ponto $B \in r$ construímos um arco de circunferência, de raio AB, interceptando r em um ponto C;
  2. Com raio AC e centro em C construímos um arco que interceptará o arco construído no item anterior nos pontos A e A'. O ponto A' é o simétrico de A em relação a r.

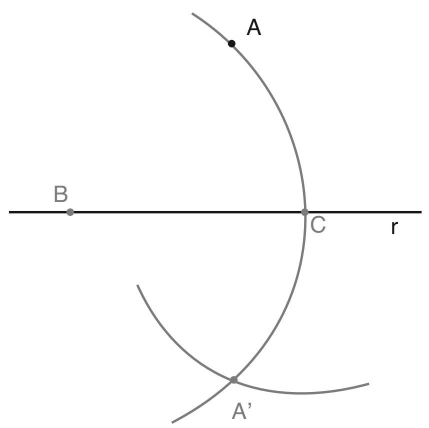


Figura 58

Duas figuras F e F' são chamadas figuras simétricas em relação a um eixo r se e somente se para todo ponto $A \in F$ o seu simétrico $A' \in F'$. Dizemos também que F' é o **rebatimento** de F em relação ao eixo r. Se F e F' são figuras simétricas em relação um eixo r.

Dizemos que uma figura possui um eixo de simetria quando os simétricos de seus pontos em relação a este eixo ainda pertencem a figura.

Para melhor enxergar o eixo de simetria de uma figura convém imaginar a folha de papel dobrando-se de modo que o vinco caia sobre o eixo. As duas partes em que a figura fica dividida pelo eixo sobrepõe-se após a dobradura.

A circunferência é uma figura que possui infinitos eixos de simetria, a saber, todas as retas que passam pelo seu centro. As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo eqüilátero são os seus eixos de simetria.

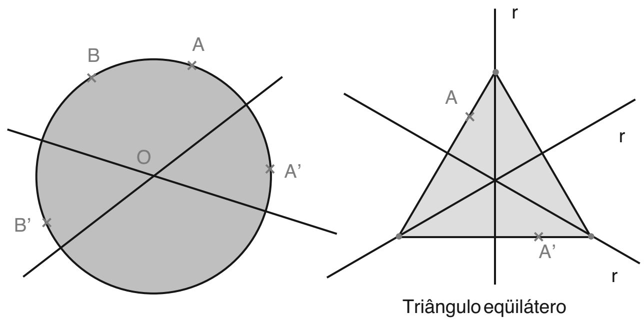


Figura 59

Exercícios:

1. Trace os eixos de simetria das seguintes figuras:

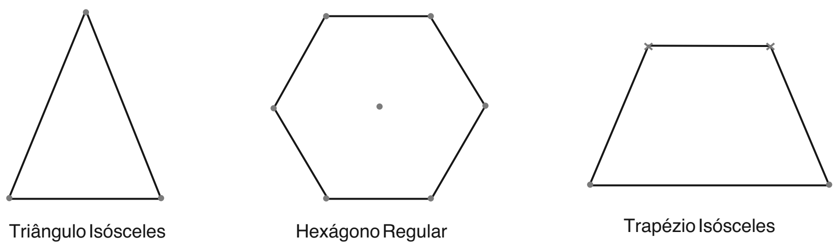


Figura 60

Observação: Num triângulo ABC as retas suportes dos lados AB e AC são simétricas em relação à bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.

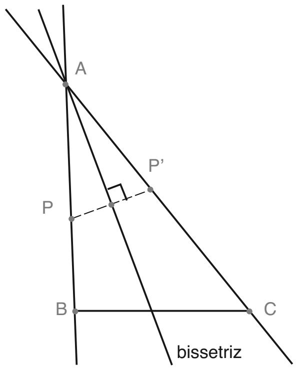


Figura 61

Problema 1: Construa um triângulo ABC conhecendo a três bissetrizes e um ponto $P \in AB$.

Se $P \in AB$ então o seu simétrico P_1 em relação à bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ pertence ao lado AC e o simétrico P_2, de P, em relação à bissetriz do ângulo $\widehat{B}$ pertence ao lado BC. Além disso, como $P_2 \in BC$ então o seu simétrico P_3 em relação à bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ pertence ao lado AC. Logo, P_1 e P_3 determinam o lado AC.

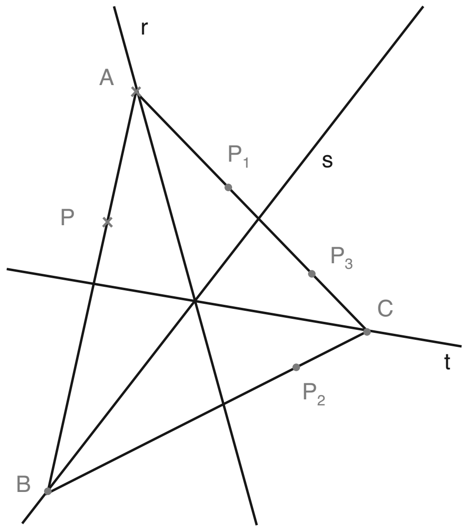


Figura 62

Assim, podemos resolver o problema com as seguintes construções:

Sejam r, s e t as retas suportes das bissetrizes dos ângulo $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, e $P \in AB$.

1.1 Encontramos os simétrico de P em relação às retas r e s e os indicamos por P_1 e P_2, respectivamente;

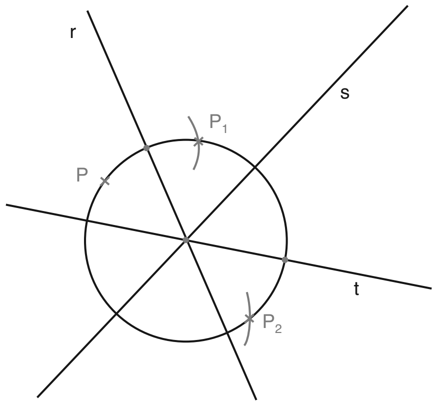


Figura 63

1.2 Encontramos o simétrico de P_2 em relação à reta t e o indicamos por P_3. Em seguida traçamos a reta determinada pelos pontos P_1 e P_3, que interceptará a reta r no ponto A e a reta t no ponto C, obtendo assim, o lado AC do triângulo procurado;

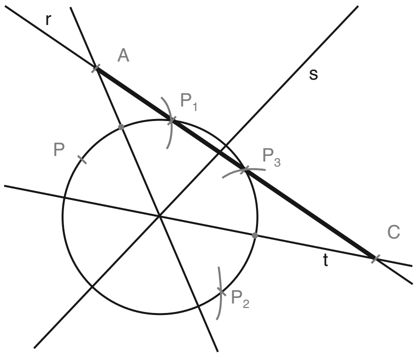


Figura 64

1.3 Traçamos a reta determinada pelos pontos A e P obtendo o ponto B na interseção com a reta s. O triângulo ABC é a solução para o problema.

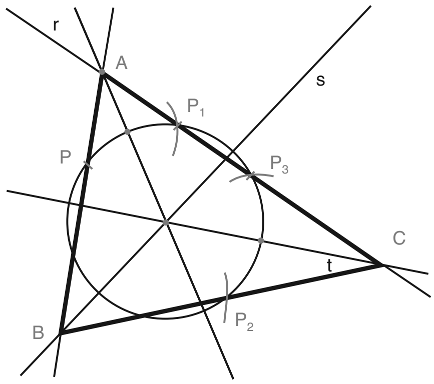


Figura 65

Problema 2: Construa um triângulo ABC isósceles de base BC, conhecendo-se o vértice A, um ponto $P \in BC$ e a reta suporte r da bissetriz do ângulo $\widehat{B}$.

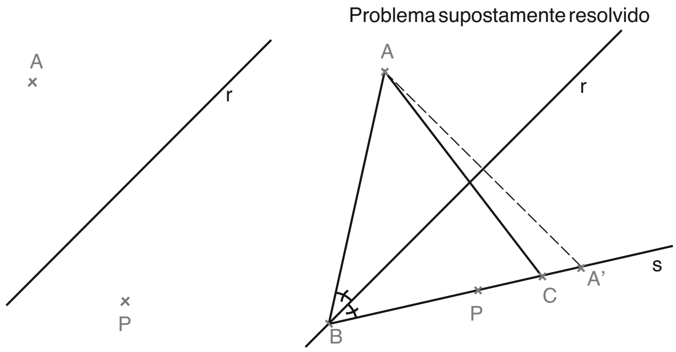


Figura 66

Como r é bissetriz do ângulo $\widehat{B}$ então o ponto A', simétrico de A em relação a r, pertence à reta s, suporte da base BC, e neste caso A' e P determinam s. Assim, podemos solucionar o problema 7 mediante às seguintes construções:

2.1 Encontramos A', simétrico de A em relação a r e unimos os pontos A' e P obtendo a reta s que interceptará a reta r no ponto B;

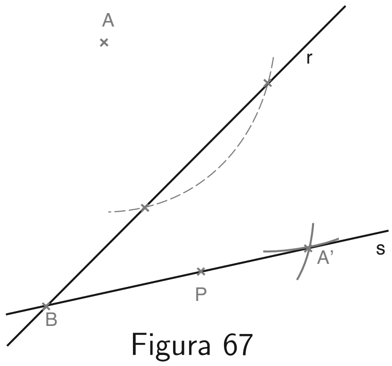


Figura 67

2.2 Com centro em A e raio AB construímos um arco de circunferência que interceptará a reta s no terceiro vértice C. O triângulo ABC é o triângulo procurado.

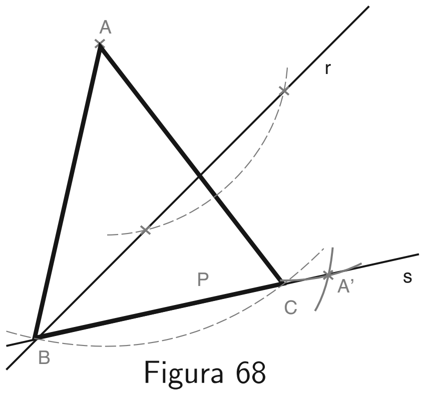


Figura 68

Exercícios:

2. Construa um triângulo ABC, sendo dados um ponto P do lado AB, um ponto Q do lado AC, a reta r suporte do lado BC e a reta s suporte da bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.

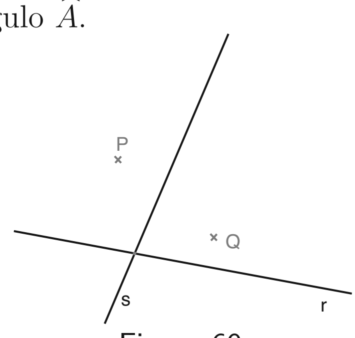


Figura 69

3. Construa um triângulo ABC, sendo dados um ponto P do lado AB, um ponto Q do lado BC, e as retas r e s suportes das bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, respectivamente.

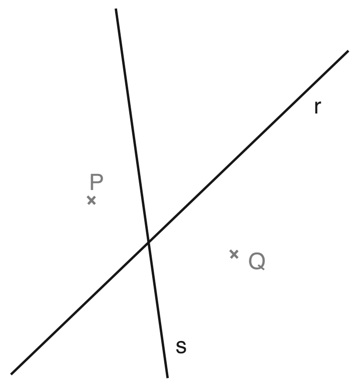


Figura 70

4. Construa um triângulo isósceles de base BC, conhecendo-se os pontos P e Q pertencentes, respectivamente, aos lados AB e AC, a reta r suporte da altura relativa à base e a medida b da base.

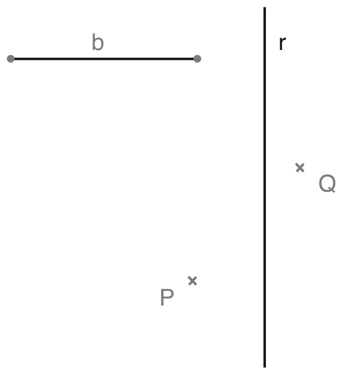


Figura 71

5. Construa um triângulo ABC de perímetro mínimo onde B pertence à semi-reta de origem em O que contém X e C pertence à semi-reta de origem em O que contém o ponto Y.

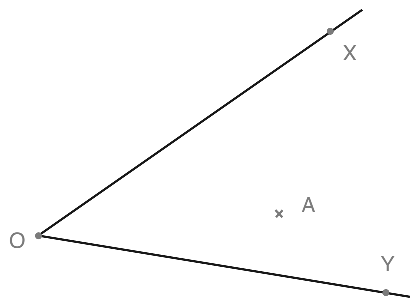


Figura 72

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A utilizar simetria axial para solucionar diversos problemas de construção geométrica.

Aula 16 – Homotetia I

Objetivo

Efetuar a homotetia dos principais elementos de construção geométrica.

No estudo de **homotetia** precisamos de uma noção de orientação de um segmento. Um segmento AB pode ser orientado em dois sentidos: de A para B ou de B para A, que denotaremos respectivamente por $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$.

Se numa mesma reta forem dados dois segmentos AB e CD de comprimentos a e c, respectivamente, então a razão entre os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ será:

- $+\dfrac{a}{c}$ se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem o mesmo sentido sobre a reta;
- $-\dfrac{a}{c}$ se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem o sentidos opostos sobre a reta.

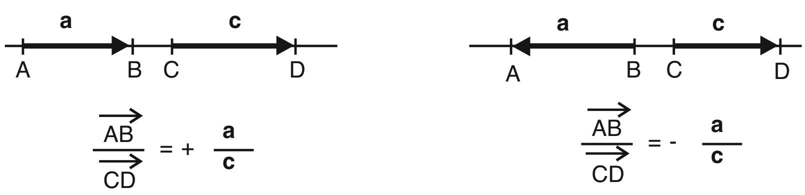


Figura 73

Multiplicação de um ponto

Definição: *Sejam dados dois pontos A e O sobre uma reta r e um número real $\alpha \neq 0$. O ponto $B \in r$ é a* ***multiplicação*** *de A por α, com* ***centro*** *em O, se e somente se, $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \alpha$, ou ainda ,$\overrightarrow{OB} = \alpha.\overrightarrow{OA}$.*

Exemplos: Multiplicar o ponto A por α com centro em O nos seguintes casos:

a)$\alpha = \dfrac{2}{3}$

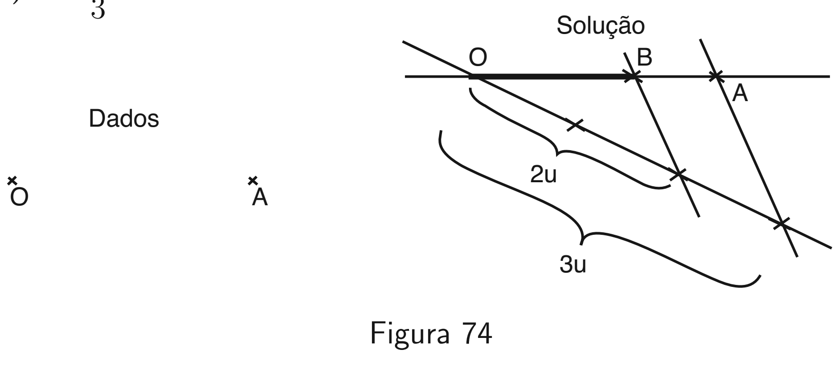


Figura 74

b) $\alpha = -\dfrac{3}{2}$

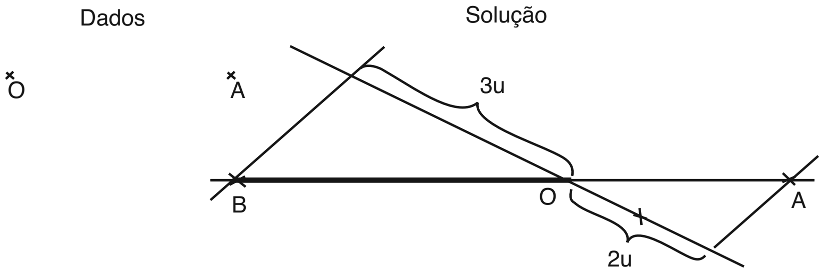


Figura 75

Note que os exemplos anteriores são solucionados utilizando somente o Teorema de Tales. No caso de multiplicação por um número inteiro a solução pode ser obtida sem a utilização do Teorema de Tales, pois basta repetir o segmento quantas vezes representar o inteiro no mesmo sentido (inteiro positivo) ou no sentido oposto (inteiro negativo).

c) $\alpha = -2$ e $\alpha = 3$

Figura 76

As maiores dificuldades encontradas na multiplicão de um ponto A com centro em O acontecem quando consideramos os valores reais irracionais. Em alguns casos a multiplicação se torna impossível, por exemplo $\alpha = \pi$, visto que é impossível obte-lo de maneira exata utilizando régua e compasso. Outros possíveis, como por exemplo $\alpha = \sqrt{2}$, necessita de construções auxiliares. Vejamos o seguinte exemplo:

d) $\alpha = \sqrt{2}$

Sendo dados o centro O e ponto A, indicando por a a medida do segmento OA, devemos obter inicialmente um segmento de medida $a\sqrt{2}$. Este segmento pode ser obtido pela hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com catetos de medida a. Dessa forma, basta tomar o ponto B no prolongamento do segmento orientado $\overrightarrow{OA}$ de medida $a\sqrt{2}$.

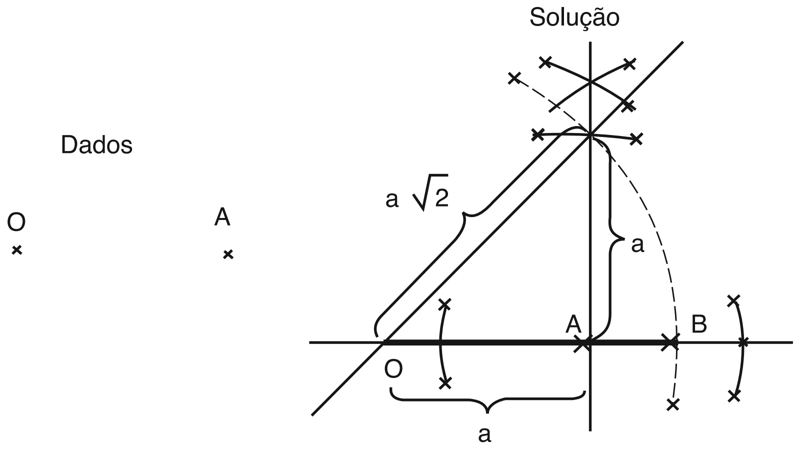


Figura 77

Exercícios

1. Multiplique o ponto A por α nos seguintes casos:

   (a) $\alpha = \dfrac{4}{3}$

Figura 78

   (b) $\alpha = -\dfrac{3}{4}$

Figura 79

   (c) $\alpha = -2\sqrt{3}$

Figura 80

Vamos explicar como se obtém o centro de homotetia considerando $\dfrac{m}{n} > 1$.

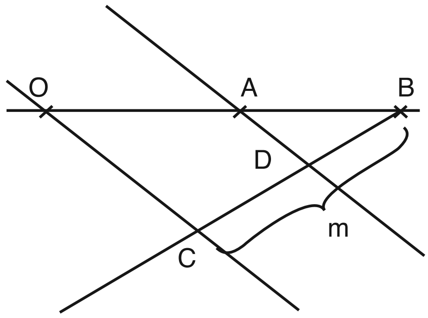


Figura 81

Tomando em uma reta qualquer que passe por B um ponto C tal que $\overline{BC} = m$, unindo o centro O e o ponto C e se traçarmos por A uma reta paralela a OC, esta reta interceptará o segmento CB no ponto D tal que $\overline{CD} = n$, pois

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{\overline{CD}}.$$

Podemos obter o centro de homotetia da seguinte forma:

- Construa a semi-reta de origem em B que passa por A.
- Pelo ponto B trace outra semi-reta. E nessa semi-reta marque o ponto C tal que $BC = m$.
- Marque o ponto D no segmento CB tal que $CD = n$.
- Una os pontos D e A por uma reta r.
- Pelo ponto C trace uma reta paralela à r interceptando a semi-reta de origem em B que passa por A no ponto O que é o centro de homotetia.

Siga o mesmo raciocínio para os outros casos de razão de homotetia.

2. Dados os pontos A e B distintos, obtenha o ponto O na reta determinada por esses pontos de tal forma que B seja obtido pela multiplicação de A por α com centro em O.

   (a) $\alpha = 2$

Figura 82

   (b) $\alpha = -\dfrac{1}{4}$

Figura 83

   (c) $\alpha = -\sqrt{5}$

Figura 84

As aplicações de homotetia em construções geométricas são baseadas na seguinte propriedade:

Propriedade 1: *Se multiplicarmos dois pontos distintos A e B por um mesmo número real $\alpha \neq 0$ com o mesmo centro O obtemos dois pontos A' e B' tais que $A'B'//AB$ e* $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |\alpha|$.

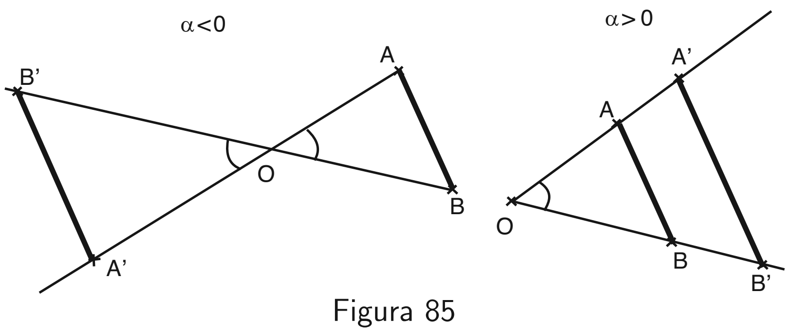


Figura 85

Note pela Figura 85 que independente do sinal de α temos $A'\widehat{O}B' = A\widehat{O}B$ e $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = |\alpha|$, e assim, os triângulos AOB e $A'OB'$ são semelhantes, e conseqüentemente $A'B'//AB$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |\alpha|$.

Figuras Homotéticas

Definição: Sejam dados uma figura F e um ponto O. Consideremos a figura F' que reune todos os pontos que são resultados da multiplicação dos pontos de F por um mesmo valor real $\alpha \neq 0$ relativos ao centro O.

1. As figuras F e F' são chamadas de figuras **Figuras Homotéticas**;
2. o ponto O é chamado de **Centro de Homotetia**;
3. o valor α é chamado de **Razão de Homotetia**;
4. a reta que contém o ponto e o centro de homotetia é chamado de **Reta de Homotetia**;
5. se $\alpha > 0$, então dizemos que a homotetia é **Direta**;
6. se $\alpha < 0$, então dizemos que a homotetia é **Inversa**;
7. se um ponto $A \in F$ se transforma pela homotetia em um ponto $A' \in F'$, então os pontos A e A' são chamados de **Pontos Homólogos**.

Homotetia direta ($\alpha > 0$)

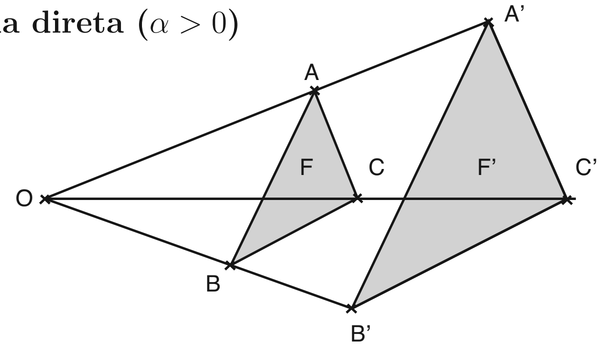


Figura 86

Homotetia inversa ($\alpha < 0$)

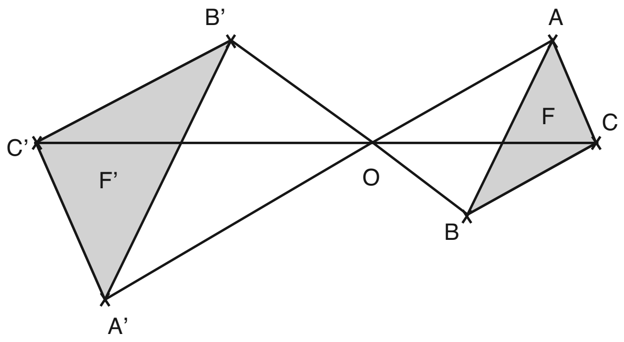


Figura 87

(1) "Linear" = "segue em uma linha reta". Os elementos lineares são os elementos retilíneos obtidos por pontos da figura dada. No caso de um polígono, por exemplo, os lados, a diagonais e as retas suportes dos lados ou das diagonais são elementos retilíneos do polígono.

Uma conseqüência imediata da Propriedade 1 de homotetia é a seguinte propriedade que se refere a elementos lineares(1) de figuras homotéticas.

Propriedade 2 *Duas figuras homotéticas são semelhantes e apresentam seus elementos lineares paralelos.*

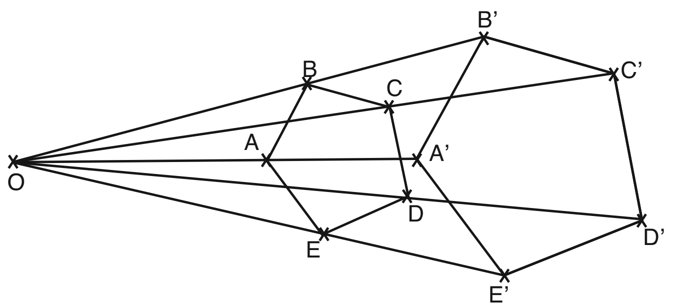


Figura 88 : $ABCDE \simeq A'B'C'D'E'$ e $AB//A'B'$, $BC//B'C'$...

O início dos estudos de figuras semelhantes é atribuido a Tales de Mileto(± 600 a.C.). O estudo das figuras semelhantes semelhantemente colocadas foi feita, pela primeira vez, por Poncelet, em 1822. A denominação figuras homotéticas foi dada por Chasles, em 1827.

Alguns autores no passado costumavam denominar as figuras homotéticas como ***figuras semelhantes semelhantemente colocadas***.

Multiplicação da reta

Pela propriedade 2 a multiplicação de uma reta é um outra reta paralela, pois a reta é uma figura linear. Neste caso, para se obter a multiplicação de uma reta basta então multiplicarmos um único ponto desta reta.

Problema 1: Multiplicar a reta r por $\alpha = \dfrac{3}{2}$ com centro de homotetia $O \notin r$.

Para efetuarmos a multiplicação podemos seguir os seguintes passos:

1.1 Escolha um ponto $A \in r$. Una o ponto A ao centro de homotetia O. Denomine a reta obtida por s;

1.2 Trace uma reta t pelo ponto O distinta de s e construa seguidamente, após o ponto O sobre a reta t, três segmentos de igual comprimento. Denomine os pontos obtidos em t por O_1, O_2 e O_3;

1.3 Trace a reta u pelos pontos O_2 e A e trace a reta v pelo ponto O_3 paralela à reta u;

1.4 As retas v e s se interceptam no ponto A' que é a multiplicação de A por $\dfrac{3}{2}$ com centro em$O$;

1.5 Pelo ponto A' trace a reta r' paralela à r.

A reta r' é a multiplicação de r por $\dfrac{3}{2}$ com centro em O.

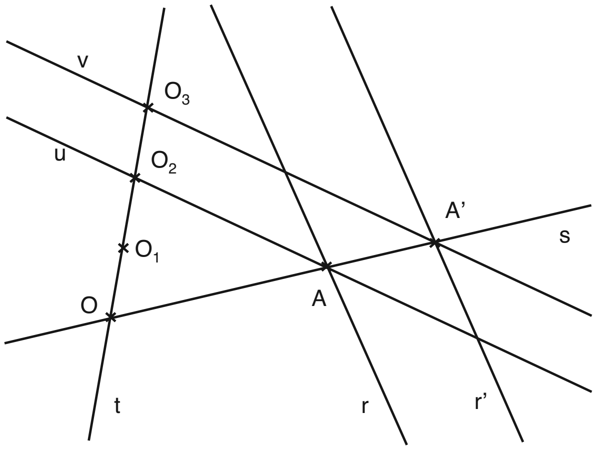


Figura 89

Justificativa: Observe que $\dfrac{\overline{OO_3}}{\overline{OO_2}} = \dfrac{3}{2}$ por construção. Como O_2A e O_3A' são paralelos e o ângulo em O é comum aos triângulos O_2OA e O_3OA', então tais triângulos são semelhantes. Neste caso, $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{3}{2}$, isto é, A' é a multiplicação de A por $\dfrac{3}{2}$ com centro em O. Pela propriedade 2, r' que passa por A' paralela à r, é a multiplicação da reta r por $\dfrac{3}{2}$ com centro em O.

Observações:

- No problema anterior a multiplicação da reta r por $\dfrac{3}{2}$ resultou em afastamento da reta em relação ao centro de homotetia, isto acontece porque a razão de homotetia é maior que 1. Se a razão é positiva e menor que 1 o resultado da multiplicação se aproxima do centro.
- Se a razão é negativa o centro de homotetia aparece entre a reta dada e o resultado da multiplicação.

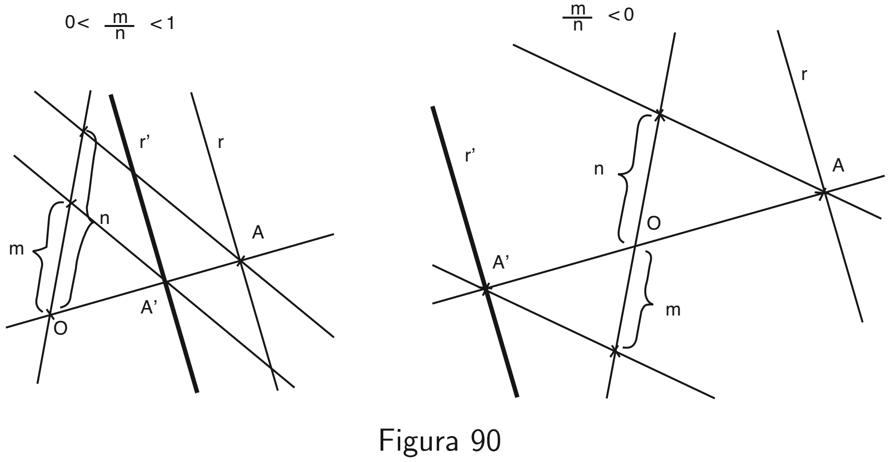


Figura 90

- Obtida a multiplicação de uma reta podemos obter imediatamente a multiplicação de um ponto qualquer da reta, basta conduzi-lo por sua reta de homotetia ao resultado da multiplicação da reta dada.

