

PSI-3214 — Laboratório de Instrumentação Elétrica
Exemplos com Séries de Fourier

Vítor H. Nascimento

1 Introdução

Vamos ver aqui alguns exemplos de séries, e de como usar a série de Fourier para resolver problemas, neste caso, para achar a saída (em regime permanente) de um circuito elétrico com uma entrada não senoidal.

Uma das razões para estudar a fundo como resolver circuitos com entradas senoidais é que é possível escrever praticamente qualquer função periódica como uma soma de senóides com frequências diferentes. A maneira normalmente mais fácil de resolver um circuito (linear) em que a entrada não é senoidal, mas é uma função periódica qualquer, é *decompor* a entrada em uma soma de senóides de frequências diferentes, *resolver* o circuito separadamente para cada frequência, e depois *somar* os resultados parciais para se obter a saída.

Pode-se fazer isso porque circuitos formados apenas por geradores, resistores, indutores e capacitores ideais têm essa propriedade chamada *linearidade*, que veremos mais adiante no curso. O objetivo desta seção é mostrar que formas de onda muito diferentes podem ser descritas como somas de senóides (série de Fourier), e como isso pode ser usado para resolver problemas práticos.

Vamos mostrar alguns exemplos.

1.1 Onda quadrada

Uma onda quadrada (com nível DC) é um sinal que vale $+A$ metade do tempo, e 0 a outra metade (veja a Figura 1). Para calcular a série de Fourier dessa onda, é mais fácil usar a forma exponencial (veja a apostila [1] e os livros [4, 2]):

Para $k = 0$, temos

$$d_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A dt = \frac{A}{2},$$

o que é razoável — o coeficiente d_0 é o nível DC do sinal. Para $k \neq 0$, por outro lado,

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T} [e^{-jk\omega_0 t}]_0^{T/2} \\ &= -\frac{A}{jk\omega_0 T} (e^{-jk\omega_0 T/2} - e^{j0}) \end{aligned}$$

Lembrando que $\omega_0 T = 2\pi$, vem

$$d_k = -\frac{A}{jk2\pi} \left(\underbrace{e^{-jk\pi}}_{=-1} - \underbrace{e^{j0}}_{=1} \right) = \frac{A}{jk\pi} = -j \frac{A}{k\pi}.$$

Portanto, concluímos que

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{jk\pi} \left(\underbrace{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}_{=2j \operatorname{sen}(k\omega_0 t)} \right) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega_0 t). \quad (1)$$

Na Figura 2 vemos a série da onda quadrada para diferentes números de harmônicas, mos-

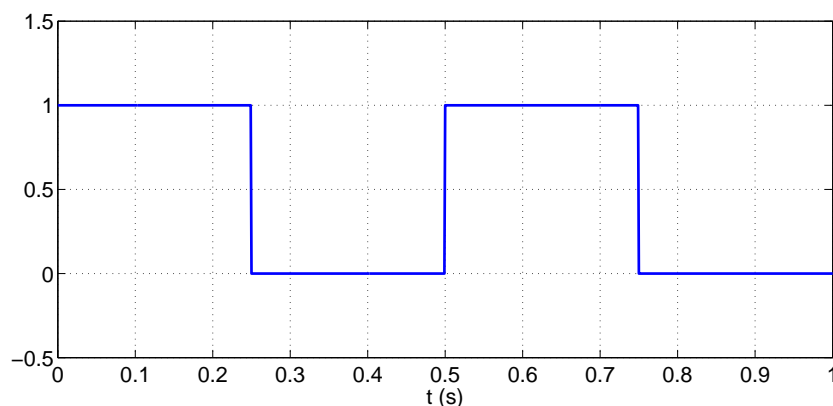


Figura 1: Onda quadrada com $A = 1$ e $T = 0,5$ s.

trando como a aproximação vai melhorando à medida que mais componentes são acrescentadas.