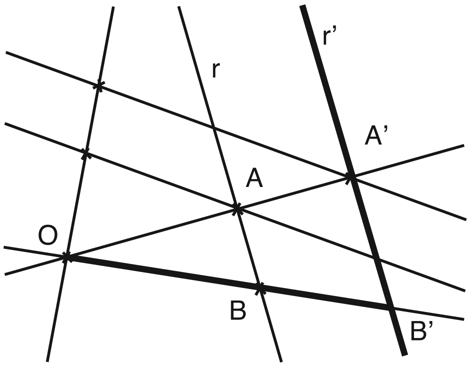


Figura 91

Exercícios

3. Para os itens a seguir multiplique a reta r pela razão α com centro de homotetia O.

   (a) $\alpha = \dfrac{5}{4}$

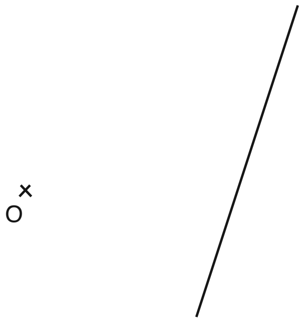


Figura 92

   (b) $\alpha = \dfrac{3}{5}$

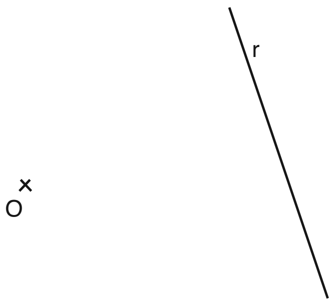


Figura 93

(c) $\alpha = -\dfrac{5}{3}$

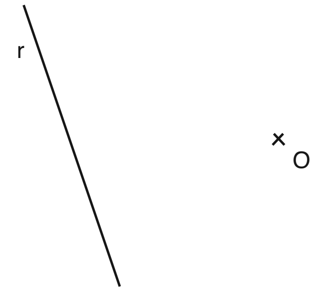


Figura 94

(d) $\alpha = 2$

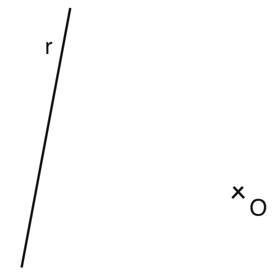


Figura 95

(e) $\alpha = -\dfrac{m}{n}$

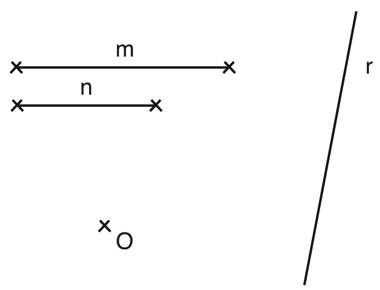


Figura 96

4. Encontre o lugar geométrico dos centros de homotetia para os quais a reta r' é o resultado da multiplicação de r por α nos seguintes itens:

(a) $\alpha = \dfrac{5}{4}$

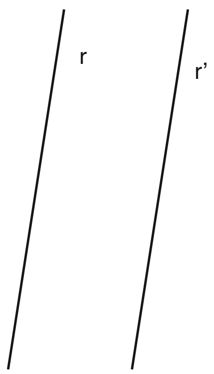


Figura 97

(b) $\alpha = \frac{3}{5}$

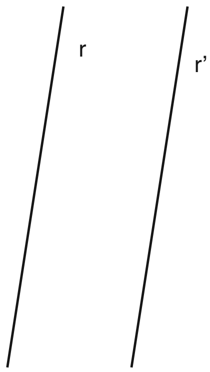


Figura 98

(c) $\alpha = -\frac{5}{3}$

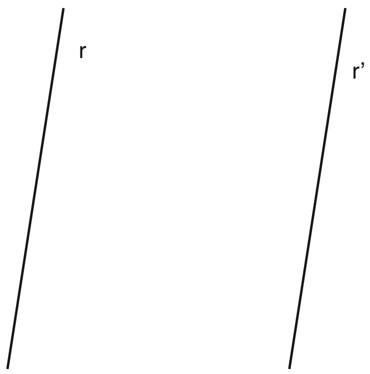


Figura 99

(d) $\alpha = \frac{m}{n}$

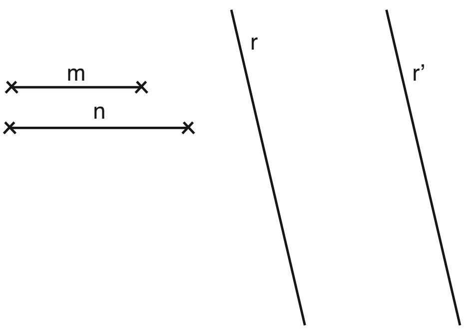


Figura 100

Multiplicação da circunferência

Pela propriedade 2 os raios homólogos de duas circunferências são paralelos. Neste caso, para multiplicarmos uma circunferência basta multiplicarmos o centro, pois a extremidade do raio pode ser conduzido por sua reta de homotetia. Portanto, a multiplicação de uma circunferência deve seguir os seguintes procedimentos:

- Trace a reta determinada pelo centro de homotetia O e pelo centro da circunferência C dada e denomine-a por r.
- Trace um outra reta pelo ponto O distinta de r e sobre esta reta construa os segmentos com origem em O de comprimentos m e n que determinam a razão de homotetia $\frac{m}{n}$. Denomine as respectivas extremidades por O_2 e O_1.
- Una os pontos O_1 e C por uma reta e denomine-a por s. Trace pelo ponto O_2 uma reta s' paralela a s interceptando a reta r no ponto C' que será o centro da circunferência homotética.
- A reta s intercepta a circunferência dada no ponto A. Conduza o ponto A à reta s' por sua reta de homotetia obtendo o ponto A'. Construa a circunferência de centro em C' que passe por A'.

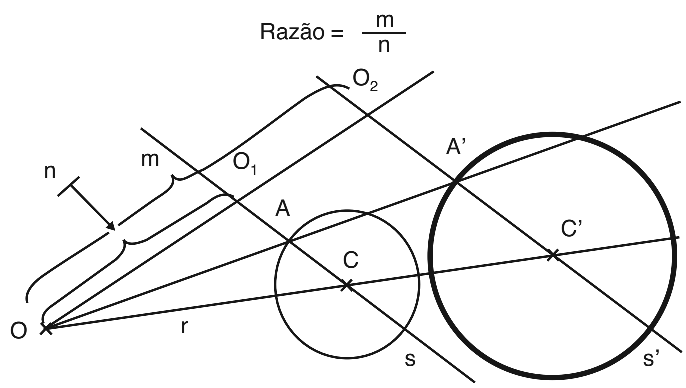


Figura 101

(1) Duas circunferências são ditas concêntricas se possuem os centros coincidentes.

Observação: Duas circunferências são sempre homotéticas. Os centros de homotetia podem ser até dois, um de homotetia inversa um de homotetia direta. Se as circunferência são concêntricas[1] então existe apenas o centro de homotetia direta que coincide com o centros das circunferências. Se as circunferências não são concêntricas e possuem os raios de mesmo comprimento então existe apenas o centro de homotetia inversa que é o ponto médio dos centros. No caso de circunferências que não são concêntricas lembre que os raios homotéticos devem ser paralelos, mas os raios apesar de paralelos podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos determinando respectivamente o centro de homotetia direta e o centro de homotetia inversa. Podemos obter os centros de homotetia da seguinte forma:

- Trace um diâmetro em cada circunferência paralelos.
- Trace a reta r pelos centros das circunferências.
- Trace uma reta pelas extremidades dos dois diâmetros que estão no mesmo semiplano determinado por r interceptando r em O_1.
- Trace uma reta pelas extremidades dos dois diâmetros que estão em semiplanos opostos interceptando r em O_2.
- O ponto O_1 é o centro de homotetia direta e o ponto O_2 é o centro de homotetia inversa.

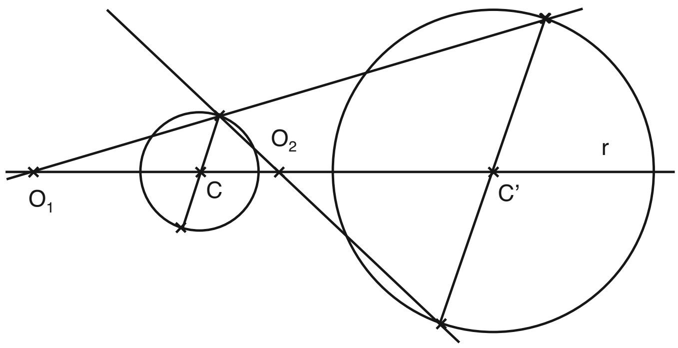


Figura 102

Observações:

1. Se a circunferência maior não contém a menor então o centro de homotetia direta é o ponto de encontro das retas tangentes comuns externas das circunferências.

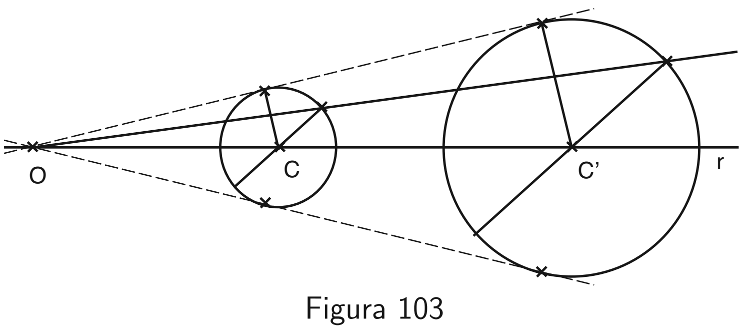


Figura 103

2. Se as circunferências não se interceptam então o centro de homotetia inversa é o ponto de encontro das retas tangentes comuns internas das circunferências.

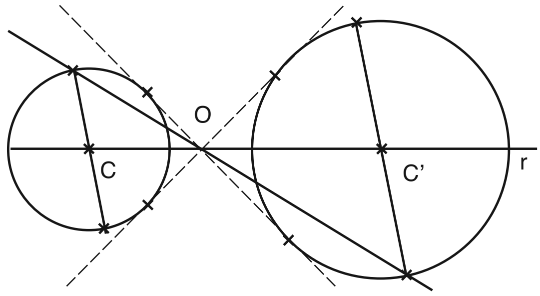


Figura 104

3. Se as circunferências são tangentes externas então o centro de homotetia inversa é o ponto de tangência.

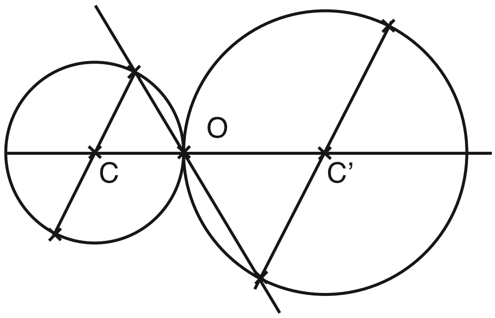


Figura 105

4. Se as circunferências são tangentes internas então o centro de homotetia direta é o ponto de tangência.

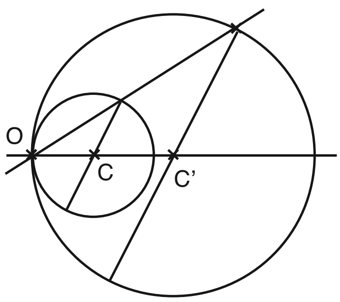


Figura 106

Exercícios

5. Nos itens a seguir multiplique a circunferência λ por α com centro de homotetia O.

   (a) $\alpha = \dfrac{5}{3}$

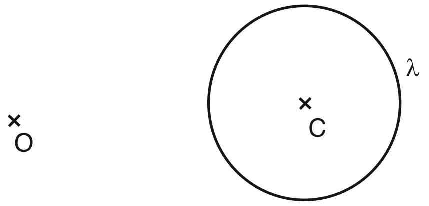


Figura 107

   (b) $\alpha = -\dfrac{3}{5}$

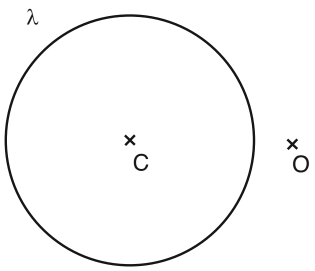


Figura 108

   (c) $\alpha = -2$

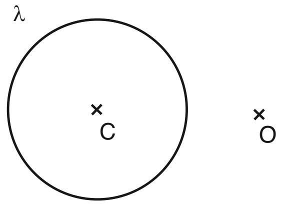


Figura 109

   (d) $\alpha = \dfrac{2}{3}$

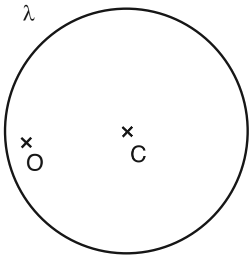


Figura 110

(e) $\alpha = -\dfrac{3}{4}$

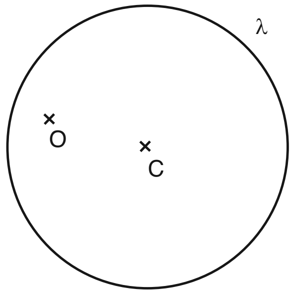


Figura 111

6. Obtenha a circunferência λ cuja multiplicação pela razão α resulta na circunferência λ' nos seguintes itens.

(a) $\alpha = \dfrac{4}{3}$

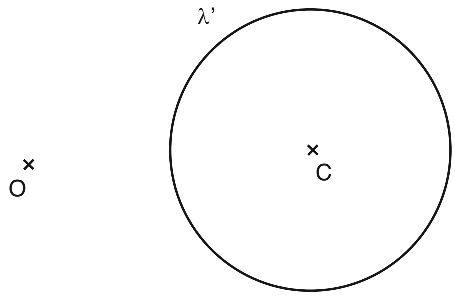


Figura 112

(b) $\alpha = -\dfrac{3}{5}$

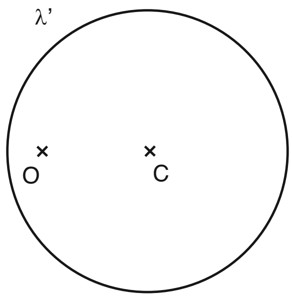


Figura 113

(c) $\alpha = -\dfrac{2}{3}$

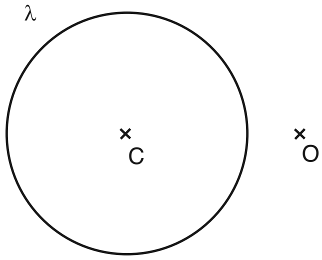


Figura 114

(d) $\alpha = \dfrac{3}{4}$

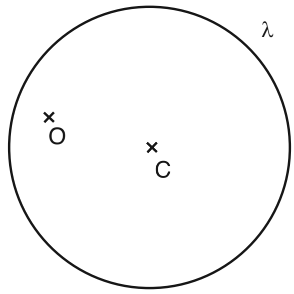


Figura 115

7. Obtenha os centros de homotetia direta e inversa entre as seguintes circunferências:

(a)

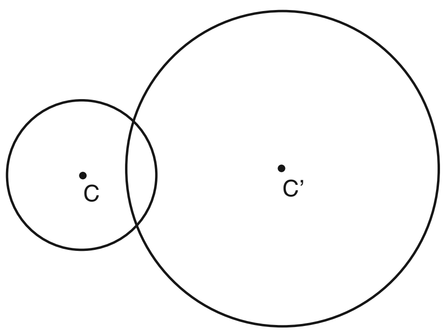


Figura 116

(b)

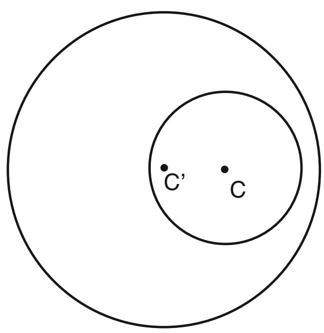


Figura 117

Resumo

Nesta aula, você aprendeu...

- a aplicar homotetia de ponto, reta e circunferência.

Aula 17 – Homotetia II

Objetivo

Aplicar homotetia em resoluções de problemas de construção geométrica.

Nesta aula veremos diversos problemas de construção geométrica utilizando multiplicação de ponto, de reta e de circunferência. Para alguns problemas a escolha do centro de homotetia é subjetiva, no entanto essa escolha deve ser feita de forma adequada a facilitar a resolução do problema, como nos seguintes problemas.

Problema 1: Multiplique um polígono qualquer por uma razão α dada.

Resolveremos este problema para $\alpha = \dfrac{3}{2}$ e um hexágono $ABCDEF$, pois a resolução servirá para qualquer razão e qualquer polígono.

Note que o centro de homotetia deste problema não é conhecido, por isso devemos escolhe-lo da maneira mais adequada. Em geral, a escolha é feita por um ponto que pertença à figura original, pois dessa forma ele torna-se **invariante pela multiplicação**$^{(1)}$, neste problema escolheremos um vértice como centro de homotetia. $\alpha = \dfrac{3}{2}$

Sabemos que um ponto A' é a multiplicação do ponto A pela razão α com centro em O se e somente se $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \alpha$. Dizemos que um ponto A é **invariante pela multiplicação** quando o resultado da multiplicação A' coincide com A, isto é, $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA}} = \alpha$. Este fato acontece se e somente se $\alpha = 1$ ou o centro O coincide com o ponto A.

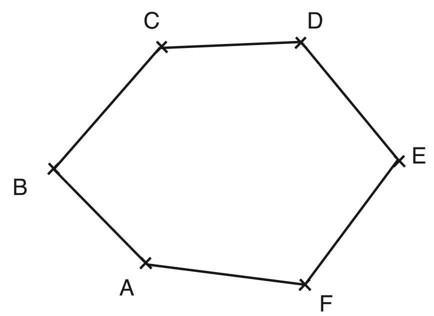


Figura 118

Tomando o vértice A como centro de homotetia multiplicamos o hexágono através dos seguintes passos:

1.1 Obtenha a multiplicação do vértice B por $\dfrac{3}{2}$ com centro em A e obtemos um ponto B'.

1.2 Trace as retas de homotetia dos vértices C, D, E e F com centro de homotetia em A.

1.3 Pelo ponto B' trace uma reta paralela ao lado BC que interceptará a reta de homotetia do ponto C no ponto C'.

Reveja a multiplicação de ponto na Aula 16.

1.4 Pelo ponto C' trace uma reta paralela ao lado CD que interceptará a reta de homotetia do ponto D no ponto D'.

1.5 Pelo ponto D' trace uma reta paralela ao lado DE que interceptará a reta de homotetia do ponto E no ponto E'.

1.6 Pelo ponto E' trace uma reta paralela ao lado EF que interceptará a reta de homotetia do ponto F no ponto F'.

1.7 O hexágono $AB'C'D'E'F'$ é o resultado da multiplicação do polígono $ABCDEF$ pela razão $\alpha = \dfrac{3}{2}$ com centro em A.

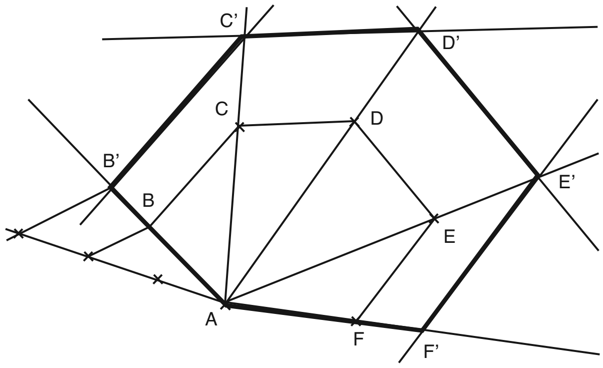


Figura 119

Exercício

1. Multiplique o pentágono ABCDE por $\dfrac{4}{3}$.

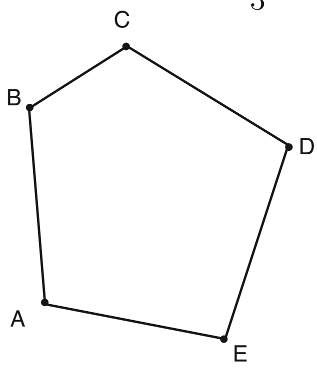


Figura 120

(1) Reveja a Aula 8 relativa à divisão de circunferências e em particular a divisão em cinco partes exatas(Problema 3).

A homotetia serve, em alguns casos, como processo auxiliar para construção de polígonos cujas propriedades para os lados não são simples, por exemplo o pentágono regular. Para construirmos um pentágono regular sendo dado o seu lado é necessário que se construa um pentágono regular(1) com um lado de uma medida qualquer e em seguida obtemos um homotético considerando o lado.

Problema 2: Construa um pentágono regular de lado igual a ℓ.

2.1 Construa um pentágono regular inscrito em uma circunferência de centro O utilizando o processo realizado para dividir uma circunferência em cinco partes exatas.

Figura 121

2.2 Trace as retas de homotetia com centro em O de dois vértices consecutivo do pentágono construído no item anterior.

2.3 No prolongamento do lado do pentágono compreendido entre os raios de homotetia construa um segmento MN de comprimento ℓ, considerando como origem deste segmento uma das extremidades do lado prolongado. Considere M como a origem do segmento.

2.4 Pelo ponto N trace a reta s paralela à reta de homotetia que passa por M.

2.5 A reta s interceptará a outra reta de homotetia no ponto A que é o primeiro vértice do polígono desejado.

2.6 Construa a circunferência λ_2 de centro em O que contém o ponto A.

2.7 Construa o pentágono inscrito em λ_2 utilizando o lado de medida ℓ.

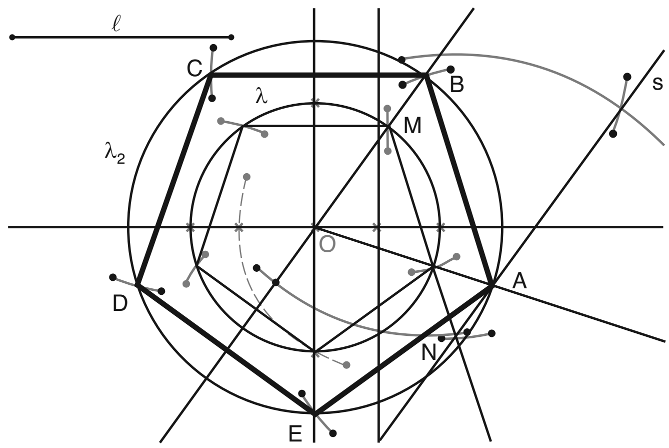


Figura 122

Problema 3: Dadas duas curvas $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$, um ponto $\boldsymbol{O}$ e dois segmentos de comprimento $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$. Obtenha os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sobre $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$, respectivamente, tal que $\dfrac{\boldsymbol{OA}}{\boldsymbol{OB}} = \dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$.

Este problema é chamado de **Condução de um ponto de uma figura para outra figura sob uma razão** $\dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ **dada**.

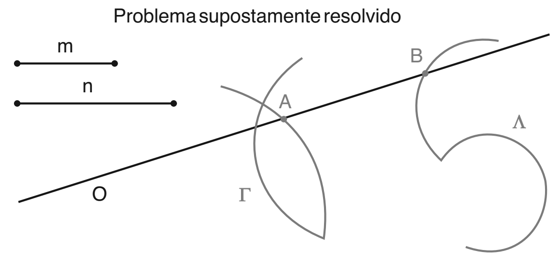


Figura 123

Como $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{m}{n}$ então B é o ponto homólogo de A com centro em O e razão $\dfrac{n}{m}$. Neste caso, podemos obter o ponto B pela interseção da figura homotética Γ' de Γ com a figura Λ.

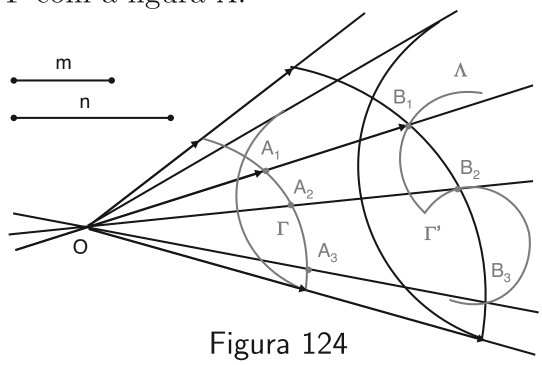


Figura 124

O problema anterior serve de mecanismo para solucionarmos os seguintes exemplos:

Exemplo 1

Obtenha dois pontos A e B pertencentes à reta r e à circunferência λ, respectivamente, tal que $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{3}{4}$.

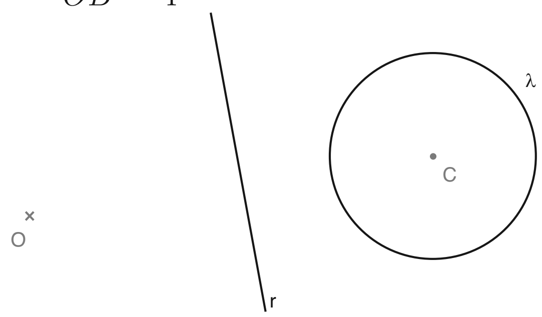


Figura 125

Pelo Problema 2, a resolução deste exemplo se dá multiplicando r por $\frac{4}{3}$. Podemos assim, obter até duas soluções que depende da posição que a multiplicação da reta r ocupará em relação à circunferência λ.

Resolução:

1. Trace duas semi-retas por O e denomine por P a interseção de uma das semi-retas com a reta r.

2. Estabeleça um segmento unidade e construa quatro segmentos consecutivos com o comprimento da unidade sobre a semi-reta que não contém P a partir do centro de homotetia. Denomine os quatro pontos obtido por Q, R, S e T.

3. Una o terceiro ponto S com o ponto P por uma reta s.

4. Trace pelo ponto T a reta s' paralela a s.

5. A reta s' interceptará a semi-reta que contém P num ponto U.

6. Trace pelo ponto U a reta r' paralela a r.

7. A reta r' é a multiplicação de r por $\frac{4}{3}$. As interseções B_1 e B_2 de r' com λ são os dois pontos de λ pedidos no exemplo.

Para obter os pontos correspondentes em r basta conduzi-los por suas retas de homotetia até r.

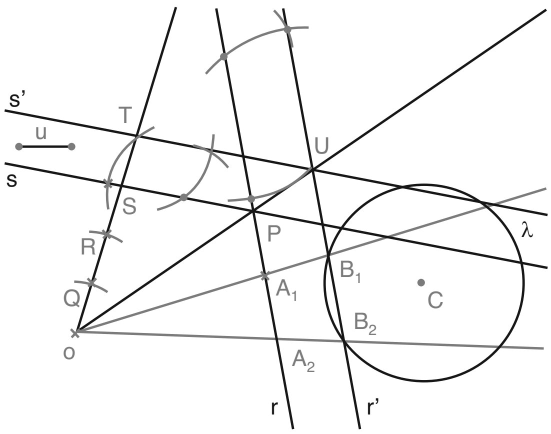


Figura 126

O exemplo anterior poderia ter sido resolvido multiplicando-se a circunferência λ por $\frac{3}{4}$.

Exemplo 2

Trace pelo ponto A sobre a interseção das circunferências λ_1, de centro O_1, e λ_2, de centro O_2, uma reta r que corte as circunferências nos pontos M e N, respectivamente, tal que $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2}{3}$.

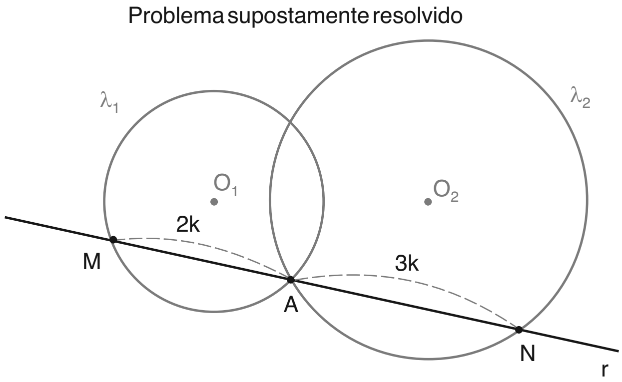


Figura 127

Como $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2}{3}$ e os segmentos $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ possuem sentidos opostos, então o ponto N é o resultado da multiplicação do ponto M por $-\dfrac{3}{2}$ com centro em A. Assim, o ponto N é obtido pela interseção de λ_2 com o resultado da multiplicação de λ_2.

Resolução:

1. Trace a reta s que contém o centro e o ponto A.

2. Divida o segmento O_1A em duas partes iguais.

3. Utilizando unidade igual à metade do segmento O_1A construa um segmento AO_3 igual a três unidades, na parte externa da circunferência λ_1, sobre a reta s.

4. Construa a circunferência λ_3 de centro O_3 que passa por A.

5. A interseção entre λ_3 e λ_2 é o ponto N.

6. Unindo os pontos A e N obterá a reta r e a interseção entre r e λ_1 é o ponto M.

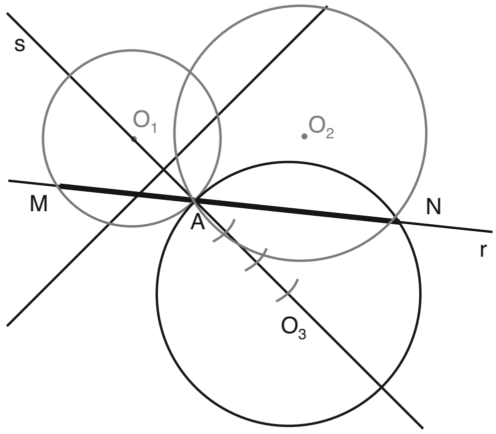


Figura 128

Exercícios

2. Conduza por O uma reta r que intercepte as retas s e t, dadas a seguir, nos pontos A e B, respectivamente, tal que $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{1}{2}$.

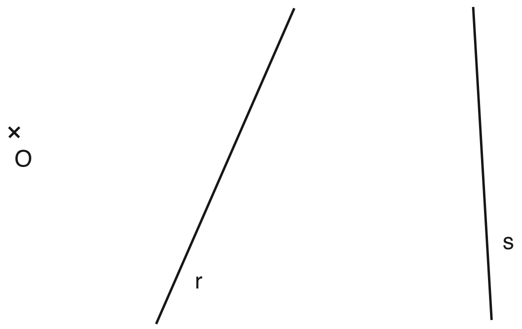


Figura 129

3. Conduza por O uma reta r que intercepte as circunferências λ_1 e λ_2 nos pontos A e B, respectivamente, tais que $\dfrac{OA}{OB} = -\dfrac{3}{5}$.

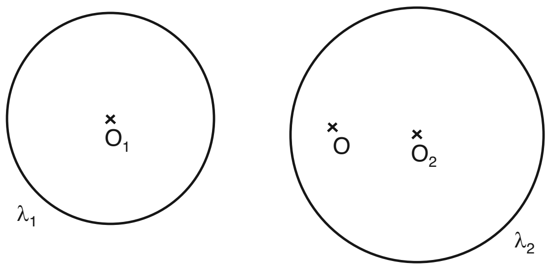


Figura 130

4. Dados um segmento ℓ, um ponto M e duas retas r e s. Construa um paralelogramos $ABCD$, onde r contém o lado AB, $AB = \ell$, C pertence a s e o ponto M é o ponto de encontro das diagonais.

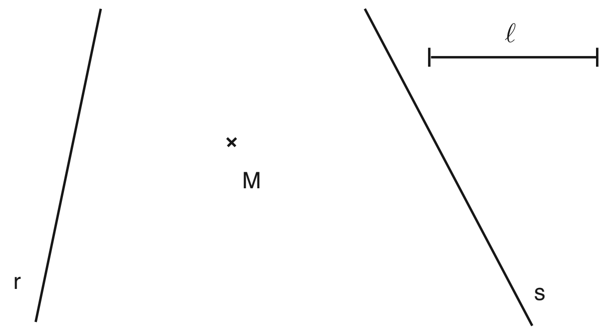


Figura 131

Sugestão para o Exercício 4

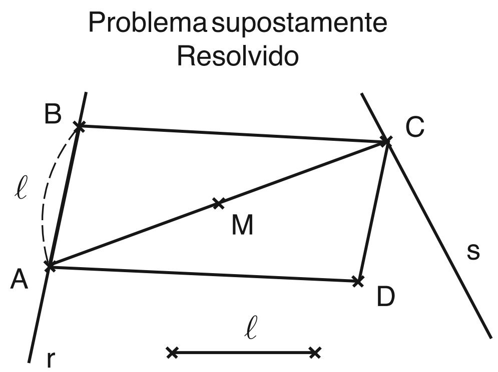


Figura 132

Note pela figura do problema supostamente resolvido a diagonal AC pode ser obtida de forma semelhante ao **Exercício 2** considerando a razão -1 para o ponto M como centro.

Aplicação de Homotetia em Problemas de Posição

Nesta seção veremos que a homotetia pode ser aplicar em problemas de posicionamento de polígonos, como exemplo a inscrição de polígonos em outros polígonos. Este processo é baseada no deslocamento homotético das figuras para sua posição desejada.

Problema 3: Dados um triângulo ABC e três retas r, s e t, construa um triângulo $A'B'C'$ inscrito em ABC cujos lados são paralelos às retas r, s e t, respectivamente.

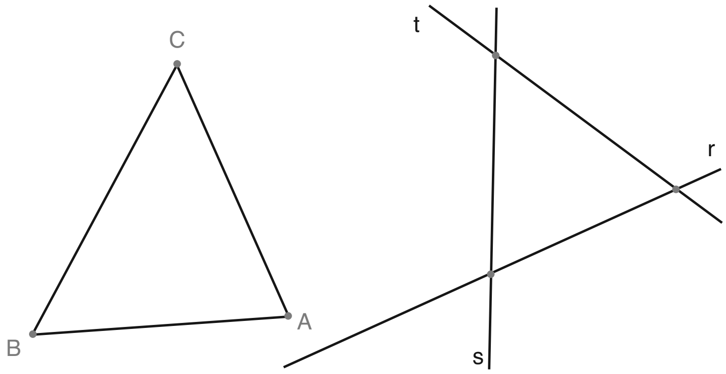


Figura 133

Resolução:

Vamos construir um triângulo $A'B'C'$ inscrito em ABC tal que $A' \in BC$, $B' \in AC$ e $C' \in AB$, onde $A'B'//t$, $A'C'//s$ e $B'C'//r$. Para isto, podemos considerar todos os triângulos $A^*B^*C^*$ semelhantes ao triângulo $A'B'C'$ desejado tal que $B^* \in AC$ e $C^* \in AB$ desconsiderando inicialmente a necessidade de $A^* \in BC$. Todos estes triângulos são semelhantes entre si e além disso são homotéticos com centro de homotetia em A. Assim, o ponto A' e o único ponto homólogo aos vértice A^* que pertença ao lado BC, que se obtém pela interseção da reta de homotetia de A^* com BC.

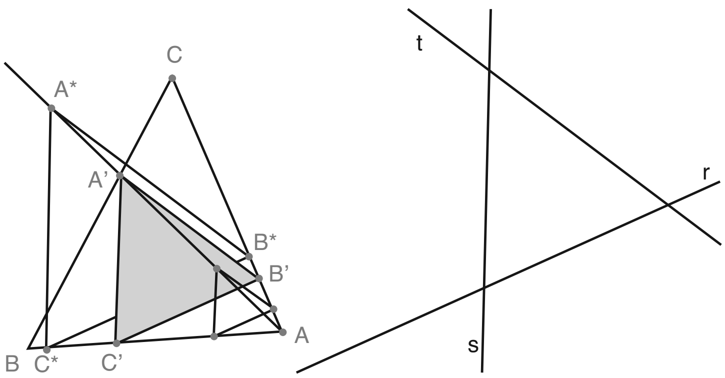


Figura 134

Portanto, a resolução do problema é obtida pelos seguintes passos:

3.1 Marque um ponto $B^* \in AC$.

3.2 Trace a reta r^* paralela à reta r que passe por B^*.

3.3 A reta r^* intercepta a reta suporte do lado AB no ponto C^*.

3.4 Pelo ponto B^* trace a reta t^* paralela a t.

3.5 Pelo ponto C^* trace a reta s^* paralela a s.

3.6 As retas t^* e s^* se interceptam no ponto A^*.

3.7 Trace a reta de homotetia de A^* com centro em A.

3.8 A interseção da reta de homotetia do ponto A^* e o lado BC é o ponto A'.

3.9 Pelo ponto A' trace as retas t' e s' paralelas, respectivamente, às retas t e s.

3.10 A reta t' intercepta o lado AC em B' e a reta s' intercepta o lado AB em C'.

O triângulo $A'B'C'$ é uma solução para o problema. Outras soluções podem ser obtidas se for possível $A'B'//s$ ou $A'B'//t$.

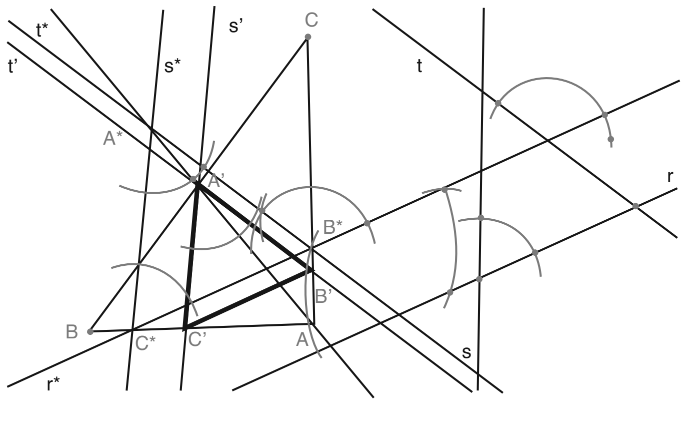


Figura 135

Problema 4: Inscreva um quadrado num setor circular dado.

Este possui duas soluções com grandes diferenças. Neste caso, efetuaremos as duas soluções. A primeira solução pode ser obtida considerando dois vértices sobre um dos raios que formam o setor, um vértice sobre o outro raio e o quarto vértice sobre o arco. Neste caso, todos os quadriláteros que possuem dois vértices sobre a reta suporte de um raio e um terceiro vértice sobre a reta suporte do outro raio são semelhantes e homotéticos com centro de homotetia sobre o centro do setor circular.

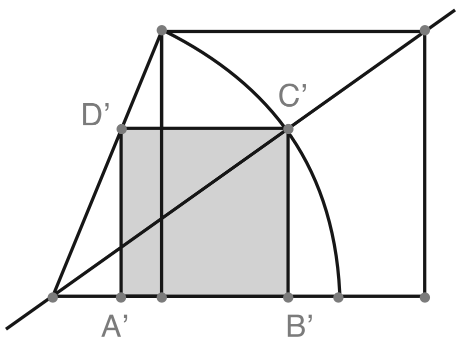


Figura 136

Considere um setor circular de centro O que é determinado pelo arco $\widehat{XY}$. Vamos construir o quadrado que possua dois vértices sobre o raio OY.

4.1 Pelo ponto X trace uma reta perpendicular ao raio OY, determinando em OY um ponto A.

4.2 Construa um quadrado $ABCX$ de lado igual a AX, de tal forma que o vértice C seja externo ao setor circular.

4.3 Trace a reta de homotetia do vértice C com centro em O.

4.4 A reta de homotetia do ponto C intercepta o arco $\widehat{XY}$ no ponto C'.

4.5 Pelo ponto C' trace uma reta perpendicular ao raio OY, determinando em OY o ponto B'.

4.6 Construa o quadrado de lado igual a $B'C'$ com vértice A' sobre o lado OY e vértice D' sobre o raio OX.

O quadrado $A'B'C'D'$ é a solução do problema.

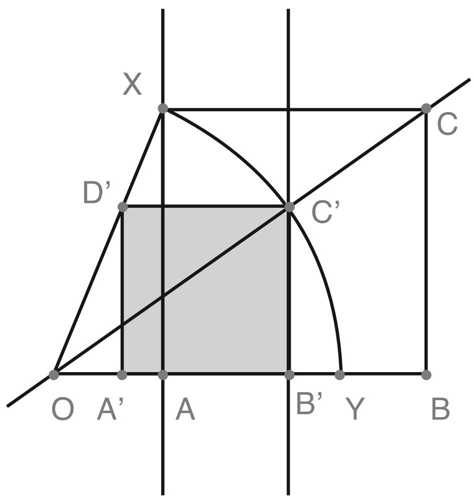


Figura 137

A segunda solução é obtida com dois vértices sobre o arco e um vértice em cada raio. Neste caso, os vértices que estão sobre os raios formam com o centro do setor circular um triângulo isósceles e além disso o lado formado por estes vértices é paralelo à corda determinada pelo arco do setor circular. Neste caso, todos os quadrados que possuem dois de seus vértices sobre as retas suportes dos raios do setor, cujo lado determinado por eles seja paralelo a corda, são homotéticos de centro sobre o centro do setor circular.

Considere um setor circular de centro O que é determinado pelo arco $\widehat{XY}$.

4.1 Construa o quadrado $ABYX$ com os vértice A e B situados na parte externa do setor circular.

4.2 Trace as retas de homotetia dos pontos A e B com centro em O.

4.3 As retas de homotetia interceptam o arco nos pontos A' e B', respectivamente.

4.4 Construa o quadrado $A'B'C'D'$ com o vértice C' sobre o raio OY e D' sobre o raio OX.

O quadrado $A'B'C'D'$ é a solução para o problema.

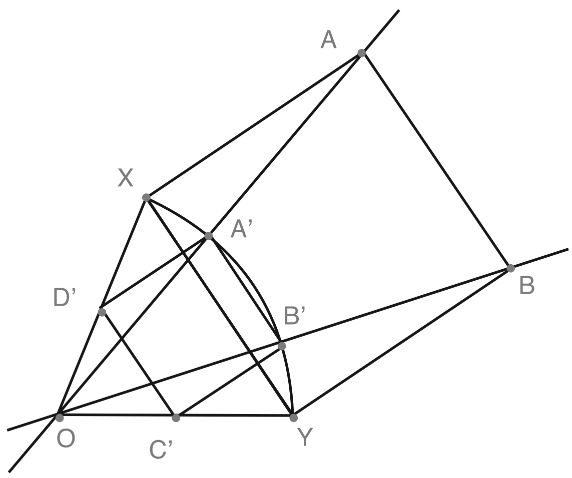


Figura 138

Exercícios

5. Inscreva um losango inscrito no triângulo ABC considerando o ângulo em A comum aos dois polígonos.

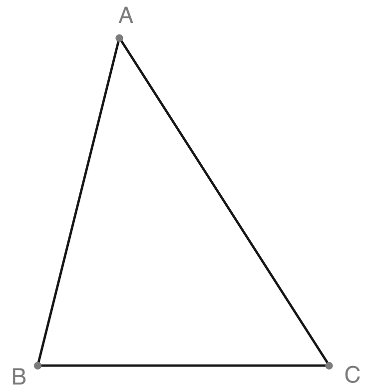


Figura 139

6. Construa um quadrado inscrito no triângulo ABC considerando um de seus lado paralelo ao lado AB.

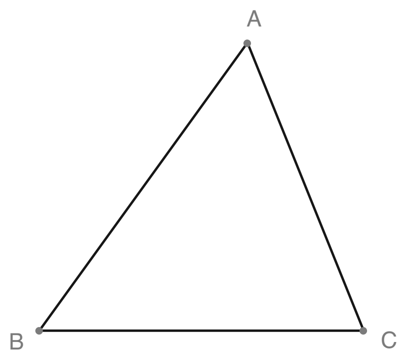


Figura 140

Aula 18 – Traçado de Ovais I

Objetivos

- Concordar arcos de circunferências com retas.
- Concordar arcos de circunferências com arcos de circunferências.

Concordância de Curvas

Definição: *Chama-se concordância de duas linhas curvas ou de uma reta com uma curva, à ligação entre elas , executada de tal forma, que se possa passar de uma para outra, sem ângulo, inflexão nem solução de continuidade, em outras palavras, as retas tangentes as curvas no ponto de concordância sejam coincidentes.*

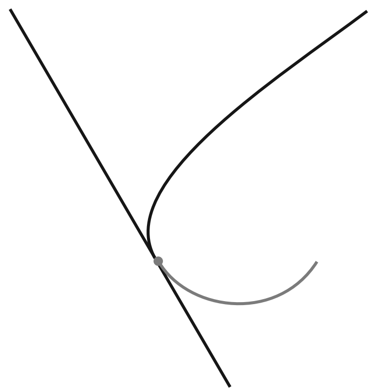


Figura 141

A concordância entre arcos de círculo e retas se baseia no seguinte princípio:

- *Para concordar um arco com uma reta, é necessário que o ponto de concordância e o centro do arco, estejam ambos sobre uma mesma perpendicular à reta.*

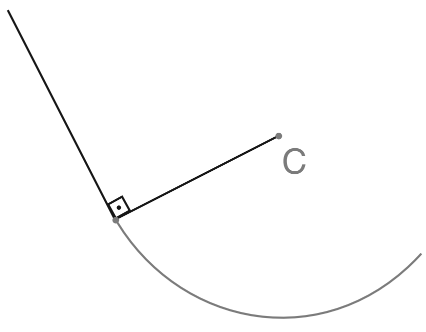


Figura 142

A concordância entre arcos e arcos se baseia no seguinte princípio fundamental:

- *Para concordar dois arcos, o ponto de concordância assim como os centros dos arcos, devem estar sobre uma mesma reta, que é normal aos arcos no ponto de concordância.*

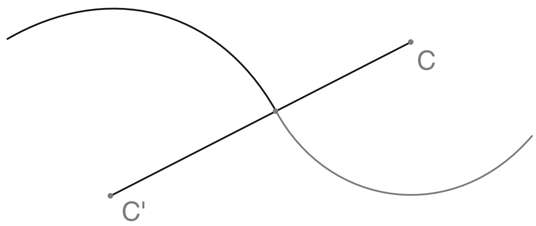


Figura 143

Construções envolvendo concordância entre arcos e retas.

Problema 1: Concordar um segmento de reta AB conhecido com um arco de circunferência de raio r, considerando como ponto de concordância a extremidade B do segmento.

Seja AB o segmento de reta conhecido e r o raio do arco de circunferência. Sendo dados o segmento e o raio, devemos encontrar o centro do arco.

Resolução:

1.1 Levante uma perpendicular ao segmento AB pelo seu extremo B e marque nesta perpendicular o segmento de reta OB, cuja medida é igual ao raio r.

1.2 O ponto O é raio do arco. Assim, basta construir um arco de centro em O que passe por em B como origem do arco.

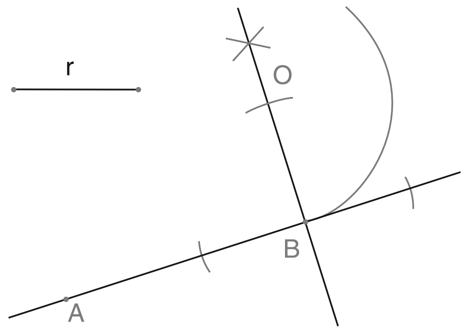


Figura 144

Problema 2: Concordar um segmento de reta AB com um arco de circunferência que deverá passar obrigatoriamente por um ponto C fora deste segmento.

Sejam AB o segmento de reta conhecido e C o ponto fora deste segmento em que passará o arco de circunferência.

Resolução:

2.1 Levanta uma reta r perpendicular ao segmento pela extremidade B.

2.2 Una os pontos C e B por meio do segmento CB.

2.3 Trace a mediatriz do segmento CB.

2.4 A interseção da mediatriz com a reta r é o centro O do arco a ser construído. Assim, basta construir o arco de centro em O que passa por B como origem do arco. Tal arco deverá passar pelo ponto C.

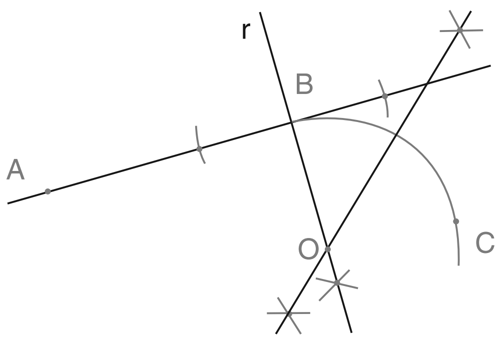


Figura 145

Problema 3: Concordar duas retas paralelas com um arco de circunferência.

Sejam r e s as duas linhas paralelas.

Resolução:

3.1 Levante por um ponto $A \in r$ uma reta t perpendicular que cortará a reta s no ponto B.

3.2 Divide o segmento de reta AB ao meio, obtendo o ponto O.

3.3 Com centro em O e raio OA trace o arco que concordará com as duas linhas.

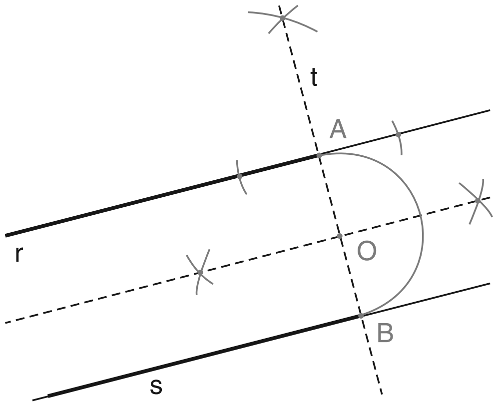


Figura 146

Problema 4: Concordar uma reta dada r num ponto ponto dado $A \in r$, com uma reta dada s por meio de um arco de circunferência, sendo conhecido o ponto O de interseção entre as retas r e s.

Sejam r e s as duas retas convergentes. Como arco de circunferência a ser construído deve ser tangente às retas dadas, então o centro do arco deve pertencer à bissetriz do ângulo formado pelas retas.

Resolução:

4.1 Trace a bissetriz do ângulo formado pelas retas.

4.2 Marque o ponto B sobre s tal que $OB = OA$.

4.3 Levante por A uma perpendicular à r que cortará a bissetriz em C.

4.4 Com centro em C e raio CA ou CB, faz-se a concordância.

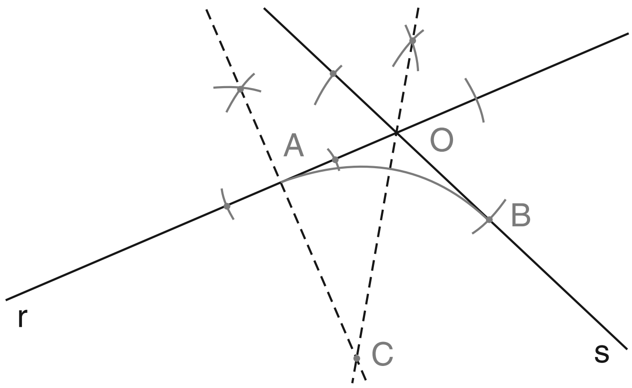


Figura 147

Exercícios

1. Concorde com a reta r um arco de raio R que contenha o ponto A.

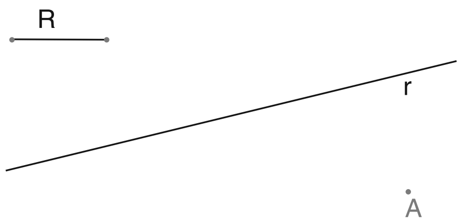


Figura 148

2. Concorde um arco de raio R com as retas r e s.

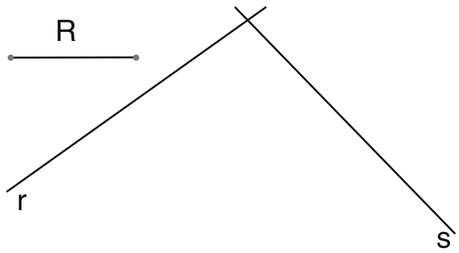


Figura 149

3. Concorde com as retas r e s um arco de circunferência considerando A o ponto de concordância em r, sem utilizar o ponto de encontro das retas.

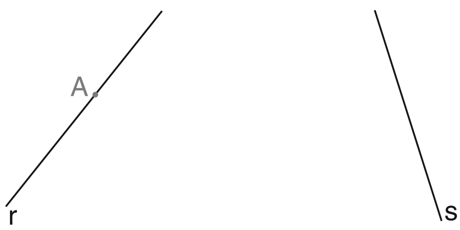


Figura 150

4. Concorde com as retas r e s um arco de circunferência que seja tangente à reta t.

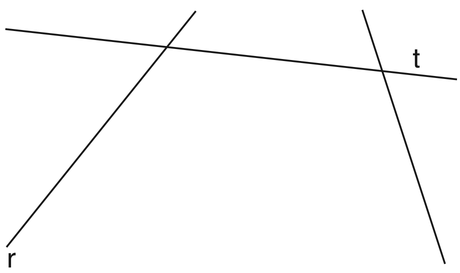


Figura 151

Concordância entre arcos.

Problema 5: Concordar um arco em uma de suas extremidades, com um outro arco que deve passar por um ponto A dado.

Neste problema, o centro do arco procurado, o ponto de concordância e o centro do arco dado devem ser colineares, pois os arcos devem ser tangentes. Isto justifica a seguinte construção.

5.1 Una os centro O do arco dado com o ponto B de concordância por uma reta r.

5.2 Trace a mediatriz dos pontos B e A.

5.3 A mediatriz e a reta r se interceptarão no ponto O' que é o centro do arco procurado.

5.4 Trace o arco de centro em O' que passe por B como origem do arco.

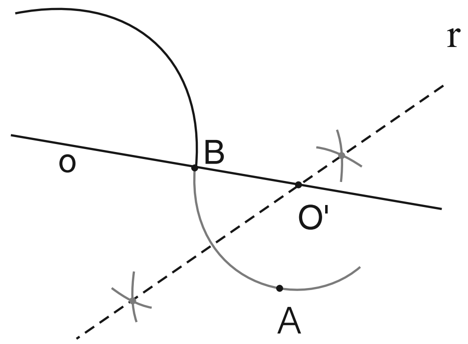


Figura 152

Problema 6: Concordar dois segmentos retilíneos paralelos de tamanhos diferentes, por intermédio de dois arcos de circunferência.

Sejam AB e CD os dois segmentos de reta. Construiremos a concordância nos pontos B e D.

Primeiro caso: Os segmentos possuem mesmo sentido. Indiquemos por d a distância entre os segmentos.

6.1 Trace pelos pontos B e D as retas perpendiculares aos respectivos segmentos.

6.2 Marque sobre estas retas, respectivamente, os pontos F e E, tais que $BF = DE < d$.

6.3 Trace a mediatriz do segmento FE que interceptará a perpendicular que passa por B no ponto O.

6.4 Trace a semi-reta que passa por O e E e construa o arco de centro em O com origem B até tocar nesta semi-reta no ponto G.

6.5 Construa o arco de centro em E que passa pelo ponto G até o ponto D.

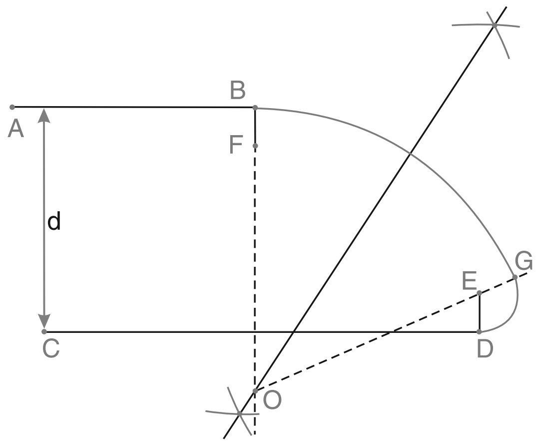


Figura 153

Como $OB = OG$ então $EG = FB = DE$ o que justifica a construção feita.

Segundo caso: Os segmentos possuem sentidos opostos.

6.1 Una o pontos B e D e tome um ponto $C' \in BD$ qualquer.

6.2 Trace pelos pontos B e D as retas perpendiculares aos respectivos segmentos.

6.3 Trace as mediatrizes dos segmentos BC' e $C'D$ interceptando as perpendiculares nos pontos O e O' respectivamente.

6.4 Construa o arco de centro em O do ponto B ao ponto C' e o arco de centro O' do ponto C' ao ponto D.

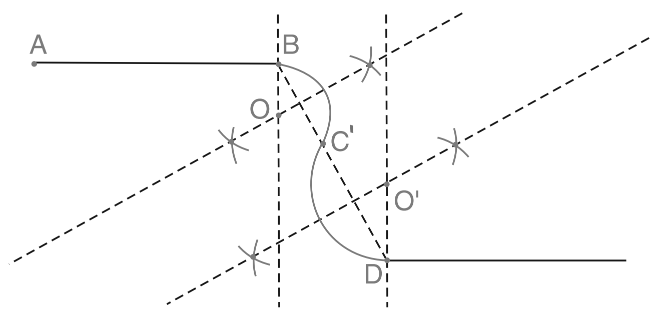


Figura 154

Problema 7: Concordar duas semi-retas não paralelas de origem em A e B, respectivamente, através de dois arcos de circunferência considerando como ponto de concordância as origens das semi-retas.

Resolução:

7.1 Trace as perpendiculares as semi-retas em suas origens.

7.2 Marque nestas perpendiculares os segmentos AC e BD de igual medida.

7.3 Una os pontos C e D e trace a mediatriz do segmento formado. Tal mediatriz deve interceptar uma das semi-retas. Consideremos neste problema que a semi-reta interceptará a semi-reta de origem em A.

7.4 A reta mediatriz neste caso, interceptará a perpendicular que passa por B em um ponto O.

7.5 Trace a reta r que passa pelos ponto O e C. Construa o arco de circunferência de centro em O com origem no ponto B até o ponto E sobre r.

7.6 Construa o arco de circunferência de centro em C do ponto E ao ponto A.

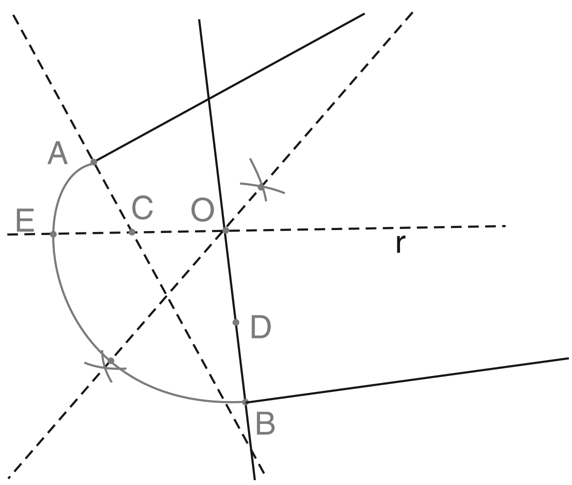


Figura 155

A justificativa é análoga a do Problema 6.

Exercício

5. Concordar uma reta r com um arco de circunferência dado de centro em O por meio de um arco de raio dado R.

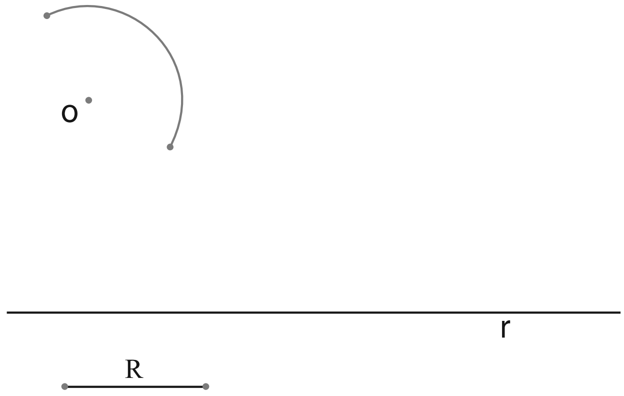


Figura 156

Sugestão para o <u>Exercício 5</u> O centro do raio procurado deve estar a uma distância R da reta r e do arco dado. Portanto é a interseção da reta paralela a uma distância R com a circunferência concêntrica ao arco cujo raio é a soma do raio do arco com R.