1.2 Onda triangular

Vamos ver agora uma onda triangular, como a da figura 3. Para calcular a série de Fourier dessa onda, vamos usar um truque. Considere um sinal periódico $s(t)$ qualquer, com período T . Lembrando que $\omega_0 = 2\pi/T$, e portanto $\omega_0 T = 2\pi$. Portanto $e^{-jk\omega_0 t}$ também é periódico com período T . Isso significa que

$$\int_0^T s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Na verdade, a integral pode ser calculada em qualquer intervalo de comprimento T , que o resultado continua o mesmo. Portanto, para calcular a série da onda triangular, vamos usar

$$\begin{aligned} d_0 &= 0, & d_k &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(-1 + \frac{4t}{T} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 \left(-1 - \frac{4t}{T} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ & & &= \begin{cases} -\frac{4}{(k\pi)^2}, & \text{se } k \text{ ímpar,} \\ 0, & \text{se } k \text{ par.} \end{cases} \end{aligned}$$

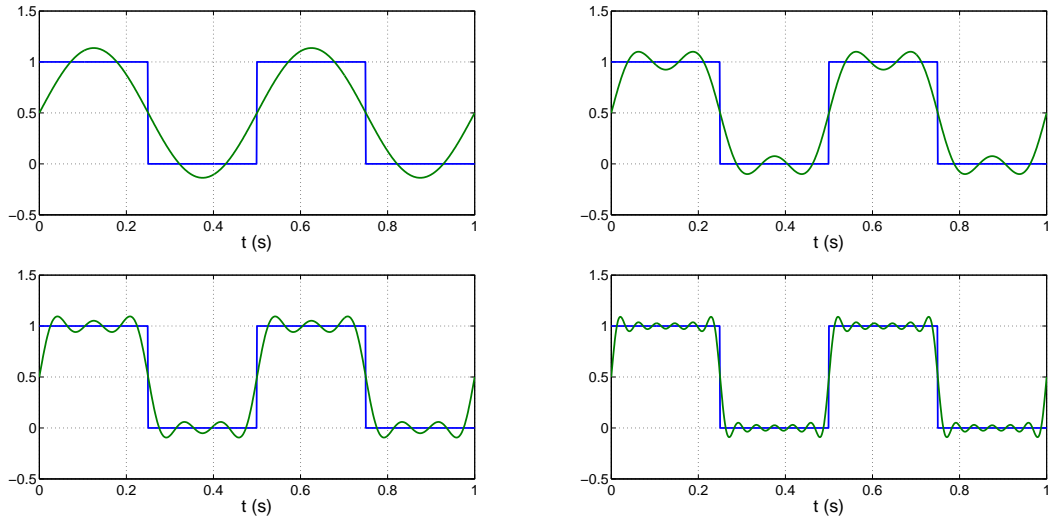


Figura 2: Primeiros termos da série (1) da onda quadrada. Em cima, à esquerda: apenas a 1ª harmônica. Em cima, à direita: até a terceira harmônica ($k = 3$). Em baixo, à esquerda: até a quinta harmônica. Em baixo, à direita: até a 11ª harmônica.

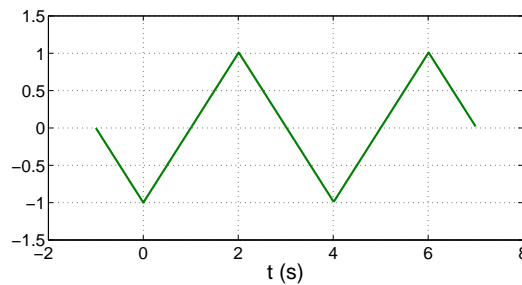


Figura 3: Onda triangular.

Juntando os termos com mesmo valor de k , encontramos a série na forma polar

$$s_{\Delta}(t) = -\frac{8}{\pi^2} \cos(\omega_0 t) - \frac{8}{(3\pi)^2} \cos(3 \cdot \omega_0 t) - \frac{8}{(5\pi)^2} \cos(5 \cdot \omega_0 t) + \dots \quad (2)$$

Na Figura 4 no alto, à esquerda está desenhada a onda triangular (no traço verde) e o primeiro termo da equação (2), no traço azul. A aproximação ainda não é muito boa, mas melhora bastante quando se acrescentam mais termos à série. Com as onze primeiras harmônicas já é difícil de ver a diferença entre a função exata e a aproximação.

1.3 Sinal musical

Vamos ver outro exemplo: os sinais da Figura ?? a ?? são de uma nota dó tocada em um violino (curva clara, verde), juntamente com suas aproximações por série de Fourier com um número crescente de harmônicas (curvas escuras, azuis). Observe como novamente as