Problema 8: Concordar dois arcos de circunferência por meio de outro arco sendo em um deles fixo o ponto de concordância em A.

Devemos encontrar o centro do arco que fará a concordância. Para isto, lembremos que o mesmo deve ser eqüidistante das duas circunferências e deve ser colinear com o centro dos arcos e os pontos de concordância. Isto justifica a seguinte construção.

Resolução:

Seja O o centro do arco que contém o ponto A e O' o centro do outro arco dado.

8.1 Una os pontos O e A por uma reta r. O centro procurado deve pertencer à r.

8.2 Construa um segmento AB igual ao raio do outro arco sobre r com o mesmo sentido do segmento AO.

8.3 Trace a mediatriz dos pontos B e O'. Tal mediatriz deverá interceptar a reta r no ponto O" que é o centro procurado.

8.4 Una os pontos O" e O' interceptando o outro arco no ponto C que será o outro ponto de concordância.

8.5 Basta então construir o arco de centro O" do ponto A ao ponto C.

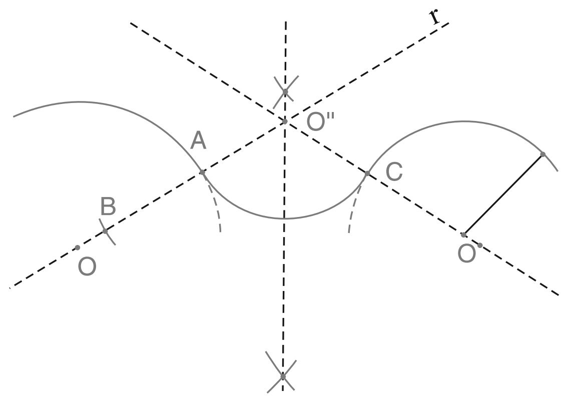


Figura 157

Exercício

6. Concordar dois arcos de circunferências dado de centros em O e O', respectivamente, por meio de um arco de raio dado R dado.

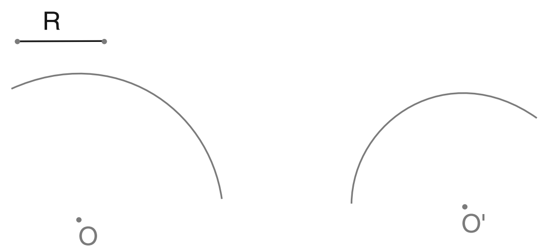


Figura 158

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- concordar retas com arcos.
- concordar duas retas via dois arcos.
- concordar dois arcos por um outro arco.

Aula 19 – Traçado de Ovais II

Objetivos

- Utilizar a concordância entre arcos de circunferências na construção de ovais regulares e irregulares.
- Construir a envolvente do círculo.

Definição: *Oval é uma curva fechada, constituída pela concordância de arcos de circunferência. Elas podem ser classificadas em regulares ou irregulares. As ovais regulares (ou falsa elipse) apresentam dois eixos de simetria e as ovais irregulares (ou oval propriamente dita) possuem um só eixo.*

Construção de Ovais Irregulares.

Definição: *As Ovais Irregulares são também chamados de* ***Óvulo****. Um óvulo é uma curva plana geométrica fechada, resultante da combinação de uma semicircunferência com uma semi-oval e que se aproxima o mais possível da forma de um ovo cortado ao meio e no sentido de seu comprimento. O óvulo é, pois, a combinação da oval com a circunferência, diferindo da oval regular por ser mais largo para um dos extremos do que para outro, semelhante ao que sucede com o ovo, de cuja forma deriva o seu nome.*

Problema 1: Construir um óvulo de quatro centros conhecendo-se o diâmetro CD da semicircunferência.

Resolução:

1.1 Construa uma circunferência considerando o diâmetro CD. A interseção da mediatriz do segmento CD com a circunferência são os pontos A e E. O primeiro centro do óvulo e o ponto médio O da circunferência, o segundo e o terceiro centros são os extremos C e D do diâmetro dado e o quarto centro é o ponto E.

1.2 A primeira parte que compõe o óvulo é a semicircunferência que contém o ponto A e determinada pelo diâmetro CD.

1.3 Prolongue a semi-reta de origem C passando por E e também a de origem em D passando por E.

1.4 O segundo arco que compõe o óvulo possui centro em C de raio CD traçado do ponto D até o ponto F no prolongamento da semi-reta de origem em C. O terceiro arco que compõe o óvulo possui centro em D de raio CD traçado do ponto C até o ponto G no prolongamento da semi-reta de origem em D.

1.5 O quarto e último arco que compõe o óvulo possui centro em E e une os ponto F e G.

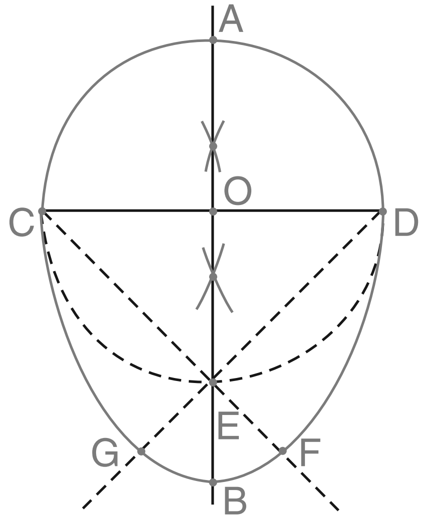


Figura 159

A interseção da mediatriz do diâmetro do óvulo com o quarto arco é o ponto B e o segmento AB é chamado **eixo do óvulo**. Note que o óvulo é simétrico em relação ao seu eixo.

Exercício

1. Traçar uma óvulo de quatro centros, dado o eixo AB.

Sugestão para o Exercício 1
Construa um óvulo auxiliar com um diâmetro $C'D'$ qualquer. Como os óvulos de quatro centros são figuras homotéticas basta encontrar o diâmetro CD por proporcionalidade.

Figura 160

Problema 2: Construir um óvulo de seis centros, dado o diâmetro CD do semicircunferência.

Resolução:

2.1 Trace a mediatriz de CD. Tal mediatriz interceptará a circunferência de diâmetro A e G

2.2 Tome $CE = DF = \frac{3}{4}CO$ sobre a reta suporte do diâmetro CD de tal forma que E e F sejam externos à circunferência. Tome $GJ = \frac{1}{2}CD$ na reta suporte do diâmetro AG de tal forma que J seja externo à circunferência.

2.3 Una G a E e F e obtenha H e I na circunferência que contém o ponto G, cujo diâmetro é CD.

2.4 O centro O da circunferência é o primeiro centro, com o qual trace a semicircunferência de C a D que contém o ponto A.

2.5 Prolongue a semi-reta de origem em E que passa por G e também a semi-reta de origem em F que passa por G.

2.6 O ponto E é o segundo centro, com o qual trace o arco de raio ED do ponto D ao ponto L na semi-reta de origem em E.

2.7 O ponto F é o terceito centro, com o qual trace o arco de raio FC do ponto C ao ponto K na semi-reta de origem em F.

2.8 Trace as semi-retas de origem H e I que passam por G.

2.9 O ponto H é o quarto centro, com o qual trace o arco de raio HL do ponto L ao ponto M na semi-reta de origem em H.

2.10 O ponto I é o quinto centro, com o qual trace o arco de raio IK do ponto K ao ponto N na semi-reta de origem em I.

2.11 O sexto e último centro e o ponto J, com o qual trace o arco entre os ponto M e N.

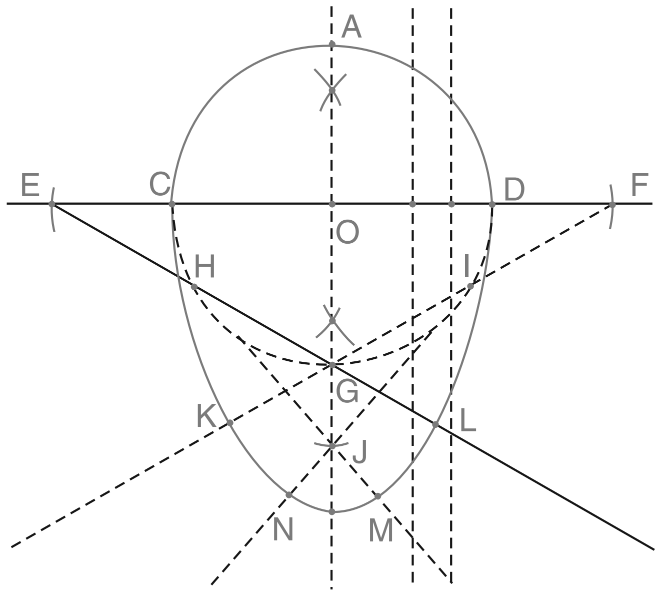


Figura 161

Observação: O traçado das tangentes e normais às ovais não oferece dificuldade, pois é feito como se fez para os arcos de circunferência.

Exercício

2. Traçar uma óvulo de seis centros, dados o segundo e terceiro centros E e F.

Figura 162

Construção de Ovais Regulares

Problema 3: Traçar uma oval regular dados os dois eixos.

Resolução:

3.1 Trace os AB e CD perpendiculares cujo ponto de interseção seja o ponto médio O.

3.2 Tome o ponto E sobre o segmento AB tal que $AE = OC$ e o ponto F sobre o segmento AE tal que $EF = \frac{1}{3}OE$.

3.3 Construa os triângulos equiláteros AMF e ANF.

3.4 Una M e N a F e obtenha O' e O” sobre o prolongamento do eixo CD.

3.5 Com centro em F e raio FM trace o arco do ponto M ao ponto N passando pelo ponto A.

3.6 Obtenha os pontos M', N' e F' simétricos dos pontos M, N e F, respectivamente em relação ao eixo CD.

3.7 Com centro em O' e raio $O'M$ trace o arco do ponto M ao ponto M' passando pelo ponto C.

3.8 Repita a construção dos arcos simétricos com centros em F' e O”.

Justificativa: Calcule $O'M$ e $O'C$ em função dos semi-eixos dados OC e AO. Note que o triângulo OFO' é retângulo e tem ângulos de 30^o e 60^o, daí ser a hipotenusa o dobro do cateto menor. Tem-se que:

$$O'C = OO' + OC = OF\sqrt{3} + OC = \frac{4}{3}AO\sqrt{3} - \frac{4}{3}OC\sqrt{3} + OC$$

$$O'M - O'C = \left(\frac{7-4\sqrt{3}}{3}\right)(OA - OC) \cong 0,024(AO - OC).$$

obtemos assim, este erro.

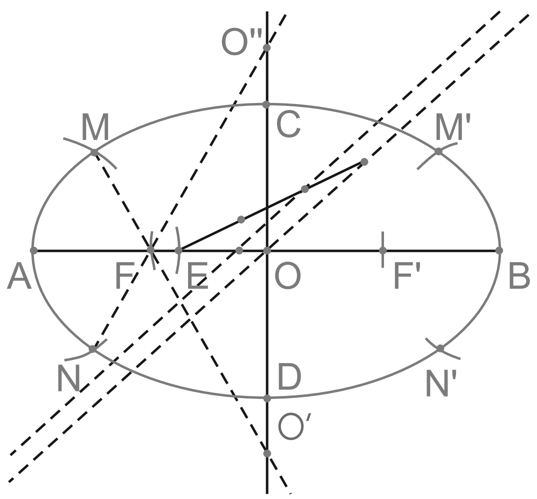


Figura 163

Problema 4: Traçar uma oval regular arredondada, dado o eixo menor.

Seja CD o eixo menor.

Resolução:

4.1 Trace a mediatriz de CD, e indique por O o ponto médio de CD.

4.2 Tome $OM = OM' = \frac{1}{2}OC$, sobre a mediatriz.

4.3 Una C e D aos pontos M e M'.

4.4 Com centro em C e raio CD, trace o arco compreendido entre as semi-retas de origem em C que passam pelos pontos M e M'. Indique os pontos de interseção deste arco por G e H.

4.5 Com centro em D, trace o arco simétrico ao obtido pelo item 4.4 em relação a mediatriz. Obtendo os pontos E e F.

4.6 Com centro em M, trace o arco do ponto E ao ponto G.

4.7 Com centro em M' , trace o arco do ponto F ao ponto H.

Sobre a mediatriz do segmento CD encontramos o segundo eixo AB da Oval.

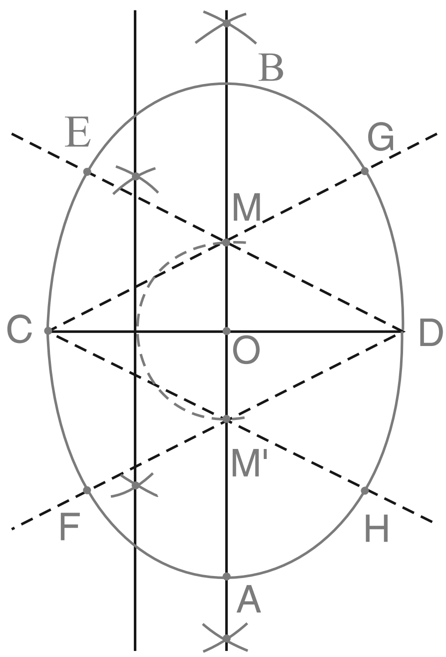


Figura 164

Exercício

3. Traçar uma oval regular arredondada, dado o seu eixo maior AB, através dos seguintes passos.

   (a) Divida o eixo maior dado em três partes iguais.

   (b) Trace os triângulos equiláteros EFM e EFN, onde E e F dividem o segmento AB em três partes iguais.

   (c) Com centro em E trace o arco do ponto A ao ponto G sobre a semi-reta de origem em M que passa por E.

   (d) Com centro em F trace o arco do ponto B ao ponto H sobre a semi-reta de origem em M que passa por F.

   (e) Trace o arco de centro M do ponto G ao ponto H.

   (f) Construa os arcos simétricos em relação ao eixo AB.

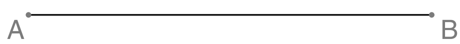


Figura 165

Problema 5: Traçar uma oval regular alongada , dado o eixo menor.

Seja CD o eixo menor.

Resolução:

5.1 Trace a mediatriz do segmento CD, obtendo o seu ponto médio O.

5.2 Marque sobre a mediatriz os pontos M e N tais que $OM = ON = OC$.

5.3 Trace as semi-retas que possuem origem nos pontos C e D que passam pelos pontos M e N.

5.4 Com centro em C trace o arco que passa pelo ponto D compreendido entre as semi-retas de origem em C. Obtendo os pontos E e F sobre as semi-retas que passam por M e N , respectivamente.

5.5 Trace a arco simétrico em relação à mediatriz com centro em D. Obtendo os ponto G e H, sobre as semi-retas de origem em D que passam pelos pontos M e N, respectivamente.

5.6 Trace o arco de centro em M do ponto G ao ponto E. Obtendo o ponto A sobre a mediatriz.

5.7 Trace o arco de centro em N do ponto H ao ponto F. Obtendo o ponto B sobre a mediatriz.

O segmento AB é o eixo maior da Oval.

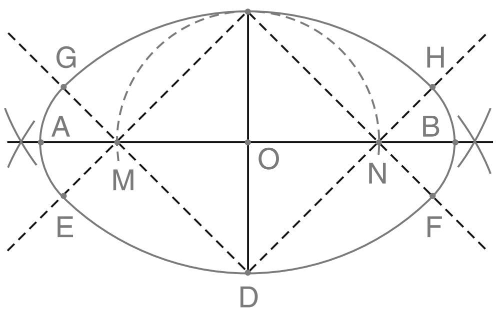


Figura 166

Exercício

4. Traçar uma oval regular alongada, dado o seu eixo maior AB, através dos seguintes passos.
   (a) Trace a mediatriz AB, obtendo no segmento o ponto médio O.
   (b) Trace os pontos médios, M e N, dos segmentos AO e OB, respectivamente.
   (c) Construa os triângulos eqüiláteros MNE e MNF simétricos em relação eixo maior.
   (d) Prolongue as semi-retas de origem em E que passam pelos pontos M e N.
   (e) Prolongue as semi-retas de origem em F que passam pelos pontos M e N.
   (f) Construa o arco de centro em M que passa por A compreendido entre as semi-retas que passam por M, indique o ponto de interseção nas semi-retas por G e H, considerando G sobre a semi-reta de origem no ponto F.
   (g) Construa o arco de centro em N que passa por B compreendido entre as semi-retas que passam por N, indique o ponto de interseção nas semi-retas por I e J, considerando I sobre a semi-reta de origem no ponto F.
   (h) Construa o arco de centro em F do ponto G ao ponto I. E construa o arco de centro em E do ponto H ao ponto J, interceptando a mediatriz do segmento AB nos pontos C e D, respectivamente.

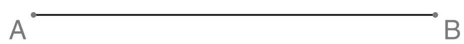


Figura 167

Evolvente do Círculo

A concordância entre arcos também é utilizada para construir uma curva chamada Evolvente do círculo.

Definição: *A Evolvente do círculo é uma curva descrita por um ponto A, fixo numa reta que rola sobre uma circunferência, mantendo-se sempre tangente a ela e sem escorregamento. Em outras palavras, fixo um ponto A sobre o círculo, tomando uma reta tangente em um ponto T, o ponto B que é extremidade do arco de T ao ponto A retificado sobre a tangente pertence à Evolvente do círculo.*

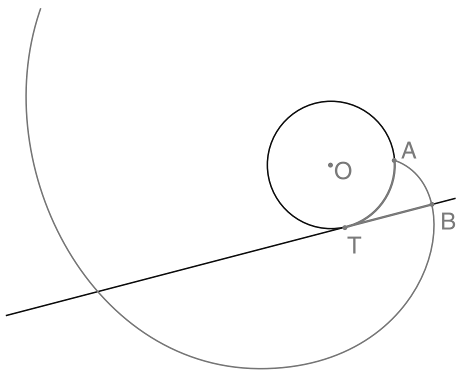


Figura 168

Problema 6: Traçar a evolvente de um círculo de raio dado.

Resolução:

6.1 Divida a circunferência em 12 ou um número maior de partes iguais. Considere os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L, os pontos de divisão em doze partes.

6.2 Trace as tangentes nos pontos de divisão.

6.3 Com centro em A e raio AL, trace o arco L1, onde 1 está sobre a tangente do ponto A.

6.4 Com centro em B e raio $B1$, trace o arco de 1 a 2 sobre a tangente que passa por B.

6.5 Com centro em C e raio $C2$, trace o arco de 2 a 3 sobre a tangente que passa por C.

6.6 Continue esse procedimento até esgotar todos os pontos de divisão.

Observação: A normal num ponto M qualquer será o próprio raio correspondente MI e a tangente será o perpendicular à MI, traçada de M.

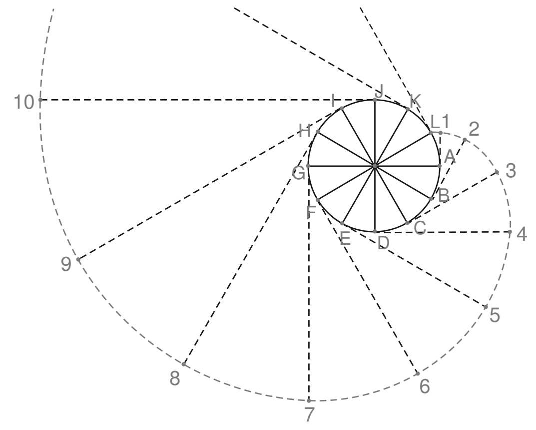


Figura 169

Exercicios

5. Construa a Evolvente do círculo de raio R dividindo-a em 16 partes iguais.

Figura 170

Resumo

Nesta aula, você aprendeu...

- A utilizar concordância de arcos na construção de Ovais irregulares e regulares.
- A construir a Evolvente do Círculo aproximadamente.

Aula 20 – Curvas Cíclicas

Objetivos

- Utilizar a concordância entre arcos de circunferências na construção de algumas das principais curvas cíclicas: Ciclóide, Epiciclóide e Hipociclóide.

Traçado de Ciclóide

Definição: *Ciclóide é curva gerada por um ponto fixo de um círculo que rola sem resvalar, sobre uma reta dada. O círculo é chamado de **círculo gerador** e a reta é chamada de **reta geratriz***

Foi Galileu quem primeiro teve a idéia desta curva.

Definimos por circunferência o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância fixa, chamada raio, de um ponto fixo, chamado centro. O círculo é conjunto formado por todos os pontos do interior da circunferência unidos com a circunferência, isto é, a circunferência é a fronteira do círculo.

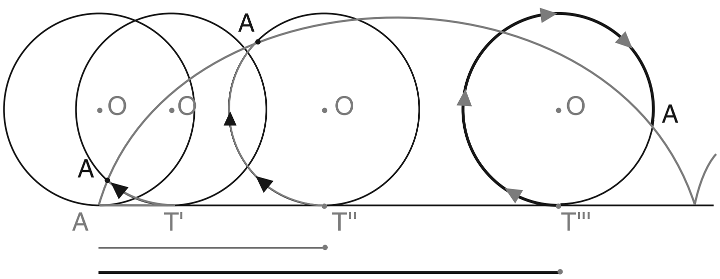


Figura 171

A figura anteriormente construída é denominada ciclóide simples. Neste caso, o ponto A que define a curva pertence a circunferência. Se o ponto A pertence ao interior do círculo chamamos a curva de ciclóide encurtada. e se o ponto A pertence ao exterior do círculo chamamos a curva de ciclóide alongada.

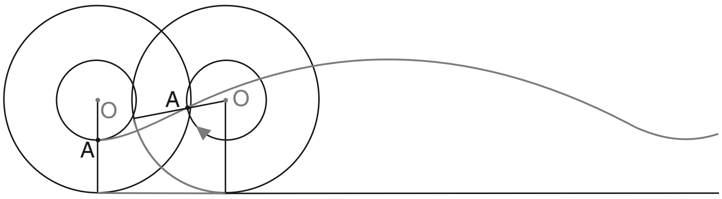


Figura 172 : Ciclóide Encurtada.

Se o ponto A pertence ao exterior do círculo chamamos a curva de ciclóide alongada.

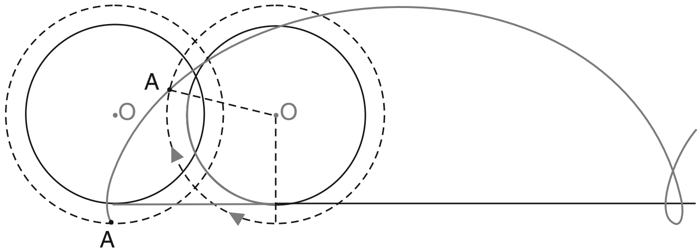


Figura 173 : Ciclóide Alongada.

As construções destas curvas é feita por métodos que aproximam a solução. Nesta aula, apresentaremos a construção da ciclóide simples.

Problema 1: Traçar a ciclóide simples conhecendo o raio do círculo gerador.

Resolução:

Seja r a reta pela qual rolará o círculo. Seja A o ponto sobre r início da ciclóide.

1.1 Trace a circunferência tangente no ponto A, que vai descrever a ciclóide.

1.2 Divida a circunferência em n partes iguais (12 no nosso exemplo) e trace paralelas a r pelos pontos de divisão da circunferência. No caso de divisão em partes iguais, considerando o 12º de divisão em A, os pares de pontos B e L(1º e 11º); C e K(2º e 10º); D e J(3º e 9º); E e I(4º e 8º); e F e H(5º e 7º) estão sobre a mesma reta paralela.

1.3 Retifique o arco AB e o marque 12 vezes em r a partir do ponto A, obtendo os pontos B', C', D', E', F', G', H', I', J', L' e A'.

1.4 Ao rolar a circunferência fazendo coincidir o ponto B com o ponto B' o ponto A se desloca a uma altura correspondente a reta paralela que passa por B. O mesmo acontece com todos os outros pontos de divisão. Dessa forma, para obtermos a posição do ponto A no momento B' tome o raio de medida AB e construa um arco de centro em B' interceptando a paralela que passa por B no ponto 1 mais próximo de A. Efetue este processo para todos os pontos de B ao sexto ponto G que deverá está numa perpendicular à r por G'. A partir do ponto G, tome o ponto de interseção com a paralela que esteja mais distante do ponto A.

1.5 Para se obter a construção aproximada da ciclóide a cada três pontos encontre o centro da circunferência que passa por eles e construa o pelos pontos. Comece pelos pontos A, 1 e 2; depois 2, 3 e 4; depois 4, 5 e 6; e assim por diante até o 12º que coincidirá com A'.

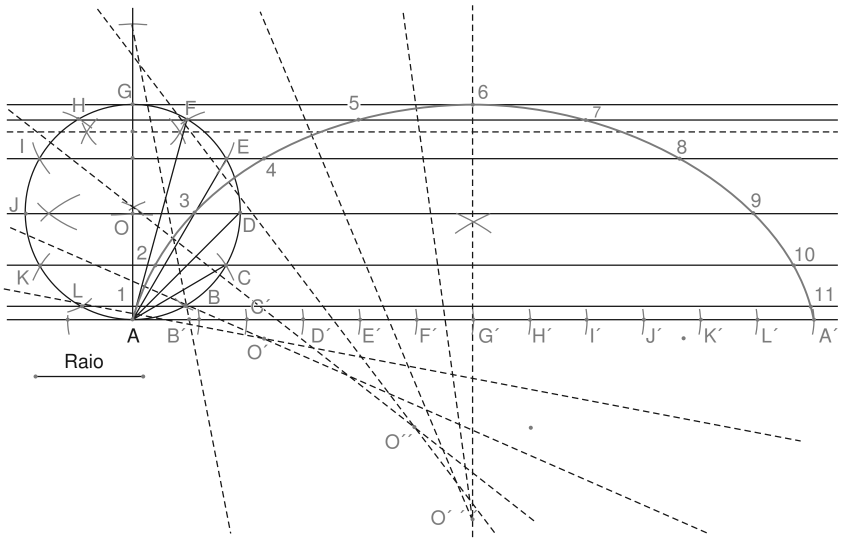


Figura 174

Problema 2: Traçar a ciclóide encurtada conhecendo o raio do círculo gerador.

Resolução:

Seja r a reta pela qual rolará o círculo. Seja A o ponto de tangência.

2.1 Trace a circunferência tangente no ponto A, que vai descrever a ciclóide.

2.2 Trace a circunferência concênctrica à anterior passando pelo ponto P, que nesta construção está sobre a perpendicular a reta r que passa por A.

2.3 Divida a circunferência maiore em 12 partes iguais, unindo os pontos de divisão da circunferência maior com o centro obtemos os 12 pontos de divisão da circunferência menor. Trace as paralelas à r pelos pontos de divisão da circunferência menor, da mesma forma que foi traçada as paralelas no Problema 1..

2.4 Retifique o arco AB e o marque 12 vezes em r a partir do ponto A, obtendo os pontos B', C', D', E', F', G', H', I', J', L' e A'.

2.5 Ao rolar a circunferência fazendo coincidir o ponto B com o ponto B' o ponto P se desloca a uma altura correspondente a segunda reta paralela. Ao rolar a circunferência fazendo coincidir o C com C' o ponto P se desloca a uma altura correspondente a terceira paralela, e assim por diante. Dessa forma, para obtermos a posição do ponto P no momento B' tome o raio de medida igual ao segmento de P ao primeiro ponto de divisão após P e construa um arco de centro em B' interceptando a segunda paralela mais próximo de P. Efetue este processo para todos os pontos de B ao sexto ponto G que deverá está numa perpendicular à r por G'. A partir do ponto G, tome o ponto de interseção com a paralela que esteja mais distante do ponto P.

2.6 Para se obter a construção aproximada da ciclóide efetue o processo feito no Problema 1.

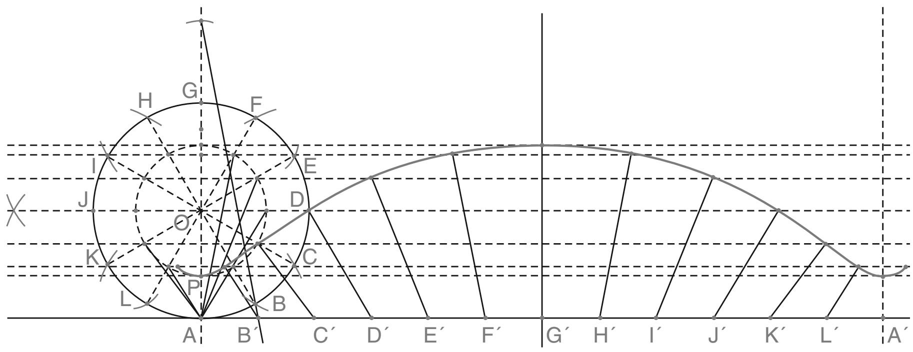


Figura 175

Exercícios

1. Trace uma ciclóide simples conhecendo o raio do círculo gerador que rola sobre a reta r utilizando a divisão da circunferência em oito partes.

Figura 176

2. Siga os passos do Problema 2 e construa a ciclóide alongada gerada pelo círculo de raio R e por um ponto externo ao círculo que esteja a uma distância R' do centro do círculo.

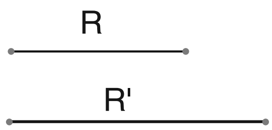


Figura 177

A cada ponto da ciclóide associamos a um ponto do círculo gerador. Este ponto da ciclóide pertence a uma circunferência resultante do rolamento da circunferência geradora da curva sobre a reta geratriz. A reta determinada pelo ponto de tangente desta circunferência com a reta e o ponto da curva determina a direção normal da curva no ponto da ciclóide. Como a reta tangente neste ponto é a reta perpendicular a normal, basta então traçar a perpendicular à normal neste ponto.

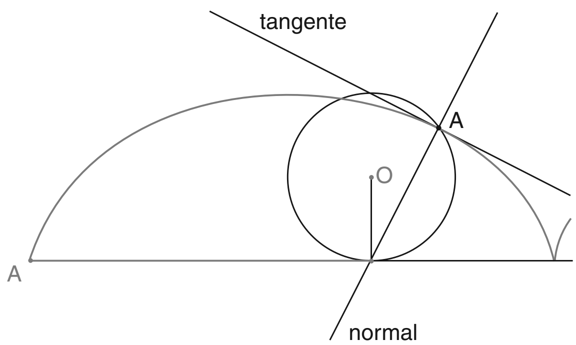


Figura 178

Exercício

3. Sabendo que o ponto A pertence a ciclóide simples gerada pelo círculo de raio R que rola sobre a reta r, encontre as retas normal e tangente no ponto A.

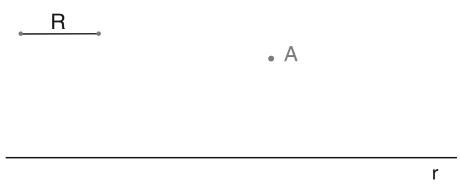


Figura 179 : Ciclóide Encurtada.

4. Encontre o ponto da ciclóide simples gerada por um círculo de raio R que rola sobre r, tal que a reta n é normal nesse ponto.

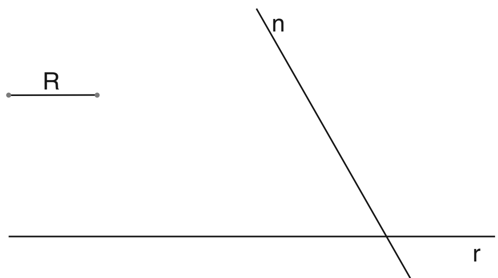


Figura 180

Traçado da Epiciclóide

Definição: *Epiciclóide é a curva descrita por um ponto de um círculo sobre uma circunferência exteriormente, sem escorregamento. O círculo é chamado de* **círculo gerador** *e a circunferência é chamada de* **circunferência geratriz**.

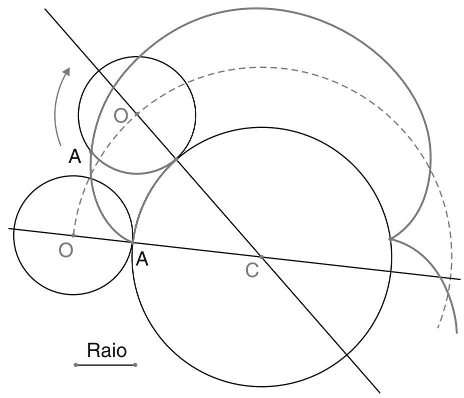


Figura 181

Note que a tanto a ciclóide e a epiciclóide pode ser descrita por um círculo que rola por um caminho determinado. Neste caso, as construções são análogas.

Problema 3: Traçar a epiciclóide conhecendo o raio do círculo gerador e o raio da circunferência geratriz.

Resolução:

3.1 Trace as duas circunferências tangentes em A, externamente, e divida círculo gerador em doze partes iguais.

3.2 Com centro em O'(centro da geratriz) e raios que vão de O' até os pontos de divisão da circunferência geradora, trace circunferências.

3.3 Retifique o arco $A1$ sobre a circunferência de centro O', de forma análoga a feita para o ciclóide, obtendo assim um ponto $1'$, em seguida marque sobre esta circunferência os arcos: $arcoA1' = arco1'2' = arco2'3' = arco3'4' = ... = arco11'A'$.

3.4 Para se determinar um ponto qualquer M da curva, faça centro em qualquer um dos pontos marcados na circunferência geratriz, por exemplo, em $3'$com raio $A3$ e corte o arco de centro O' que passa pela divisão 3 da circunferência.

3.5 Repita essa construção para todos os pontos construídos sobre a circunferência de centro O'.

De forma análoga a ciclóide, para se obter a tangente e a normal num ponto N, una o ponto N ao ponto de contato correspondente $4'$. A perpendicular a $N4'$ por N será a tangente. A normal será $N4'$.

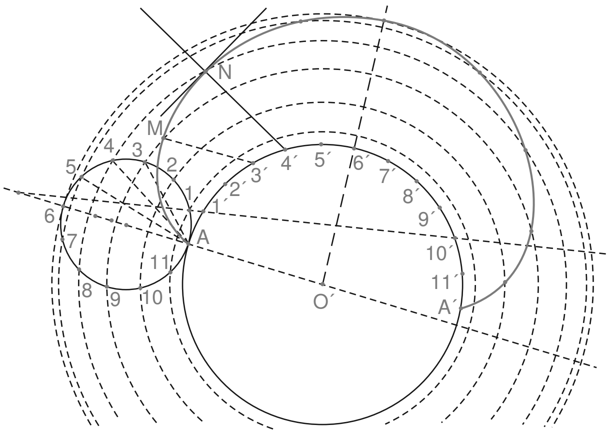


Figura 182

Da mesmo forma que acontece na ciclóide, dependendo da região em que tomamos o ponto que gera a epiciclóide (interno ou externo), a curva descrita recebe o nome de epiciclóide encurtada(ponto interno) ou epiciclóide alongada(ponto externo).

Veja a seguir as figuras que representam a epiciclóide encurtada e epiciclóide alongada.

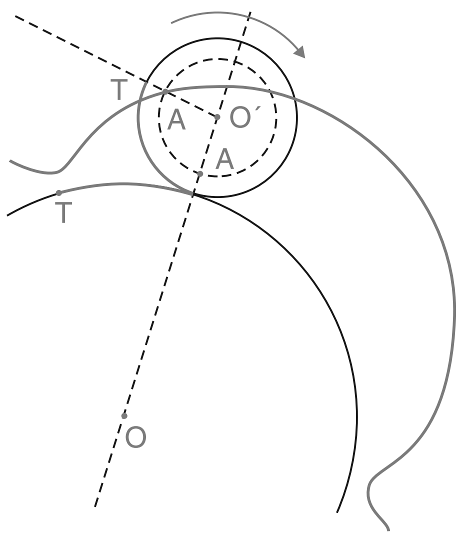


Figura 183 : Epiclóide Encurtada.

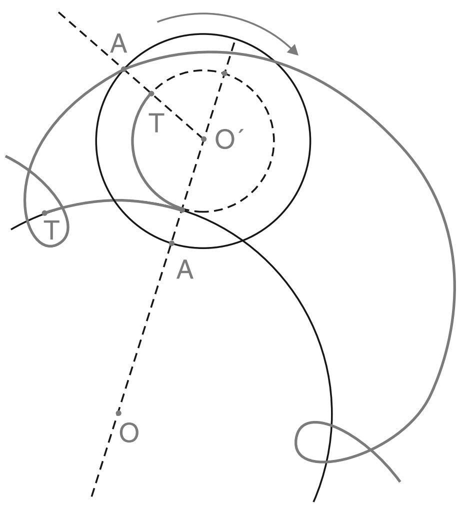


Figura 184 : Epiclóide alongada.

Traçado da Hipociclóide

Definição *Hipociclóide é a curva descrita por um ponto de um círculo que rola sobre uma circunferência, interiormente, sem escorregamento. O círculo é chamado de* **círculo gerador** *e a circunferência é chamada de* **circunferência geratriz**.

A construção da curva e o traçado da tangente e normal são perfeitamente análogos ao da ciclóide e da epiciclóide.

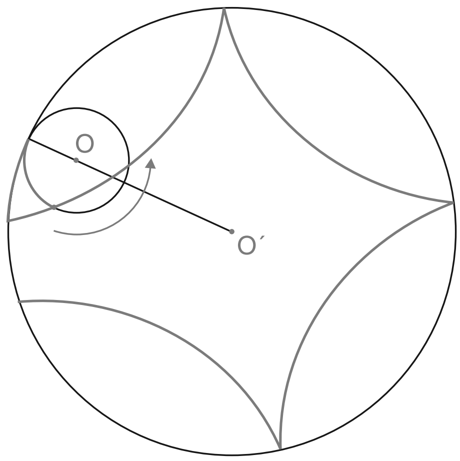


Figura 185

Problema 4: Traçar a hipociclóide conhecendo o raio do círculo gerador e o raio da circunferência geratriz.

Resolução:

4.1 Trace as duas circunferências tangentes em A, internamente, e divida círculo gerador em doze partes iguais.

4.2 Com centro em O'(centro da geratriz) e raios que vão de O' até os pontos de divisão da circunferência geradora, trace circunferências.

4.3 Retifique o arco $A1$ sobre a circunferência de centro O', de forma análoga a feita para o epiciclóide, obtendo assim um ponto $1'$, em seguida marque sobre esta circunferência os arcos: $arcoA1' = arco1'2' = arco2'3' = arco3'4' = ... = arco11'A'$.

4.4 Para se determinar um ponto qualquer M da curva, faça centro em qualquer um dos pontos marcados na circunferência geratriz, por exemplo, em $3'$com raio $A3$ e corte o arco de centro O' que passa pela divisão 3 da circunferência.

4.5 Repita essa construção para todos os pontos construídos sobre a circunferência de centro O'.

De forma análoga a ciclóide, para se obter a tangente e a normal num ponto N, una o ponto N ao ponto de contato correspondente $4'$. A perpendicular a $N4'$ por N será a tangente. A normal será $N4'$.

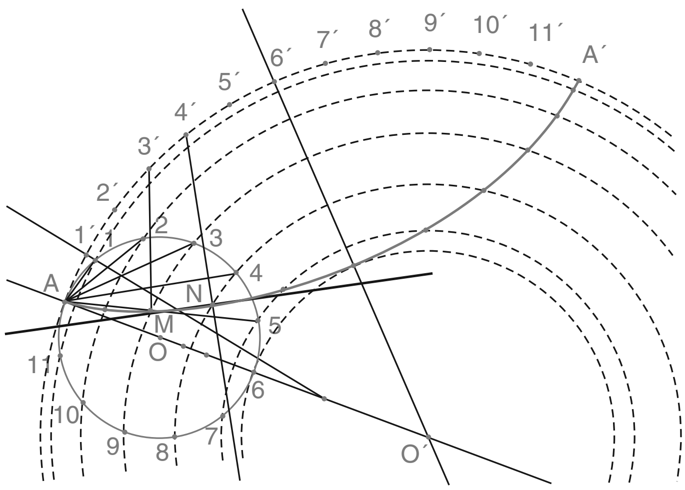


Figura 186

Da mesma forma que acontece na epiciclóide, dependendo da região em que tomamos o ponto que gera a hipociclóide (interno ou externo), a curva descrita recebe o nome de hipociclóide encurtada(ponto interno) ou hipociclóide alongada(ponto externo).

Veja a seguir as figuras que representam a hipociclóide encurtada e hipociclóide alongada.

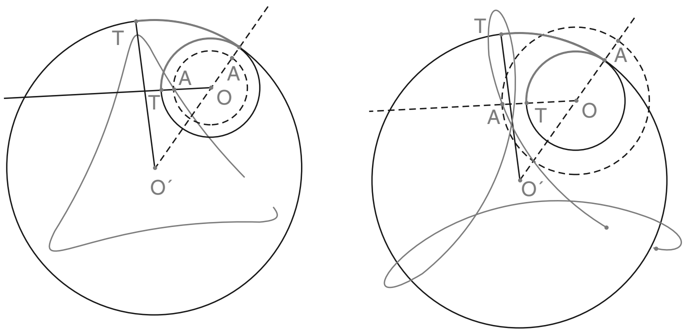


Figura 187 : Hipociclóide encurtada à esquerda e alongada à direita.

Exercícios

5. Trace uma epiciclóide simples conhecendo o raio R do círculo gerador que rola sobre a circunferência de centro O' utilizando a divisão da círculo em oito partes.

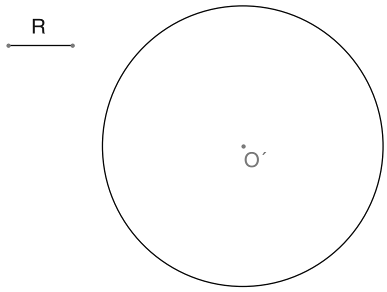


Figura 188

6. Siga os passos do Problema 2 e construa a epiciclóide encurtada gerada pelo círculo de raio R e por um ponto interno ao círculo que esteja a uma distância d do centro do círculo, considerando como geratriz a circunferência de centro em O'.

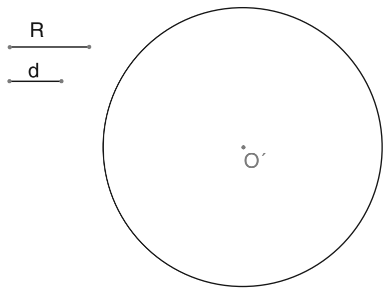


Figura 189

7. Sabendo que o ponto A pertence a hipociclóide simples gerada pelo círculo de raio R que rola sobre a circunferência de centro em O', encontre as retas normal e tangente no ponto A.

Construa uma circunferência de raio R tangente internamente a circunferência que passe por A. O ponto de tangência unido com o ponto A forma a normal e a perpendicular à normal no ponto A é a tangente. Lembre que os centros das circunferências que são tangentes a uma outra circunferência forma uma circunferência concêntrica a esta.

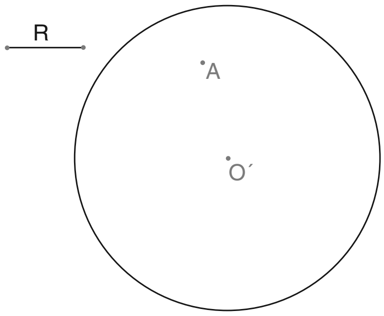


Figura 190

8. Encontre o ponto da hipociclóide simples gerada por um círculo de raio R que rola sobre circunferência de centro O', tal que a reta n é normal nesse ponto.

Um dos pontos de interseção entre a reta n e a circunferência é o ponto de tangência da circunferência que determinará o ponto da hipociclóide. Basta então,construir a circunferência de raio dado tangente internamente no ponto de interseção.

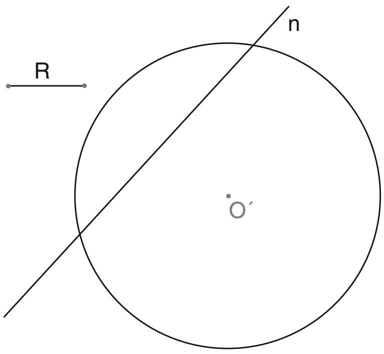


Figura 191

Na próxima aula, você construirá uma curva chamada cissóide, que também é considerada uma curva cíclica pois é obtida também por pontos que caminham sobre uma circunferência.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu

- A construir diversas curvas que são obtidas por rotação de um círculo sobre uma reta ou uma circunferência.

Aula 21 – Traçado da Cissóide e da Elipse

Objetivos

- Construir a cissóide de forma aproximada.
- Construir a elipse de forma aproximada e discutir problemas de tangência a uma elipse.

Traçado da Cissóide

Definição *Chama-se cissóide, a uma curva que se deriva do círculo, tirando de um ponto fixo da circunferência, uma semi-reta qualquer até encontrar a tangente tirada pelo extremo do diâmetro que passa pelo primeiro e marcando nesta semi-reta, a partir do ponto fixo, uma distância igual a sua parte externa compreendida entre a tangente e o círculo. O ponto fixo da circunferência é chamado de* **vértice** *da cissóide. A circunferência é chamada de* **circunferência geratriz**.

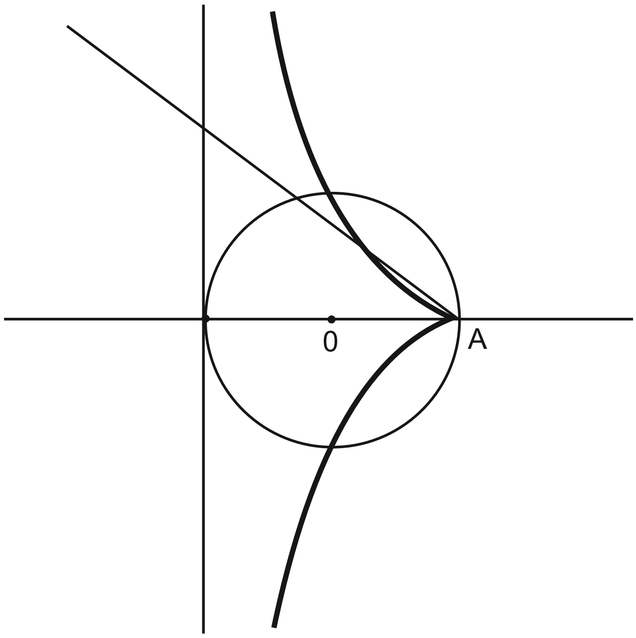


Figura 192

Cissóide é uma curva do segundo grau, inventada por Diocles, que procurava resolver o problema da duplicação do cubo, que mais tarde foi provada a sua impossibilidade. Seu nome vem de uma palavra grega que significa hera, porque esta curva sobe ao longo da sua assíntota como a hera sobe um tronco de árvore.

Problema 1: Traçar a cissóide reta, conhecendo-se a circunferência geratriz.

Resolução:

1.1 Trace um diâmetro e uma reta tangente em uma das extremidades do diâmetro.

1.2 Marque n - pontos distintos sobre a semicircunferências determinada pelo diâmetro . Neste problema marcamos quatro pontos, P_1, P_2, P_3 P_4.

1.3 Pelo P extremo do diâmetro, que não pertence à tangente, trace as semi-retas que passam pelos pontos de divisão da semicircunferência. Tais semi-retas interceptarão a tangente nos pontos 1, 2, 3 e 4.

1.4 O primeiro ponto da curva será o ponto A_1 entre P e 1 tal que $1A_1 = PP_1$. Assim, basta transferir o segmento PP_1 para o ponto 1 sobre a semi-reta que passa por P_1.

1.5 Efetuando o mesmo processo para os pontos P_2, P_3 e P_4 obtemos os pontos A_2, A_3 e A_4.

1.6 Como a curva é simétrica em relação ao diâmetro basta encontrar os simétricos dos pontos da obtidos em relação ao diâmetro.

1.7 Para se construir a curva aproximadamente construa os arcos de circunferências $A_1A_2A_3$ e A_3A_4P.

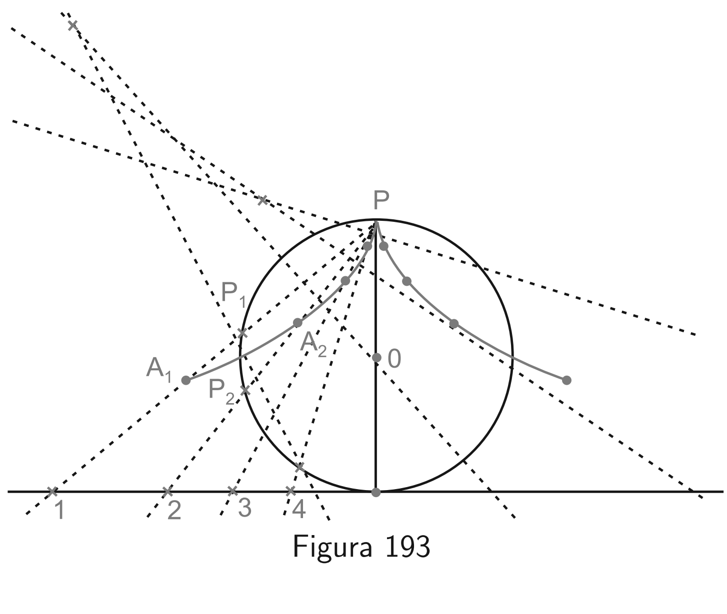


Figura 193

Definição: *Sejam dadas uma circunferência, um ponto fixo A pertencente à circunferência e uma reta r tangente no ponto extremo do diâmetro que passa por A. Chama-se* ***cissóide conjugada*** *à cissóide determinada pela circunferência e pelo ponto A relativa à reta r, o lugar geométrico dos pontos que são simétricos dos pontos de interseção das semi-retas de origem em A com a circunferência, em relação aos pontos de interseção da mesmas semi-retas com a tangente r.*

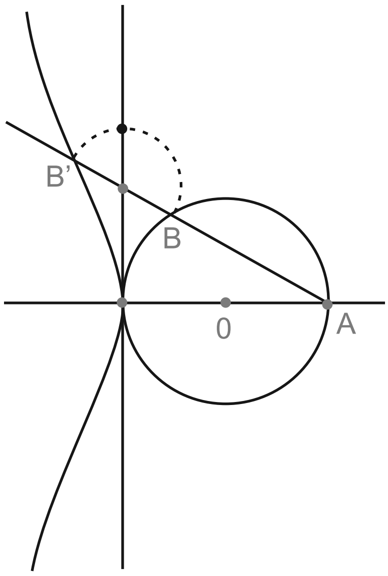


Figura 194

Exercício

1. Obtenha quatro pontos da cissóide conjugada e seus simétricos relativos ao diâmetro principal, sendo dados a circunferência, o ponto fixo A e a reta tangente. E desenhe-a à mão livre.

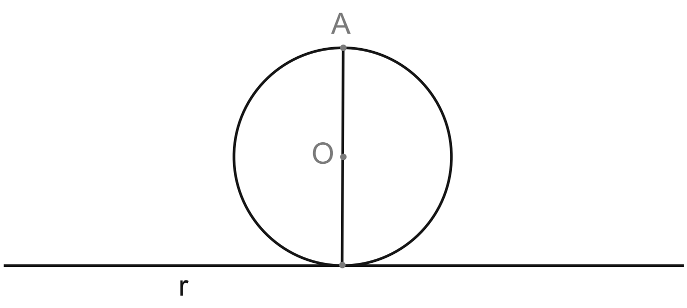


Figura 195

Elipse

Definição: *A elipse é uma curva plana fechada e simétrica, na qual é constante a soma das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos situados no interior do plano por ela limitado. Focos são , por definição, os dois pontos fixos referidos, e estão representados pelas letras F e F'.*

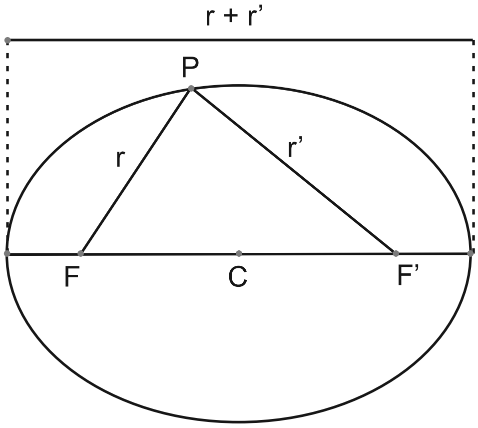


Figura 196

A elipse apresenta dois eixos de simetria ortogonais, um que passa pelos focos chamado eixo maior, que mede $2a$ e outro que passa perpendicular pelo centro daquele e que denomina eixo menor, que mede $2b$. Semi-eixo é a metade de um dos eixos. Existem, pois, dois semi-eixos: o semi-eixo maior e o semi-eixo menor. Chamam-se vértices da elipse aos pontos extremos dos seus dois eixos ortogonais. Daí, conclui-se que a elipse possui exatamente quatro vértices. Além da simetria em relação aos eixos, a elipse é uma curva simétrica em relação ao ponto C de encontro dos seus eixos, o que o caracteriza como centro da curva.

A distância focal é a distância entre os focos, ou seja, é a medida do segmento FF', e que mede $2c$.

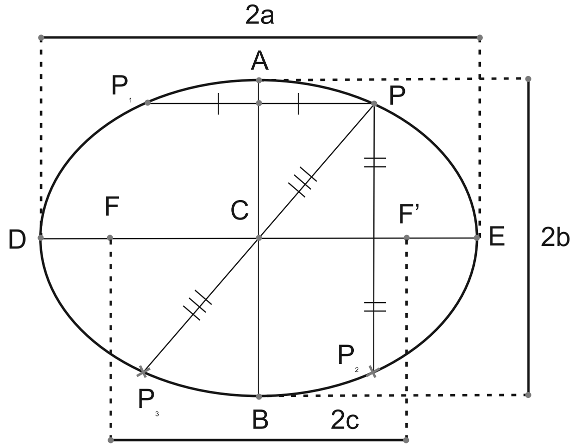


Figura 197

Chamam-se cordas de uma elipse quaisquer segmentos que unem dois pontos da curva. Em qualquer elipse os pontos médios das cordas paralelas estão alinhados, formando um segmento que contém o centro da elipse. As cordas que passam pelo centro da elipse são chamadas de diâmetros. Dois diâmetros são ditos conjugados quando um deles divide ao meio as cordas paralelas ao outro. Convém observar que em qualquer elipse a cada diâmetro podemos associar um diâmetro conjugado.

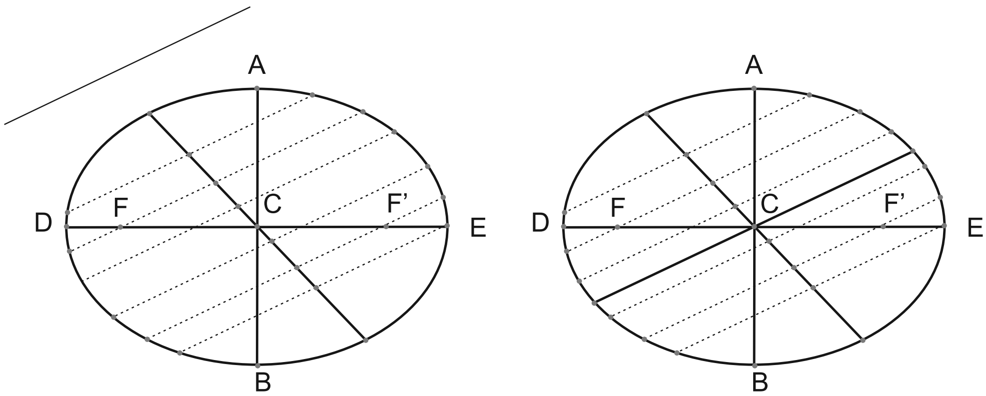


Figura 198

Denomina-se excentricidade da elipse, a razão existente entre a distância focal e o eixo maior da curva e representa-se por ε.

Secante a uma elipse é uma reta que a corta em dois pontos e tangente é a reta que toca a curva em somente um de seus pontos. Normal é a perpendicular à tangente no seu ponto de contato.

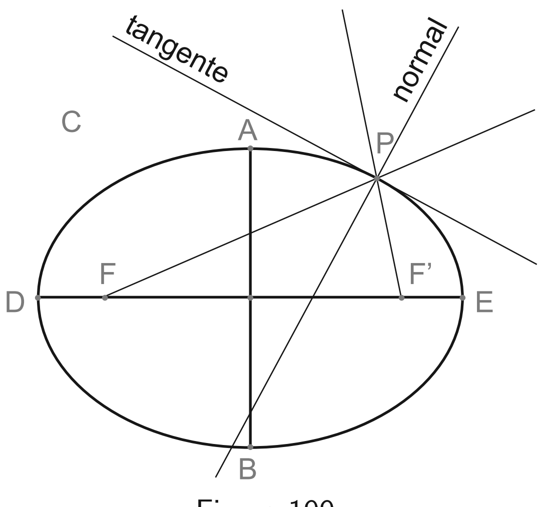


Figura 199

Chamamos de raios focais de um ponto da elipse as retas determinadas pelo ponto e pelos focos da elipse. A tangente e a normal a um elipse, num ponto dado sobre a mesma, coincidem com as bissetrizes dos raios focais.

A construção de uma elipse não é possível utilizando régua e compasso. Neste caso, devemos construí-la de forma aproximada através de concordância de arcos ou obtendo o maior número possível de seus pontos, encontrando sempre os seus vértices, para que a construção a "mão livre" seja mais precisa.

Problema 1: Traçar uma elipse conhecendo-se o eixo maior e a distância focal.

Para se construir uma elipse é necessário que determinemos seus focos. Neste caso, é válido lembrar as seguintes propriedades:

- Os focos além de pertencerem ao eixo maior são eqüidistantes do centro da elipse, que coincide com o ponto médio deste eixo.
- Os eixos da elipse são perpendicular e se encontram no ponto médio, e assim um eixo está contido sobre a mediatriz do outro eixo.
- Pela definição de elipse os vértices do eixo menor estão a uma distância do foco que corresponde à metade do eixo maior.

Resolução:

1.1 Tome AB igual ao eixo maior.

1.2 Trace a mediatriz de AB, identifique o ponto médio com O.

1.3 Marque $OF = OF'$ e que sejam iguais a metade da distância focal dada.

1.4 Com centro em F e F' e raio igual a AO obtem-se C e D na mediatriz da AB. O segmento CD é o eixo menor da elipse.

1.5 Tome um ponto qualquer E em OF e com centro em F e raio AE trace um arco.

1.6 Com centro em F' e raio BE trace outro arco que corta o anterior nos pontos M e M', que são dois pontos da elipse.

1.7 Com centro F' e raio AE trace um arco.

1.8 Com centro F e raio BE trace outro arco que corta o anterior nos pontos N e N', que são dois pontos da elipse.

Para um ponto marcado sobre o segmento OF, como o ponto E, obtemos quatro pontos que pertencem à elipse. Marque quantos pontos ache necessário para construção aproximada.

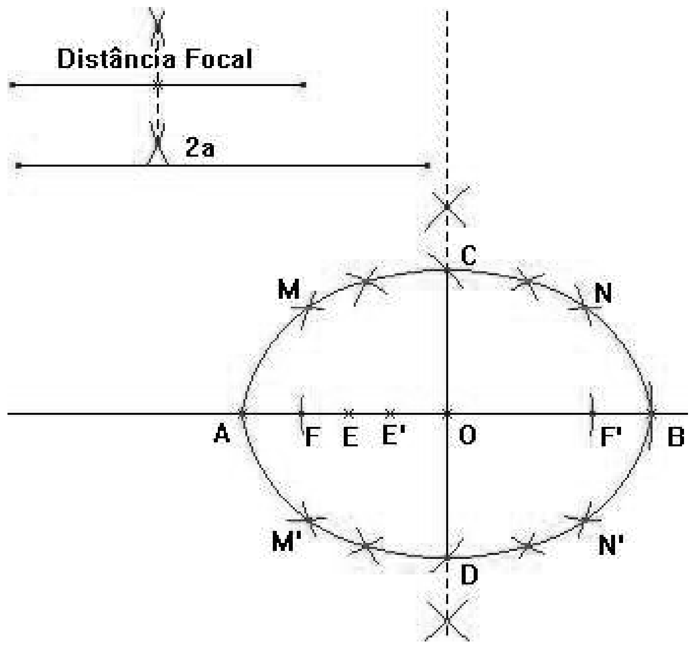


Figura 200

Problema 2: Dada uma elipse, determinar o centro.

Sabemos que os pontos médios das cordas paralelas a uma direção dada formam um diâmetro, e que o ponto médio de cada diâmetro de elipse coincide com seu centro. Assim, para encontrarmos o centro de uma elipse dada basta efetuarmos as seguintes construções;

2.1 Trace uma reta secante à elipse e trace uma outra reta paralela a esta que também seja secante à elipse.

2.2 Ache os pontos médios das cordas obtidas pelas retas secantes. Trace a reta determinada pelos pontos médios.

2.3 Ache o ponto médio C da corda obtida pela reta determinada pelos pontos médios das cordas paralelas.

O ponto C é o centro da elipse.

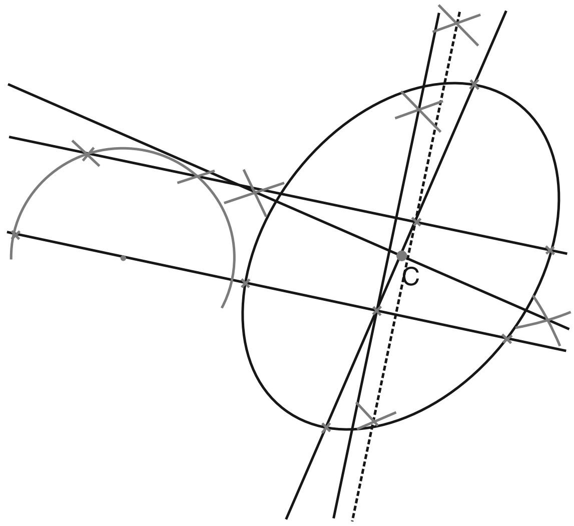


Figura 201

Problema 3: Dada uma elipse, determinar os focos e os dois eixos.

Um retângulo é inscritível em uma elipse se seus lados são paralelos aos eixos da mesma e seu centro coincide com o centro da elipse. Assim, os vértices do retângulo são eqüidistantes do centro da elipse. Então, para resolvermos o Problema 3 basta efetuarmos as seguintes construções:

3.1 Determine o centro O da elipse, utilizando o problema 2.

3.2 Com centro em C e raio qualquer trace uma circunferência que corte a elipse nos ponta E, G, H e I.

3.3 Trace o retângulo $EGHI$ e por O trace as perpendiculares a EG e GH. Formando os diâmetros AB e CD que serão os eixos. Considere AB o eixo maior.

3.4 Com centro em C e raio OA obtêm-se os focos F e F' sobre o eixo AB, que são os focos da elipse.

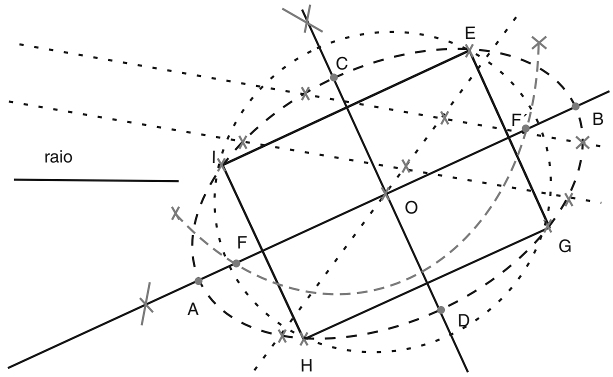


Figura 202

Exercícios

1. Construa uma elipse conhecendo seus focos, F e F', e um de seus pontos A.

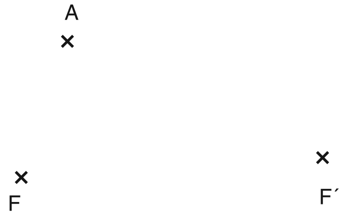


Figura 203

2. Construa uma elipse conhecendo o eixo menor CD e sabendo que um de seus focos pertence à reta r.

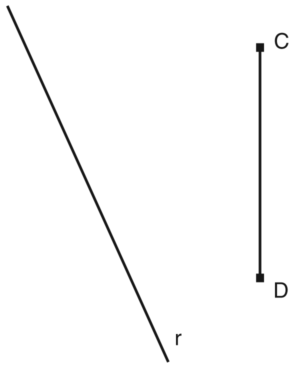


Figura 204

Problema 4: Traçar uma tangente e uma normal a elipse de um ponto M tomado na curva.

Resolução:

4.1 Encontre os focos, F e F' da elipse utilizando o processo do problema 3.

4.2 Una M a F e F' e trace as bissetrizes do ângulo pelos raios focais.

A bissetriz interna do triângulo FMF' será a normal e a bissetriz externa será a tangente.

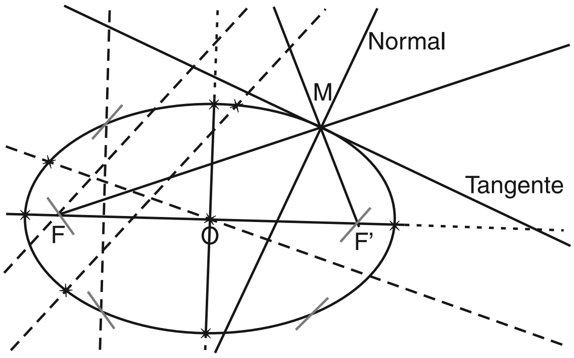


Figura 205

Exercícios

3. Traçar a tangente da elipse em M que está a uma distância d do foco F, conhecendo-se os dois focos e a medida do eixo menor.

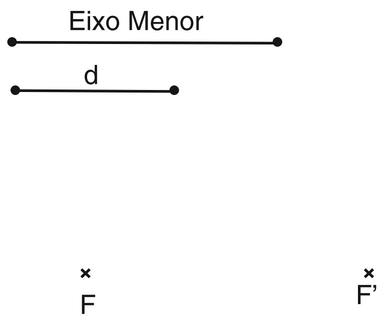


Figura 206

4. Obtenha o ponto de tangência da elipse se r é a reta tangente, F e F' são os focos.

Sugestão para o **Exercício 4**
O ponto de tangência é M sobre r tal que FM e $F'M$ formam ângulos iguais com r. Relembre a aula de simetria.

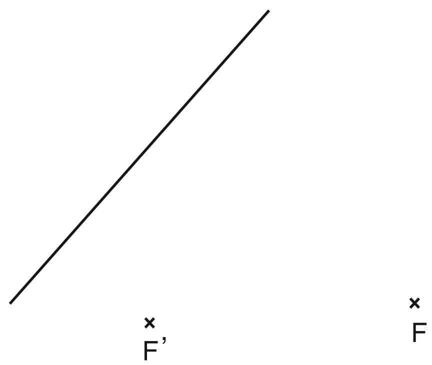


Figura 207

5. Construa o eixo menor da elipse conhecendo a excentricidade $\varepsilon = \frac{2}{3}$ e o eixo maior $2a$.

Sugestão para o **Exercício 5**
Lembre que o semi-eixo menor, a metade da distância focal e o semi-eixo maior forma um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao semi-eixo maior. Além disso, lembre que $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

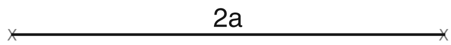


Figura 208

6. Construa o eixo menor e os focos da elipse conhecendo o eixo maior e sabendo que o eixo menor é igual a distância focal.

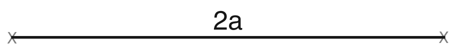


Figura 209

Resumo

Nesta aula, você aprendeu a...

- Construir a cissóide de forma aproximada.
- Construir a elipse.
- Encontrar os eixos e os focos da elipse.
- Traçar a tangente à elipse em um de seus pontos.
- Encontrar o ponto de tangência a partir da reta tangente.

Aula 22 – Traçados da Hipérbole e da Parábola

Objetivos

- Construir a Hipérbole de forma aproximada.
- Construir a Parábola de forma aproximada.
- Discutir problemas de tangência a uma Hipérbole e a uma Parábola.

Hipérbole

Definição: *Hipérbole é uma curva plana aberta de ramos infinitos, na qual é igual a uma constante* $2a$ *o valor absoluto da diferença entre as distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos* F *e* F'*, denominados focos, situados em seu plano. Assim, como os pontos* F *e* F' *são os focos da hipérbole, a distância entre eles é a distância focal e que mede* $2c$*.*

A hipérbole possui dois eixos. Um transverso ou real que é o segmento AB e outro não transverso ou imaginário e que é o trecho CD. Estes dois eixos se cortam no centro O da curva perpendicularmente. Os pontos A e B são chamados de vértices da hipérbole. O eixo real tem comprimento igual a $2a$, o eixo imaginário tem comprimento $2b$ tal que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

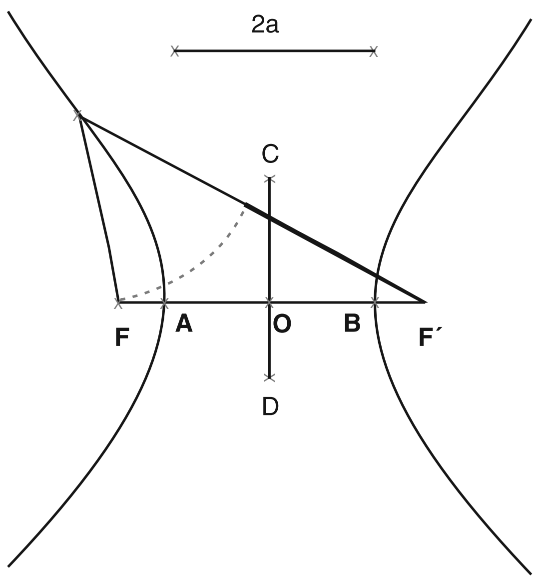


Figura 210

Para toda hipérbole existem duas retas concorrentes no centro da curva que tendem a tangencias os ramos da hipérbole quando estas seguem para o infinito. Tais retas são chamadas de retas assíntotas. A reta perpendicular ao eixo real no vértice intercepta as assíntotas em pontos que distam entre si um comprimento igual ao do eixo imaginário.

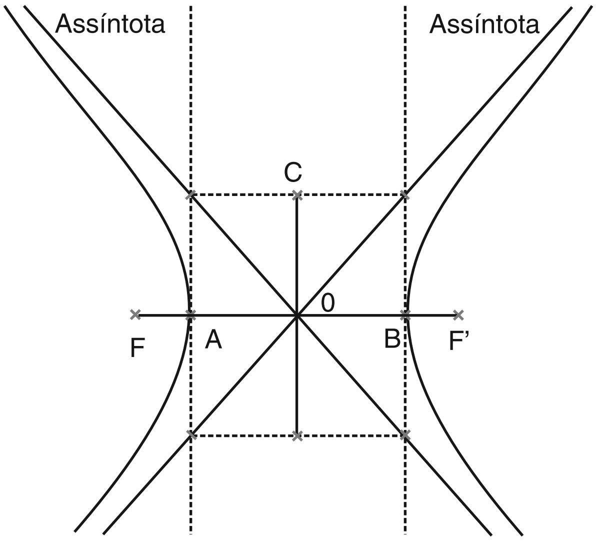


Figura 211

Quando $a = b$ os quatro pontos determinados pelas assíntotas e as perpendiculares pelos vértices formam um quadrado. Neste caso, as assíntotas por serem suportes das diagonais serão perpendiculares. A hipérbole para esta situação é chamada de Hipérbole Eqüilátera.

Assim como acontece na elipse, a construção exata da hipérbole não é possível utilizando régua e compasso. Por isso, as construções são feitas por aproximação utilizando concordância entre arcos ou a mão livre quando obtidos muitos pontos isolados da curva.

Problema 1: Construir uma hipérbole dadas a medida do eixo real e a distância focal.

Sejam $AB = 2a$, que é a medida do eixo real, e $2c$ a distância focal.

Resolução:

1.1 Trace o ponto médio O segmento AB e marque sobre tal segmento os pontos F e F' tais que $OF = OF' = c$.

1.2 Para se determinar um ponto M qualquer da curva, toma-se um ponto qualquer E da reta determinada pelos pontos F e F' exterior ao segmento FF'.

1.3 Com centro em F e raio AE, trace um arco.

1.4 Com centro em F' e raio BE trace outro arco que corta o primeiro em M, ponto da hipérbole, pois:

$$AE - BE = AB = 2a.$$

1.5 Aproveitando-se o raio AE, faz-se centro em F e F' e trace arcos para cima e para baixo de FF', o mesmo fazendo com o raio BE e centro em F e F'. Obtendo assim, quatro pontos da curva.

1.6 Tomando-se outros pontos análogos ao ponto E repetem-se as mesmas construções e pode-se obter vários pontos da hipérbole.

1.7 Unindo todos os pontos, obtêm-se a hipérbole.

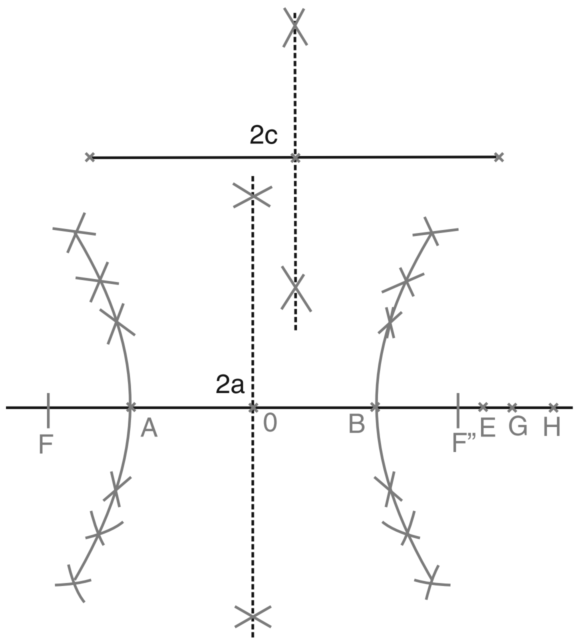


Figura 212

A reta tangente e a normal num ponto da hipérbole possuem a mesma propriedade das mesmas num ponto da elipse(reveja a aula 21 sobre o assunto).

Problema 2: Traçar a tangente e a normal à hipérbole dados os focos e um ponto da curva.

Resolução:

Seja M o ponto dado da curva, F e F' os focos da hipérbole.

2.1 Una M a F e F' e trace as bissetrizes interna e externa do triângulo FMF' no vértice M.

2.2 A bissetriz interna é a tangente e a bissetriz externa é a normal.

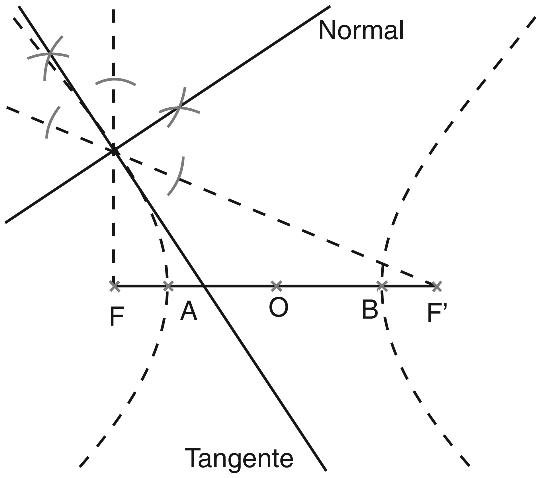


Figura 213

Exercícios

1. Encontre os vértices e construa a hipérbole sendo dados o comprimento do eixo imaginário e os focos.

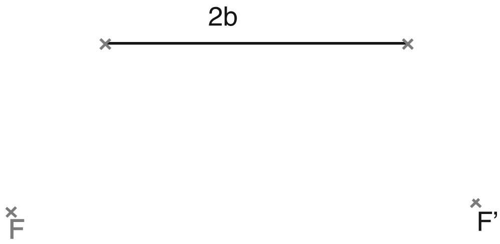


Figura 214

2. Encontre os vértices da hipérbole, o eixo imaginário e as assíntotas da hipérbole sabendo que a reta r é uma reta tangente e os focos são os ponto F e F'.

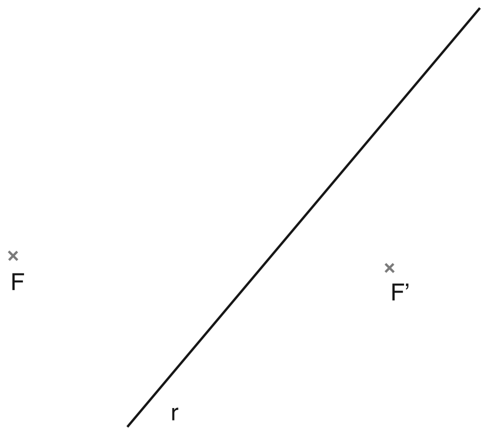


Figura 215

3. Sendo dados um foco F, um vértice B correspondente ao segundo foco, o comprimento do eixo imaginário , encontre o centro, o vértice e o foco que faltam a hipérbole.

Figura 216

Parábola

Definição: *A parábola é uma curva plana aberta infinita e de um só ramo, da qual cada um de seus pontos eqüidista de um ponto fixo chamado foco e de uma reta fixa denominada diretriz, situados em seu plano.*

A reta fixa que define a parábola é chamada de **Diretriz**. O eixo focal é a reta que é perpendicular à diretriz, o ponto médio entre o foco e a interseção da diretriz e o eixo focal é chamado de **vértice** da parábola.

Qualquer semi-reta de origem no foco e que passa por um ponto da curva se chama raio vetor. Qualquer segmento retilíneo cujos extremos se acham em dois pontos da curva, se chama corda. Qualquer semi-reta de origem em um ponto da parábola e paralela ao eixo da curva, é um diâmetro parabólico, ou um diâmetro de parábola.

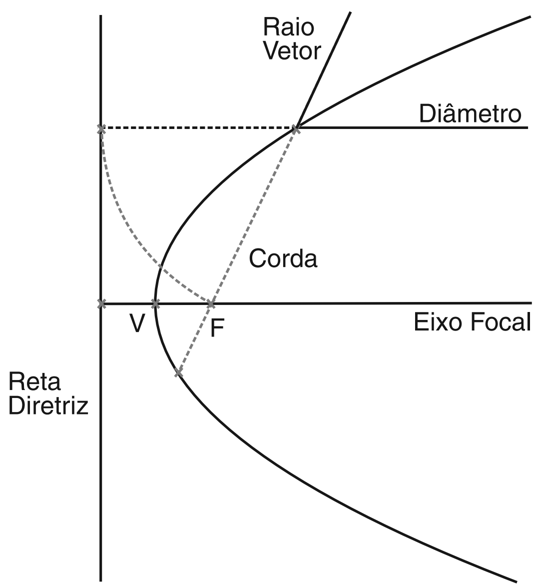


Figura 217

Problema 1: Traçar a parábola dada a diretriz e o foco.

Resolução:

Sejam r a reta diretriz e F o foco.

1.1 Por F, trace a perpendicular a r. Esta perpendicular é o eixo focal.

1.2 Indique por P o ponto de interseção entre a eixo focal e a diretriz. Encontre o ponto médio V entre P e F. O ponto V é o vértice da parábola.

1.3 Para se encontrar diversos pontos da parábola trace uma reta paralela ao eixo focal a qualquer distância.

1.4 Nesta paralela marque um ponto P_1 no mesmo semi-plano do foco que esteja a uma distância da diretriz maior que a distância do vértice a diretriz.

1.5 Sobre o eixo focal marque um ponto Q_1 a distância da diretriz igual a distância de P_1 da mesma.

1.6 Fixe uma medida no compasso e marque sobre a reta que passa por P_1 os pontos P_2, P_3, P_4, P_5... .

1.7 Com a mesma abertura no compasso marque sobre a reta que passa por Q_1 os pontos Q_2, Q_3, Q_4, Q_5... .

1.8 Ligue os pontos P_1 e Q_1, P_2 e Q_2, P_3 e Q_3, P_4 e Q_4, P_5 e Q_5... . Formando diversas retas paralelas à diretriz.

1.9 Com raio PQ_1 e centro em F construa um arco interceptando a reta determinada pelos pontos P_1 e Q_1, nos pontos A_1 e B_1 que pertencem à parábola.

1.10 Com raio PQ_2 e centro em F construa um arco interceptando a reta determinada pelos pontos P_2 e Q_2, nos pontos A_2 e B_2 que pertencem à parábola.

1.11 Seguindo o mesmo processo podemos obter diversos pontos da parábola.

1.12 Basta então ligá-los.

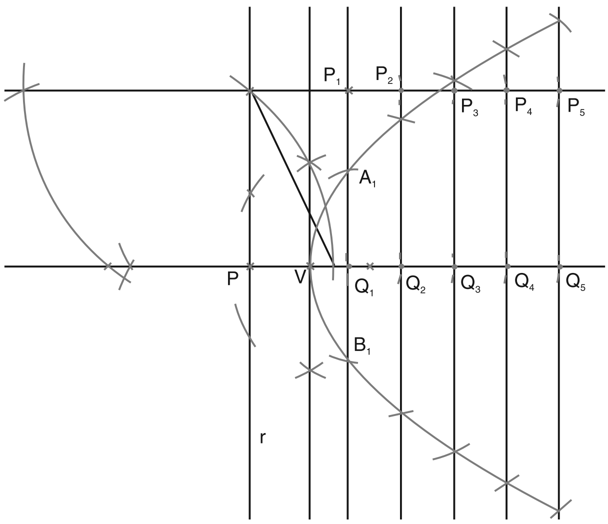


Figura 218

Exercícios

4. Construa a parábola conhecendo-se um ponto da curva, o eixo focal e a reta diretriz.

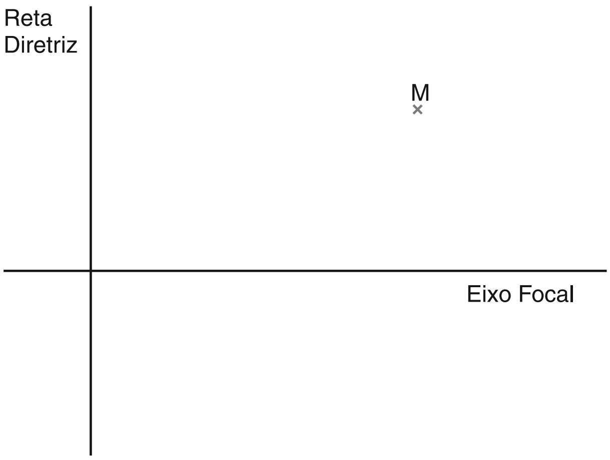


Figura 219

5. Encontre o foco e o vértice da parábola sabendo que o ponto M pertence a curva, a reta r é suporte do raio vetor do ponto M e s é a reta diretriz da parábola.

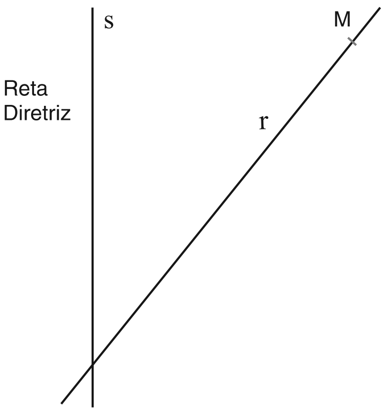


Figura 220

6. Encontre o foco, o eixo focal e o vértice da parábola sabendo que os pontos M e N pertencem a parábola e r é a reta diretriz da parábola.

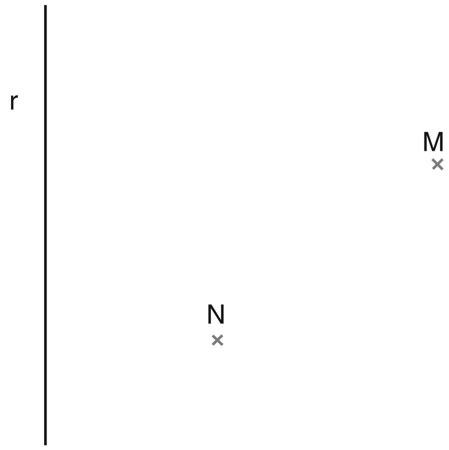


Figura 221

A parábola possui propriedades para suas cordas, tangentes e normais que são análogas às propriedades das cordas, tangentes e normais da elipse.

- Os pontos médios das cordas da parábola paralelas a uma direção dada são colineares formando uma reta paralela ao eixo focal.
- As retas tangente e normais a parábola num ponto dado da curva são as bissetrizes das retas suportes do raio vetor e do diâmetro que passam por este ponto.

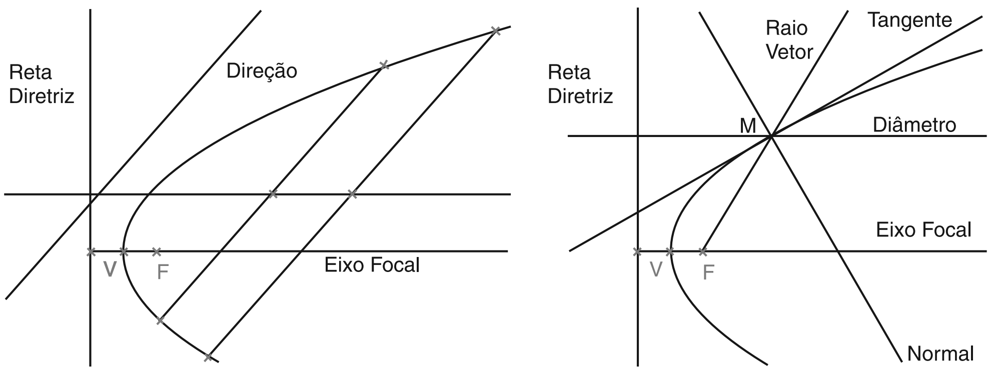


Figura 222

Problema 2: Traçar a tangente e a normal à parábola de um ponto da curva, conhecendo a diretriz, um ponto e o foco.

Resolução:

Seja M o ponto tomado na curva.

2.1 Una M a F e trace por M a perpendicular à diretriz r interceptando-a num ponto N.

2.2 A bissetriz interna do triângulo FMN relativa ao vértice M será a tangente pedida e a normal será a perpendicular à bissetriz em M, que neste caso será a bissetriz externa no mesmo vértice.

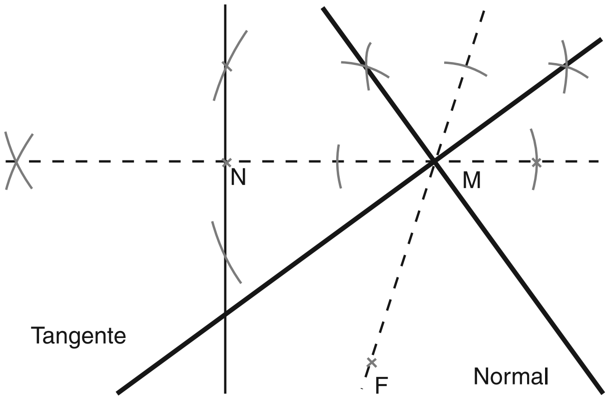


Figura 223

OBS: Os pontos médios das cordas paralelas a reta tangente determinam o diâmetro da parábola que possui origem no ponto de tangência.

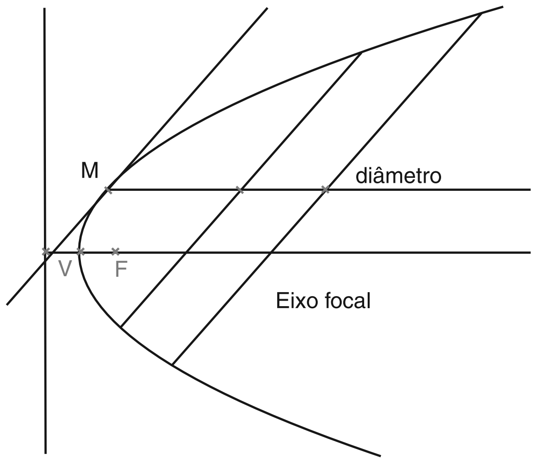


Figura 224

Exercícios

7. Encontre o foco e o vértice da parábola conhecendo-se a reta diretriz, um ponto da curva e a reta tangente neste ponto.

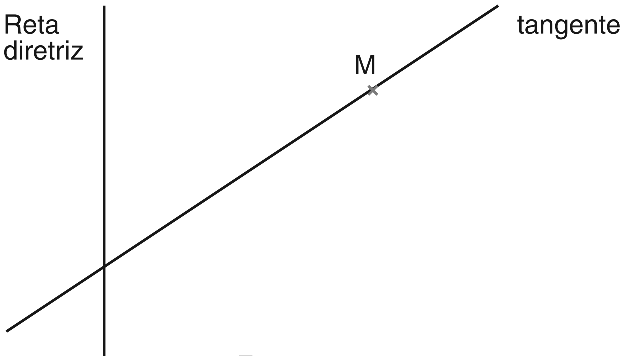


Figura 225

8. Traçar a tangente à parábola paralela a uma reta r dada.

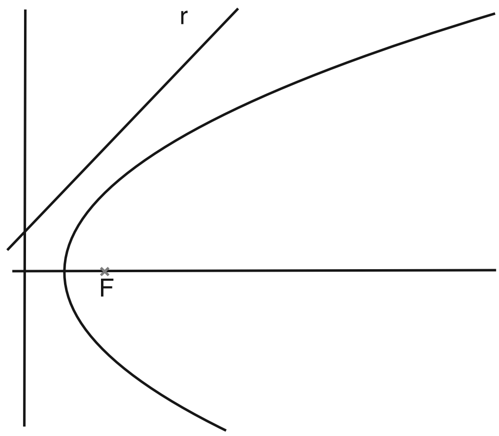


Figura 226

9. Encontre a reta diretriz e o eixo focal da parábola da qual se conhecem um ponto, a reta normal no ponto e o foco.

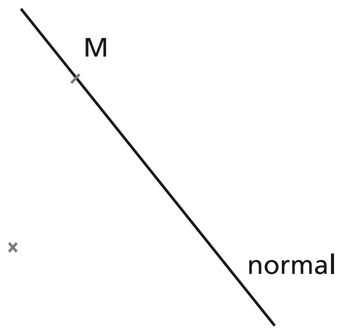


Figura 227

10. Encontre a reta diretriz da parábola conhecendo o foco e dois de seus pontos.

    Sugestão: Lembre que pela definição da parábola a diretriz deve estar a uma distância de cada ponto igual a distância dos mesmos ao foco. Por isso, a diretriz será tangente comum as circunferências de centros nos pontos da curva e que passam pelo foco.

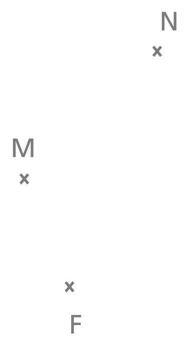


Figura 228

Resumo

Nesta aula, você aprendeu...

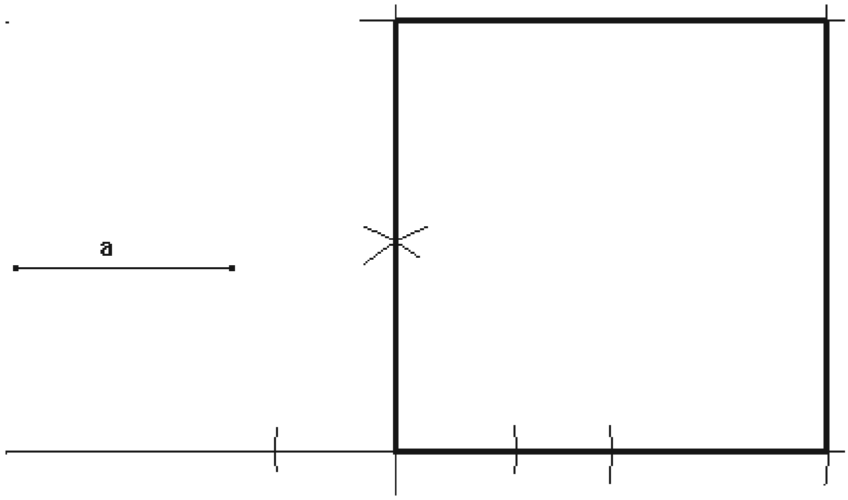
- a construir a hipérbole.
- a solucionar problemas de tangência à hipérbole.
- a construir a parábola.
- a solucionar problemas de tangência à parábola.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Exercícios Resolvidos

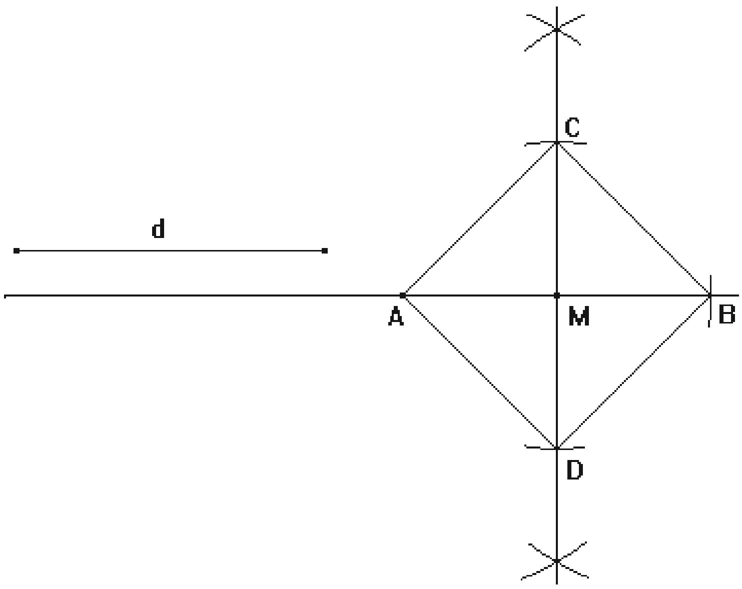
Aula 12

Exercício 1:



Basta duplicar o apótema dado e utilizar o problema 1 (pág.: 45).

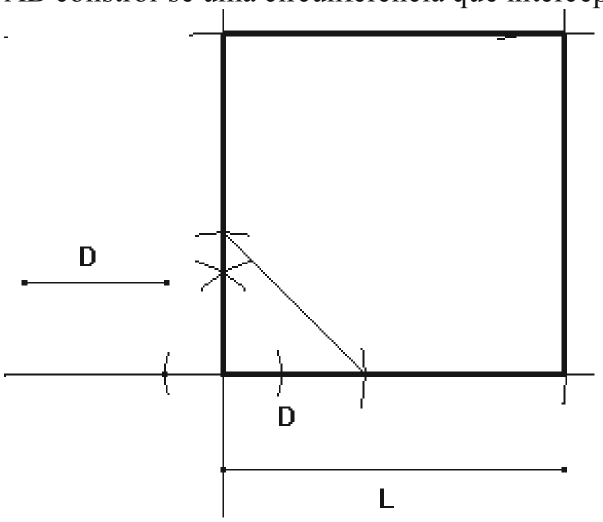
Exercício 2:



Traçar a diagonal AB, traçar a mediatriz de AB achando M (ponto médio de AB). Com centro em M e raio $\frac{AB}{2}$ construir a circunferência que tocará na mediatriz nos vértices C e D do quadrado. Daí ,temos o quadrado ACBD.

Exercício 3:

Seja o lado $\overline{AB}$ = D a diferença da diagonal do lado de um quadrado com o lado desse quadrado. Pela extremidade A do lado traçar uma perpendicular a AB.Com centro em A e raio AB constrói-se uma circunferência que interceptará a perpendicular em um ponto C.

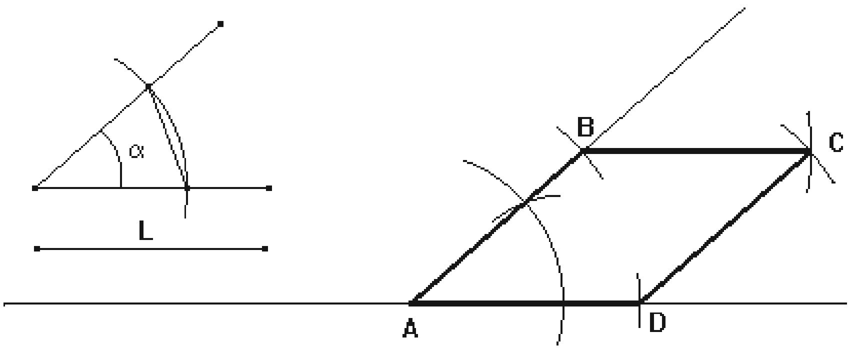


Indicar : L $\rightarrow$ lado do quadrado.
d $\rightarrow$ diagonal do quadrado de lado L.

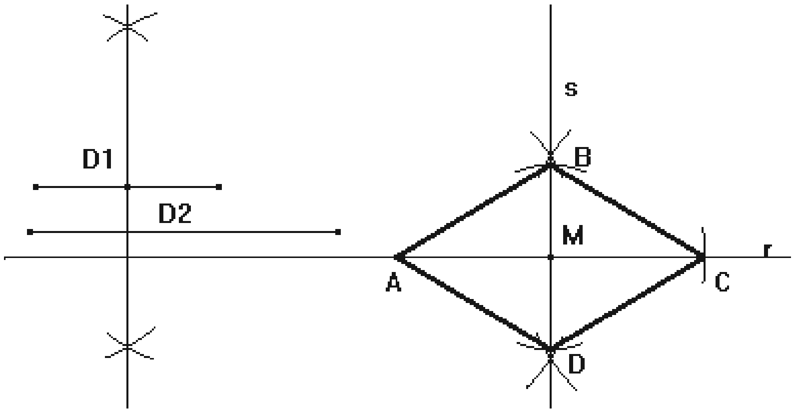
$$D = d - L$$
$$d = D + L$$
$$L\sqrt{2} = D + L$$
$$D = L\sqrt{2} - L$$
$$D = (\sqrt{2} - 1)\,L$$
$$L = \frac{D}{\sqrt{2} - 1}$$

O lado do quadrado é a soma entre a diagonal de um quadrado cujo lado é D e este lado D. Assim, obtenha $D\sqrt{2}$ e some com D para obter o lado do quadrado e prossiga a construção da mesma forma feita no exercício 1.

Exercício 4:



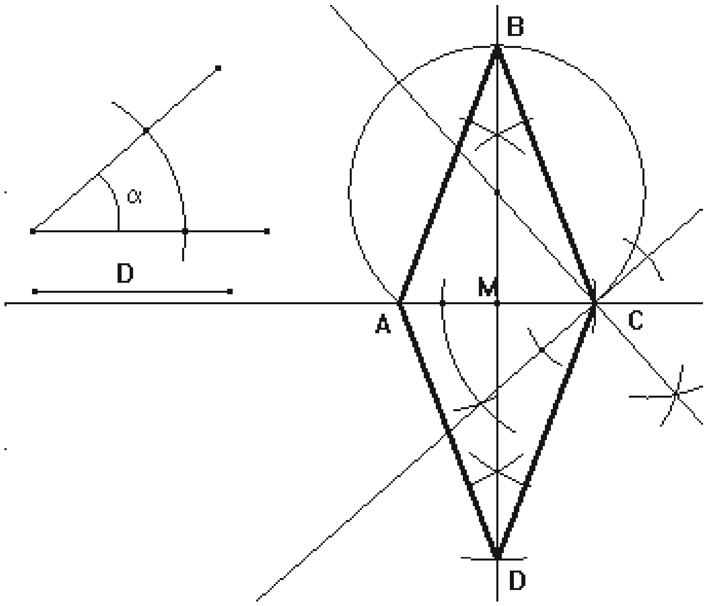
Considere o ângulo interno de medida α. Com o compasso pegar a medida L e com ponta seca no vértice A do ângulo achar B e D e com ponta seca em B e D e mesma medida L acha o ponto C. Daí, temos o losango ABCD.



Exercício 5:

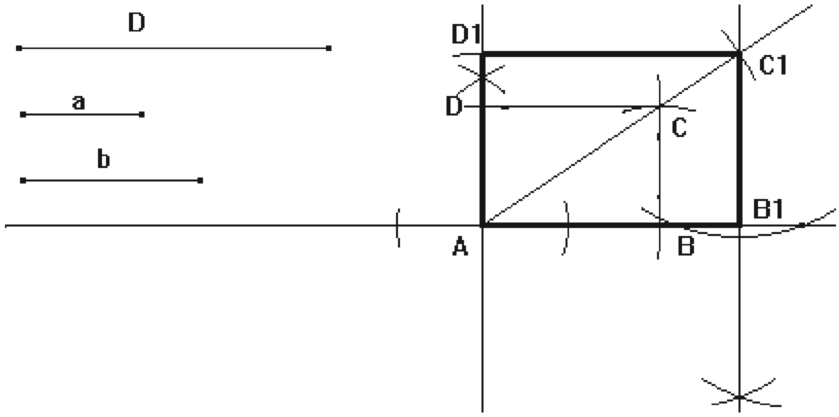
Construir sobre uma reta r a diagonal D_2 de medida AC. Determinar a mediatriz s de AC, achando M como intersecção de s e r .Ache a mediatriz de D_1 achando o ponto médio de medida D_1 . Com o compasso, marque a metade da medida de D_1, esta medida com ponta seca em M marque em s achando B e D. Daí, temos o losango ABCD.

Exercício 6:



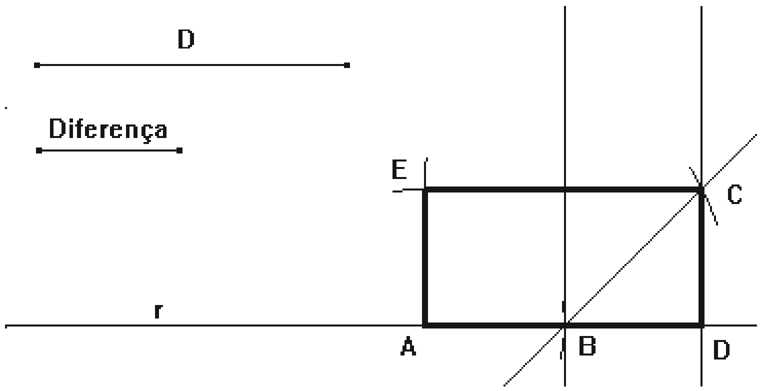
Considere a medida da diagonal D de AC. Ache o arco capaz de AC sob um ângulo de medida α. Ache B, marcar a medida MB na mediatriz de AB determinando D.
Daí , temos o losango ABCD.

Exercício 7:

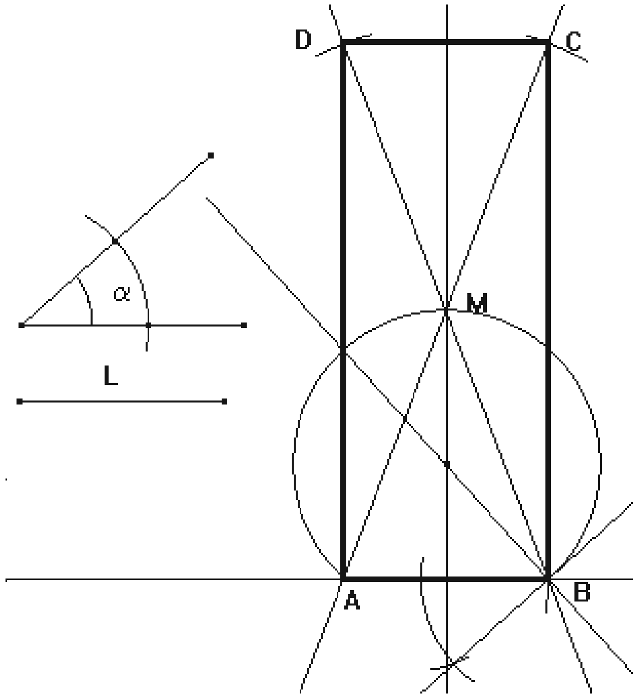


Construir um retângulo de lados de medidas a e b. Sobre a reta suporte da diagonal deste retângulo construa um segmento de medida D da diagonal dada, fazendo coincidir uma das extremidades A.
Por C_1, trace as paralelas aos lados do retângulo construído achando o retângulo pedido $AB_1C_1E_1$.

Exercício 8 :



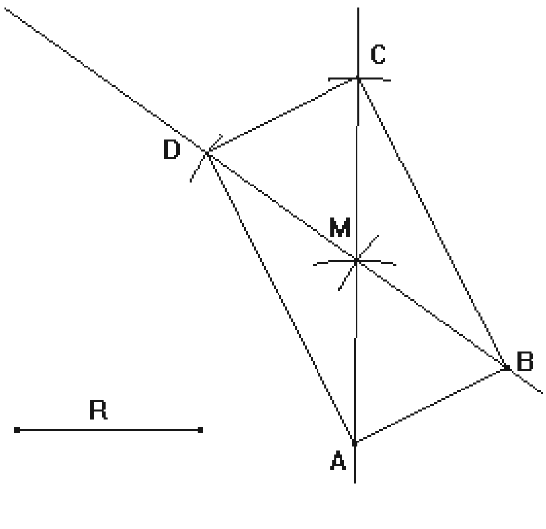
Sobre uma reta r toma-se AB igual a diferença entre as dimensões.
Na extremidade B constrói-se um ângulo de 45° na parte externa da diferença das dimensões.
Com centro em A constrói-se um arco de circunferência de raio igual à diagonal dada.
Interceptando a reta que forma 45° em C. Pelo ponto C traça-se uma reta perpendicular a r interceptando r em D . Com centro em C e A constrói-se dois arcos de circunferência de raios AD e CD, respectivamente , que se interceptam em um ponto E . O quadrilátero ADCE é solução do problema.



Exercício 9:

Considere o lado AB de medida L.
Ache o arco capaz de AB sob um ângulo α. A interseção do arco capaz com a mediatriz de AB nos dá o ponto M de encontro das diagonais.
Com o compasso com a medida MB trace um arco que interceptará os prolongamentos de AM e MB nos pontos C e D, respectivamente. Daí, temos o retângulo ABCD.

Exercício 10:

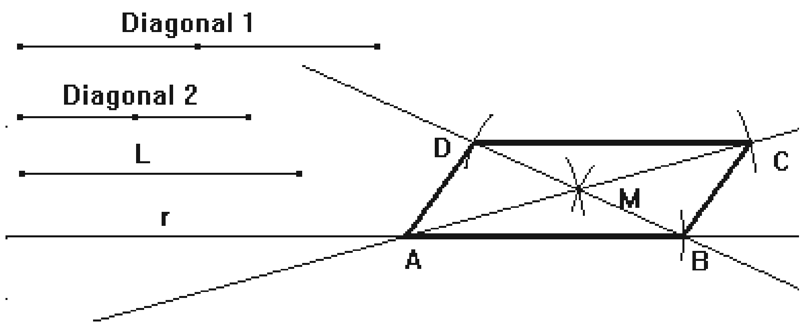


Com centro em A e B trace dois arcos de circunferência de raio R que se interceptarão em M que é o ponto de encontro das diagonais. Neste caso, M será o centro da circunferência circunscrita ao retângulo. Dobre os segmentos AM e BM em seus prolongamentos obtendo os vértices C e D, respectivamente. Daí, temos o retângulo ABCD.

OBS: Devido a urgência e pelo pouco tempo disponível, a partir da aula 13 daremos de início as resoluções dos exercícios de numerações pares.

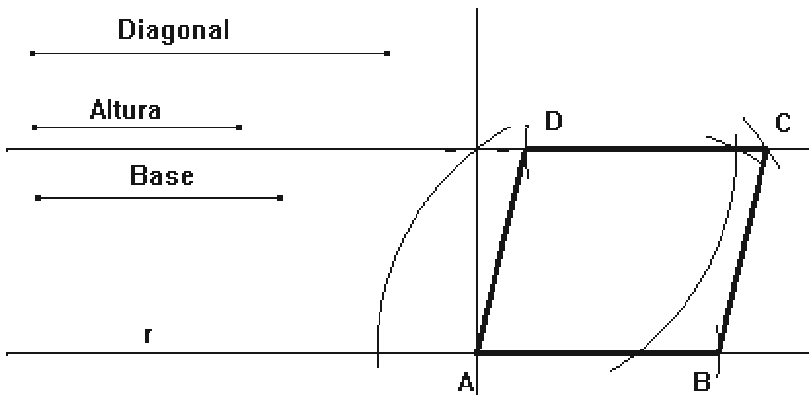
Aula 13

Exercício 2:



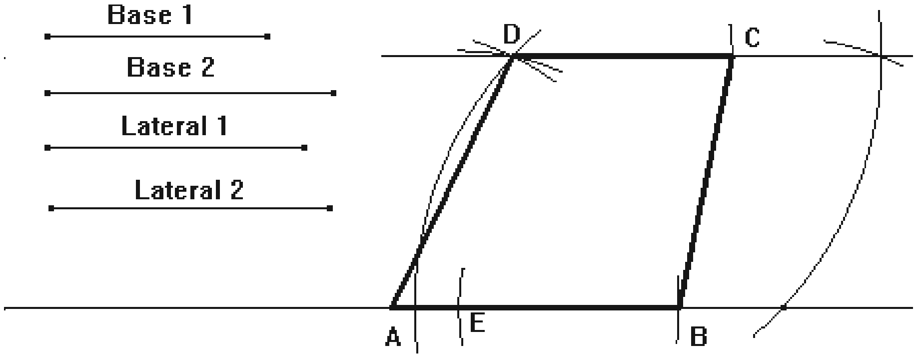
Sobre um reta r construa um segmento AB de medida L. Divida as diagonais ao meio. E com centro A trace um arco de raio igual a metade da diagonal 1 e com centro em B trace um arco de raio igual a metade da diagonal 2. Este arcos se interceptarão no ponto M de encontro das diagonais. Duplique os segmentos AM e BM sobre seus prolongamentos obtendo os pontos C e D respectivamente. O paralelogramo ABCD é a solução.

Exercício 4:



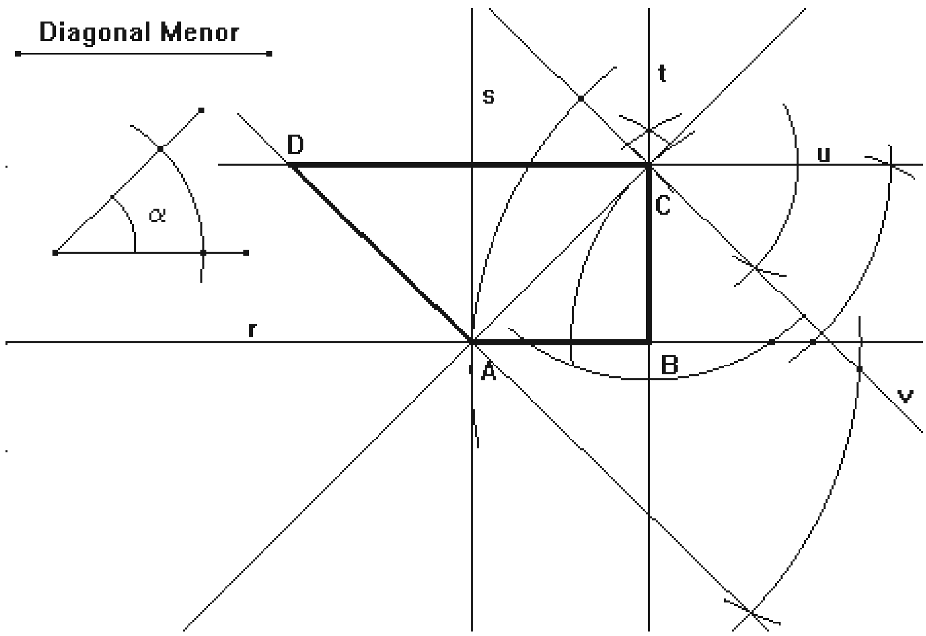
Seja sobre a reta r, AB de medida igual a base dada, trace uma reta paralela a r a uma altura igual a medida da altura. Com centro em A e raio de medida da diagonal achamos o ponto C sobre a paralela. Com centro em C e raio igual a base marcamos o ponto D sobre a paralela. Daí, temos o paralelogramo ABCD.

Exercício 6:



Sobre uma reta r construímos AB igual a uma das bases (maior) .
Sobre a mesma reta, seja E no segmento AB tal que EB seja igual a outra base. (dividimos o trapézio em um paralelogramo DCBE e um triângulo AED) .
Construímos o triângulo AED onde AE é a diferença das bases e os outros lados são as laterais dadas. Achamos o vértice D. Completando o paralelogramo de lados DC igual a base menor e CB igual ao lado ED do triângulo, achamos o vértice C e daí, temos o trapézio ABCD.

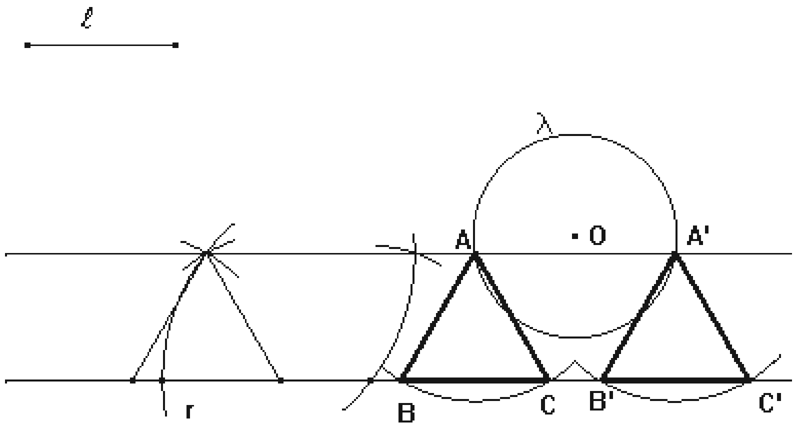
Exercício 8:



Seja na reta r o ponto A, trace uma reta s perpendicular a r passando por A, marcar 45° a partir da reta s. Marcando a diagonal menor neste novo lado do ângulo de 45° temos o ponto C. Traçar uma reta t perpendicular a r encontrando B. Trace por C uma reta u paralela a r. A partir da reta u no ponto C, marque o ângulo α encontrando uma reta v. Trace uma reta m que passe por A paralela a v interceptando u em D. Daí, temos o trapézio ABCD.

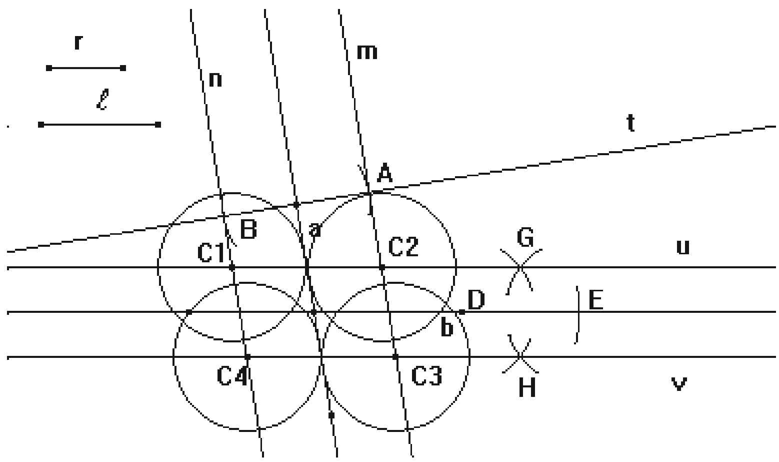
Aula 14

Exercício 2:



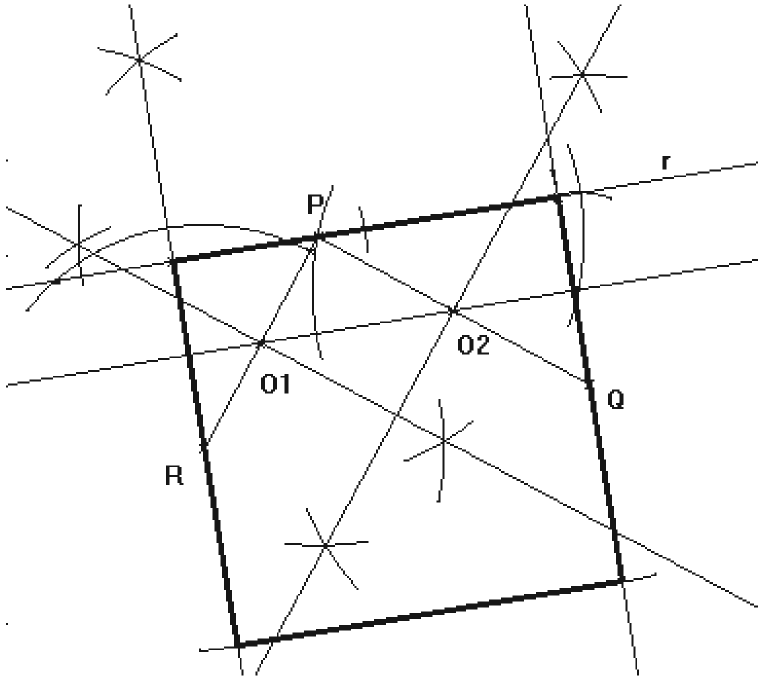
Sobre a reta r , construir um triângulo equilátero qualquer.
Traçar uma reta paralela a r passando pelo vértice deste triângulo que não pertence a r. Tal reta interceptará a circunferência nos pontos A e A'. Com raio ℓ e centro em A trace um arco interceptando r em B e C. Com centro em A' e mesmo raio trace um arco interceptando r em B' e C'. Os triângulo ABC e A'B'C' são as soluções.

Exercício 4: São dados dois segmentos r e l , duas retas concorrentes a e b. Construa uma circunferência de raio r , tangente à reta a e de tal modo que a reta b a intercepte segundo uma corda de comprimento l. (olhar o problema 2)



Como o raio é conhecido , o problema se resolve com a determinação do centro . Um lugar geométrico é conhecido, pois ele dista r da reta a. Basta traçar as retas m e n paralelas a reta a que esteja a uma distância r.
Vamos construir o circunferência numa posição qualquer , mas de modo que ela seja interceptada pela reta b segundo corda de comprimento DB= ℓ e de raio r obtendo os centros G e H. O lugar geométrico destes centros são as retas u e v paralelas a b que passam por G e H, respectivamente. Os centros das circunferências desejadas são as interseções entre u e n dando C1, u e m dando C2, v e m dando C3 e v e n dando C4.

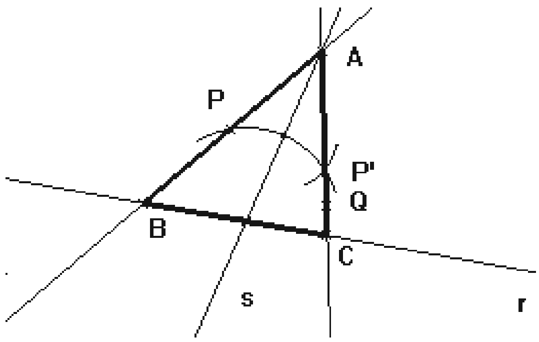
Exercício 6:



Achar o ponto médio do segmento PR, o ponto médio do segmento PQ e assim achamos O_1O_2.
Por P , passamos uma paralela a O_1O_2 achando a reta r .
Ache uma perpendicular a r passando por R , uma perpendicular a Q passando por r.
O lado do quadrado é o dobro da medida do segmento O_1O_2 e daí o quadrado pedido.

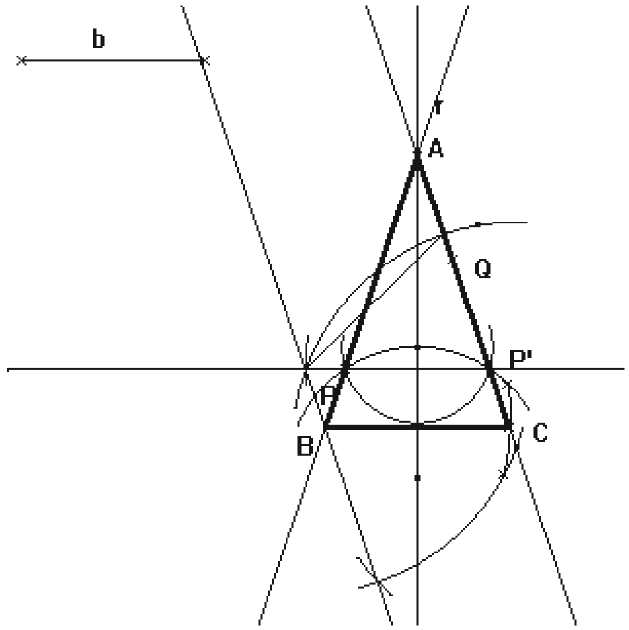
Aula 15

Exercício 2:



Traçar o simétrico P' do ponto P em relação a s.
Traçar a reta que passa por Q e P', achando os vértices $A \in s$ e $C \in r$. Trace a reta que passe por A e P achando o vértice B.

Exercício 4:

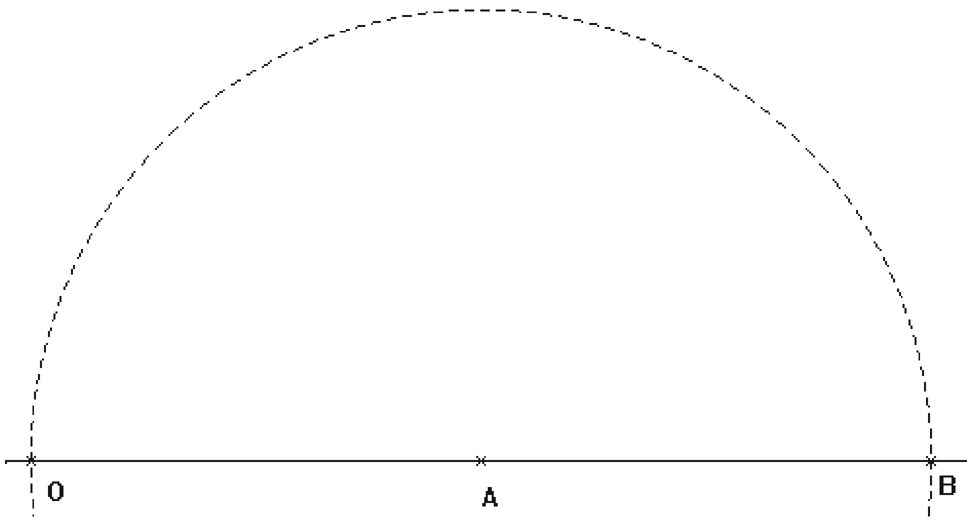


Achar o simétrico P' de P em relação a r.
Traçar a reta passando por Q e P', achando o vértice A em r.
Ligue P e P' por uma reta e da mesma forma os pontos A e P. Sobre a reta PP' a partir do ponto P' marque um segmento igual a b. Pela extremidade deste segmento trace uma paralela à reta AP' que interceptará a reta AP no ponto B. Com centro em B e raio b trace um arco interceptando a reta AP' no ponto C. Daí temos o triângulo isósceles pedido.

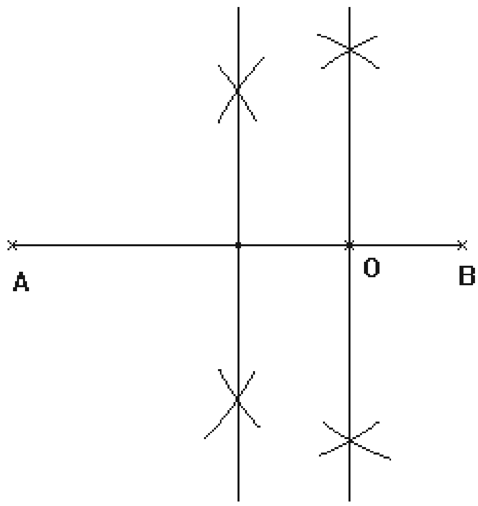
Aula 16

Exercício 2:

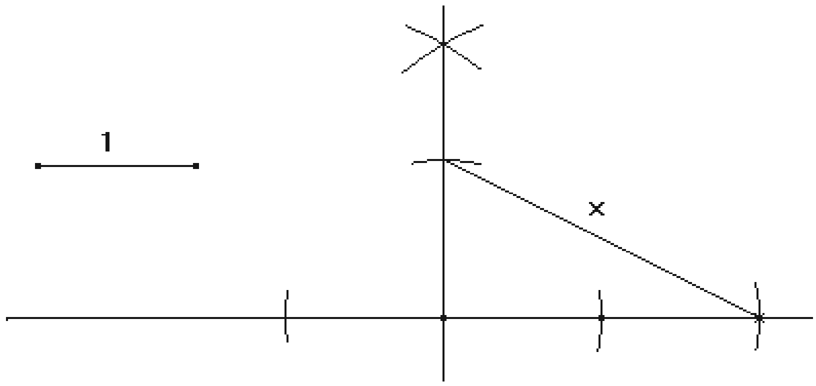
a) $\alpha = 2$. Como a razão é maior que 1 então A está entre O e B e OB=2AO.



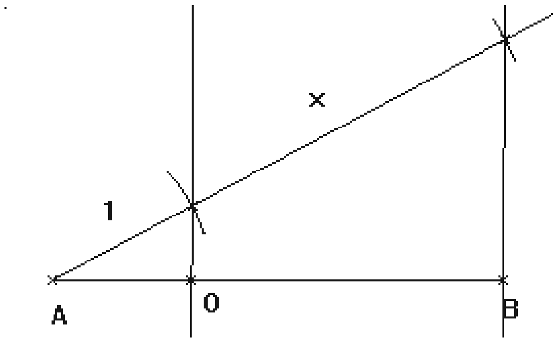
b) $\alpha = \frac{-1}{4}$ OB= – (1/4)OA



c) $\alpha = -\sqrt{5}$. Primeiro devemos definir o segmento unidade (1) e encontrar o segmento x de medida $\sqrt{5}$. Para isto, basta construir um triângulo retângulo onde um dos catetos mede 1 e o outro o dobro de 1.



Em seguida obtemos o ponto O entre AB tal que AO e OB seja proporcionais a 1 e x.

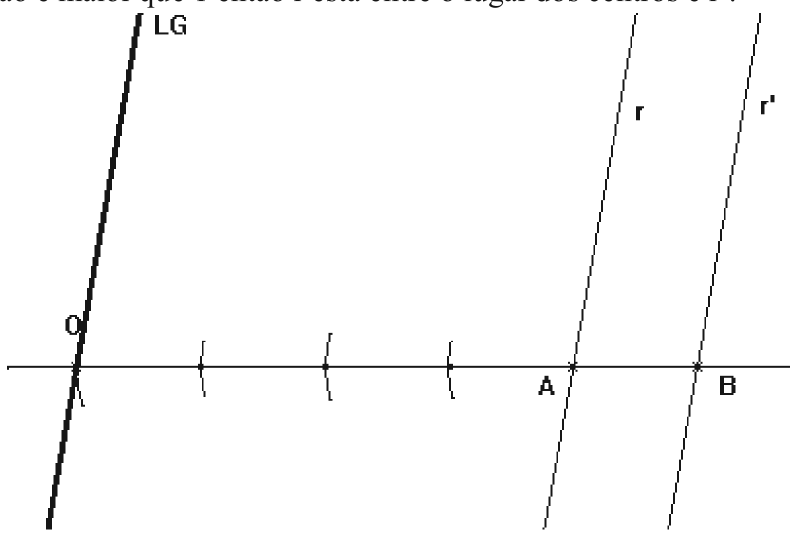


Exercício 4:

Em cada item o lugar geométrico é uma reta paralela a r. Para encontrá-la basta encontrar um centro e traçar a paralela. Para encontrar um centro fixe um ponto em cada reta e desenvolva igual ao exercício 2.

a) $\alpha = \frac{5}{4}$

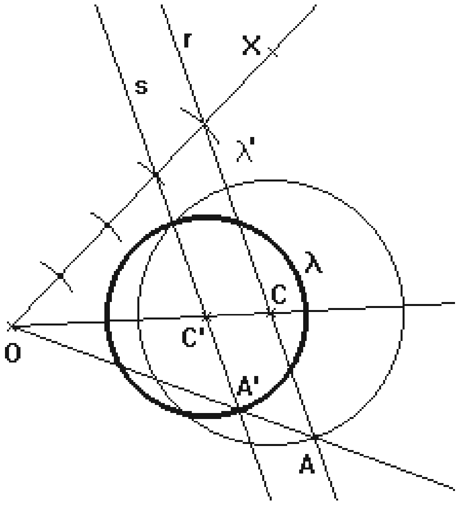
Como a razão é maior que 1 então r está entre o lugar dos centros e r'.



Exercício análogo ao exercício 2 desta aula. As letras b), c) , d) são exercícios análogos.

Exercício 6:

a) $\alpha = \frac{4}{3}$. Se $\lambda' = \frac{4}{3}\lambda$ então $\lambda = \frac{3}{4}\lambda'$.



OBS. Foi resolvido para α = 4/3 e não α = 5/3 (resolva para este valor).

Trace a semi-reta OC. Trace um outra semi-reta OX. Marque quatro segmentos de igual medida sobre OX. Ligue o quarto ponto obtido com C por uma reta r e trace uma reta s paralela a r passando pelo terceiro ponto sobre OX. A reta s interceptará OC no novo centro C'. Indique por A um dos pontos de interseção de r com λ' e trace a semi-reta AO interceptando s em A' que pertence a circunferência λ. Basta agora construir a circunferência de centro em C' que passa por A'.

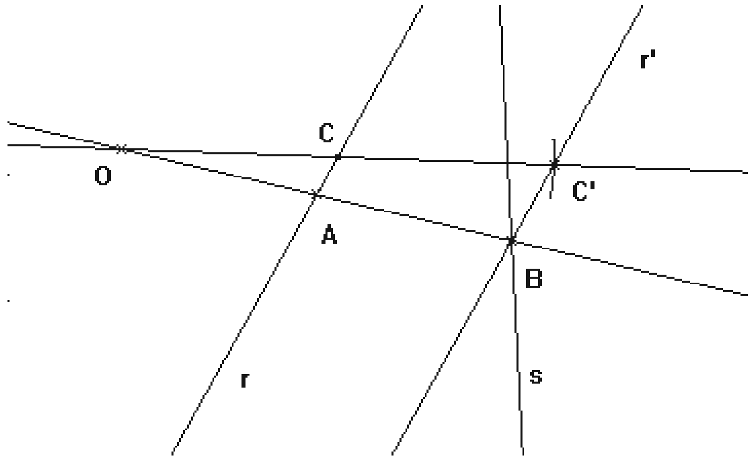
As letras b), c) , d) são análogas.

Exercício 8: Basta olhar a explicação da página 98 e 99.

Aula 17

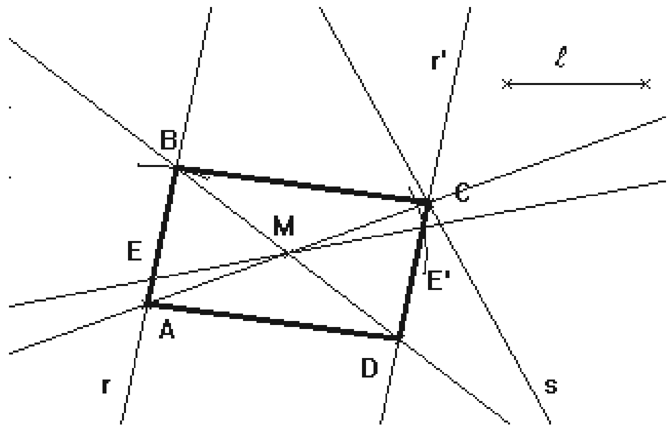
Exercício 2:

Obs.: As letras no enunciado e na solução estão trocadas no desenho. No lugar de "r" é "s" e no lugar de "s" é "t".



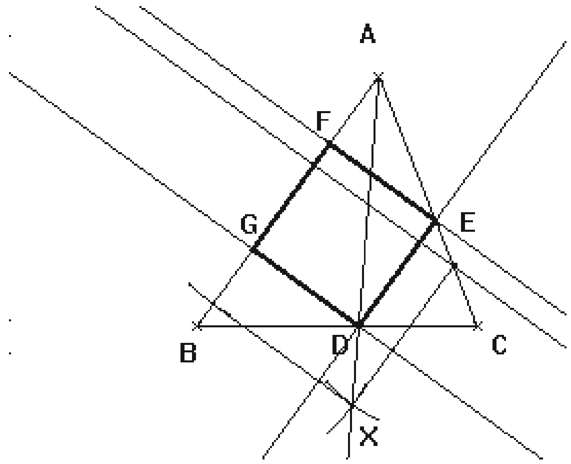
Como OB = 2OA basta multiplicar a reta r por 2 com centro O obtendo r'. A interseção entre r'e s nos dá o ponto B. Unindo O a B interceptamos r em A e achamos a reta r.

Exercício 4:



Seguindo a sugestão dada multiplicamos r por –1 com centro em M obtendo r' que intercepta s em C. Unindo C e M encontramos A em r. Transferindo o lado ℓ para o vértice A obtemos o vértice B. Unindo B e M encontramos D em r'. O paralelogramo ABCD é a solução para o problema.

Exercício 6: (no livro corresponde ao 13):

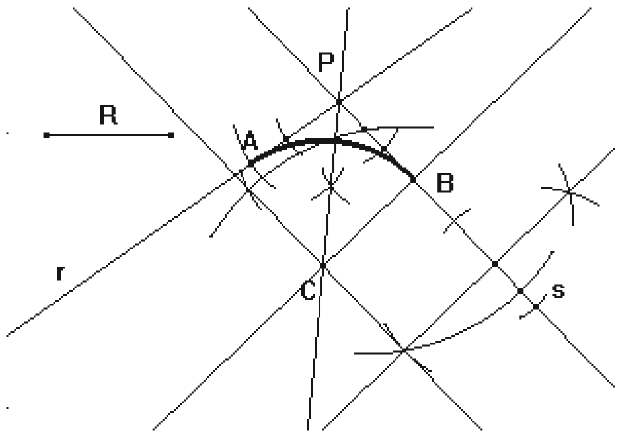


Primeiro construa um quadrado auxiliar com um de seus lados apoiado sobre AB e o terceiro vértice sobre o lado AC. Identificando o quarto vértice por X ligue-o ao vértice A obtendo em BC o primeiro vértice do quadrado desejado, que identificamos por D. Por D trace as retas paralelas aos lados do quadrado auxiliar que contêm o ponto X obtendo E em AC e G em AB. Basta agora transferir o lado ED para o vértice G que obtemos o quarto e último vértice F. O quadrado DEFG é a solução para o exercício.

Aula 18

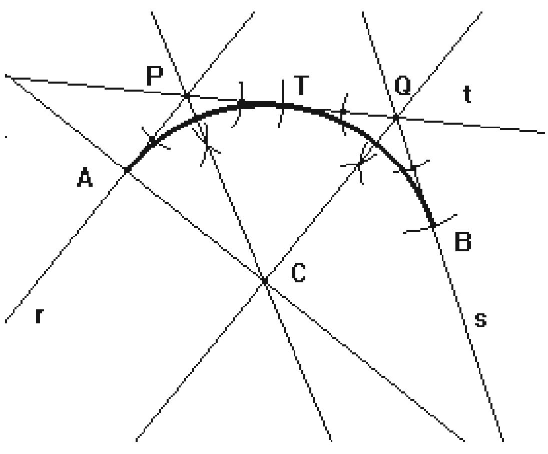
Exercício 2:

Indique por P a interseção das retas r e s. Trace a bissetriz do ângulo formado pelas retas r e s. O centro do arco de concordância pertence à bissetriz. Trace uma reta paralela a s que esteja a uma distância R de s (ou de r). Esta paralela interceptará a bissetriz no centro C do arco. Trace por C um perpendicular a s interceptando-a no ponto B. Marque sobre r o ponto A tal que PB=PA. Os pontos A e B são os pontos de concordância. Basta traçar o arco de centro em C que possui extremidades nos pontos A e B.



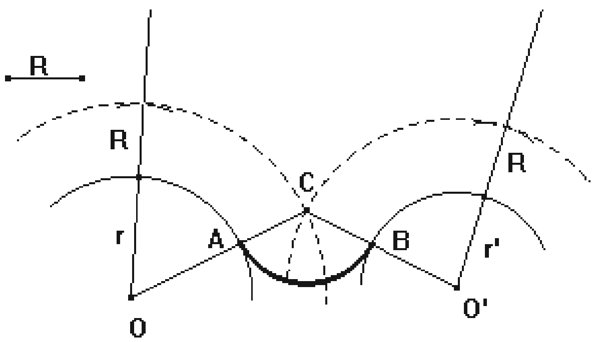
Exercício 4:

Identifique por P a interseção entre r e t , e por Q a interseção entre s e t. O centro do arco pertence à bissetriz do ângulo formado pelas retas r e t, e também pertence à bissetriz do ângulo formado pelas retas t e s. Por isso, trace as bissetrizes citadas, a interseção destas bissetrizes é o centro C do arco. Trace por C uma perpendicular à reta r obtendo A na interseção. Marque sobre o segmento PQ o ponto T tal que PA=PT. Marque sobre r o ponto B tal que QT= QB. Os pontos A e B são os pontos de concordância e o ponto T é o ponto de tangência do arco na reta t. Basta agora traçar o arco de centro em C que passa pelos pontos A, T e B.



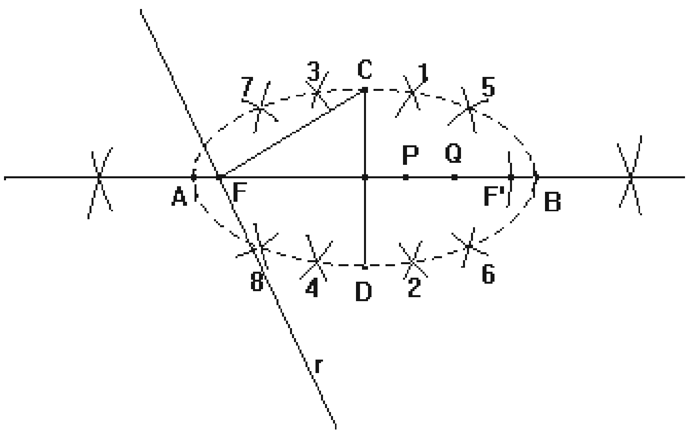
Exercício 6:

Chame de r o raio do arco de centro em O e de r' o raio do arco de centro em O'. Trace o arco de centro O raio R+r e trace o arco de centro O' e raio R+r'. Tais arcos se encontrarão no ponto C que é o centro do arco de concordância. Ligue C e O por um segmento interceptando o primeiro arco no ponto A. Ligue C e O' por um segmento interceptando o segundo no ponto B. Os pontos A e B são os pontos de concordância. Basta agora traçar o arco de centro em C de extremidades A e B.



Aula 21

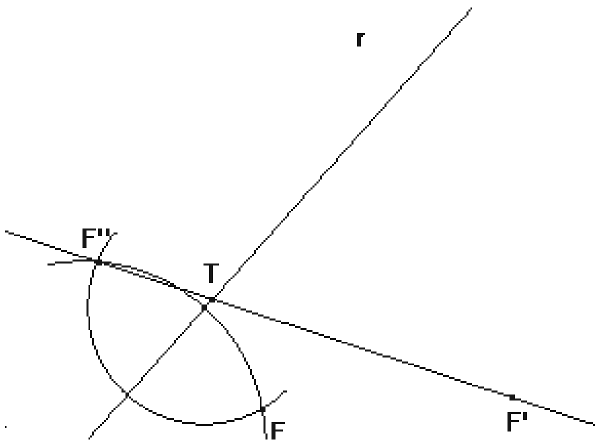
Exercício 2:
Não existe a construção exata da elipse. Neste caso, faremos as construções de alguns pontos que pertençam à elipse. Entre esses pontos é importante encontrarmos os vértices da elipse. Trace a



mediatriz do segmento CD que interceptará a reta r no foco F. Ache o simétrico F' de F em relação a CD, este ponto será o segundo foco. O segmento FC tem o comprimento igual a metade do eixo maior. De centro no ponto médio de CD trace um arco de raio FC que interceptará a mediatriz nos pontos A e B, que são os vértices da elipse que estão faltando. Para encontrarmos um ponto que pertença a elipse diferente dos vértices tome um ponto P sobre FF'. De centro em F e raio AP trace um arco. De centro em F' e raio PB trace outro arco que interceptará o primeiro arco nos pontos 1 e 2. De centro em F e raio PB trace um terceiro arco. De centro em F' e raio AP trace um quarto arco que interceptará o terceiro arco nos pontos 3 e 4. Prosseguindo desta forma podemos obter diversos pontos da elipse, basta variar os pontos tomados sobre FF'. Obtendo uma quantidade razoável de pontos da elipse podemos traçar a mão livre a curva que passa por esses pontos.

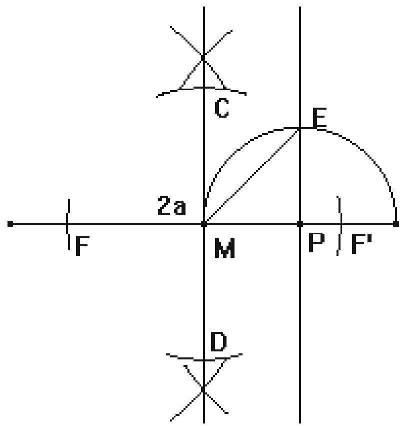
Exercício 4:

Como a reta r é tangente à elipse então ela é bissetriz externa dos raios focais. Neste caso o simétrico F'' de F em relação a r pertence à reta do raio focal que passa por F'. Assim, ache o simétrico F'' e ligue-o com F' que interceptará r no ponto T de tangência da reta r.



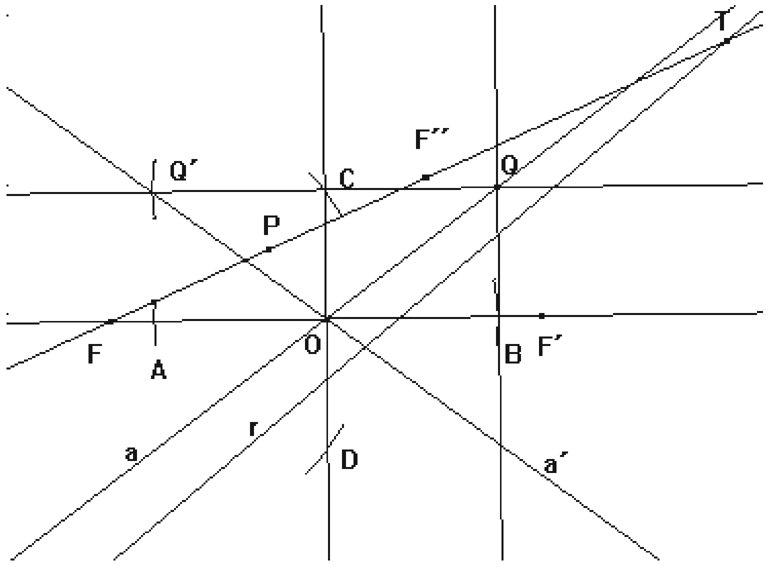
Exercício 6:

Dada uma elipse de eixos 2a, 2b e eixo focal 2c (com eixo maior 2a) sabemos que $a^2=b^2 + c^2$. Assim, se c=b temos que "a" é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles. Dessa forma, trace a mediatriz do segmento 2a obtendo um ponto M. Trace a mediatriz da metade de 2a obtendo um ponto P. Trace a semicircunferência de centro em P e raio MP, interceptando a mediatriz que passa por P no ponto E. De centro em M e raio ME, marque os pontos F e F' sobre o eixo maior, e também marque com mesmo raio os pontos C e D sobre sua mediatriz. Os pontos F e F' são os focos e o segmento CD é o eixo menor da elipse.



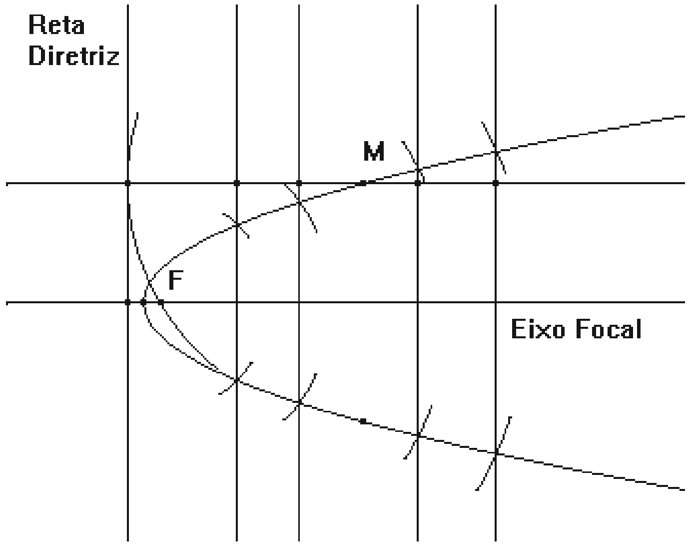
Aula 22

Exercício 2:
Como a reta r é bissetriz das retas que contém os raios focais, basta achar o simétrico F’’ de F’ em relação à r e ligar com F. A interseção de FF’’ com r é o ponto T de tangência da reta r. Como o ponto T pertence à hipérbole temos que FF´´= 2a. Ache o ponto médio P do segmento FF´´. Ache o ponto médio O de FF´. O ponto é o centro da hipérbole. Trace por O a perpendicular ao eixo focal. Com centro em O e raio FP marque no eixo focal os pontos A e B que serão os vértices da hipérbole. Com centro em A e raio FO marque os pontos C e D sobre a perpendicular que passa por O em relação ao eixo focal. O segmento CD é o eixo imaginário. Trace por C a reta paralela ao eixo focal. Trace por B uma perpendicular ao eixo focal. A interseção destas duas retas é um ponto Q que pertence a uma das assíntotas. Ache o ponto Q´ simétrico de Q em relação ao eixo imaginário que pertencerá a outra assíntota. Ligando Q e O e ligando Q´ e O temos as duas assíntotas.



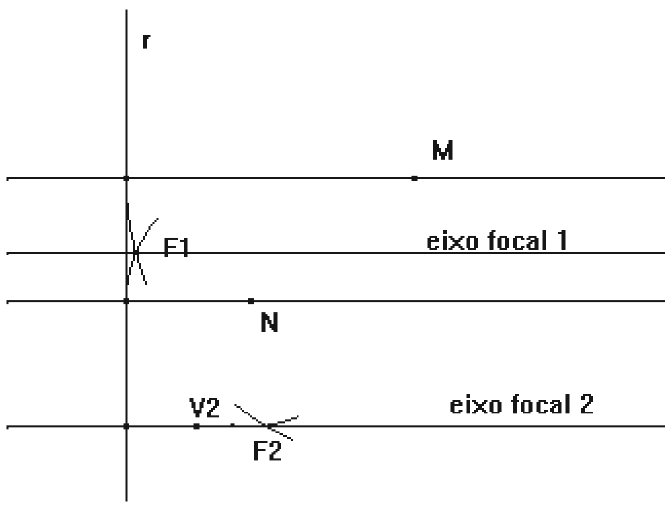
Exercício 4:

Trace por M uma perpendicular à reta diretriz. Com raio igual a distância de M à reta diretriz trace um arco com centro em M interceptando o eixo focal no ponto F que é o foco. Assim, seguindo os passos do Problema 1 de parábola construa a parábola.



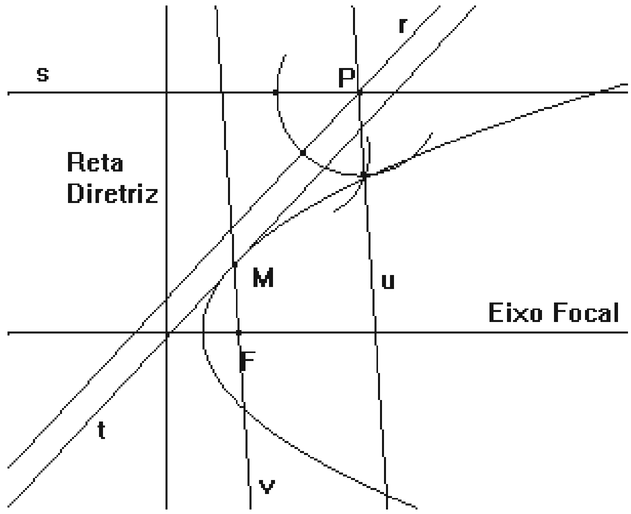
Exercício 6:

Trace pelos pontos M e N as retas perpendiculares a r. Construa a circunferência de centro em M e raio igual a distância de M a r. Construa a circunferência de centro em N e raio igual a distância de N a reta r. As interseções das circunferências são as soluções de focos F1 e F2. Note que temos duas soluções distintas. Traçando por estes pontos as perpendiculares a r encontramos as soluções para os eixos focais. O vértice é o ponto sobre eixo focal que está a uma distância igual de r e do foco.



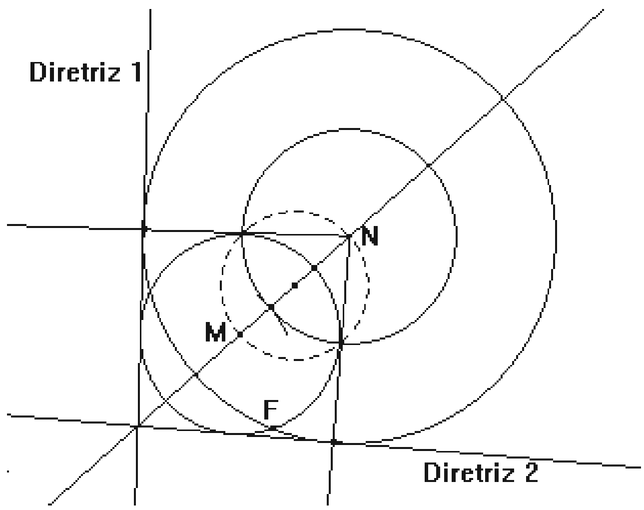
Exercício 8:

Por um ponto P qualquer sobre a reta r trace uma reta s perpendicular à diretriz . Transfira o ângulo entre s e r para o outro lado da reta r obtendo uma reta u. Trace pelo foco F uma reta v paralela a u. A reta v interceptará a parábola no ponto M. Trace por M a reta t paralela a r. A reta t é tangente a parábola no ponto M.



Exercício 10:

Trace a circunferência de centro M que passa por F e a circunferência de centro em N que passa por F. As retas diretrizes são as tangentes exteriores comuns dessas circunferências(veja aula 6, Problema 6, primeiro caso). Observe que teremos duas soluções.



ISBN 85-89200-66-3
9788589200660

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL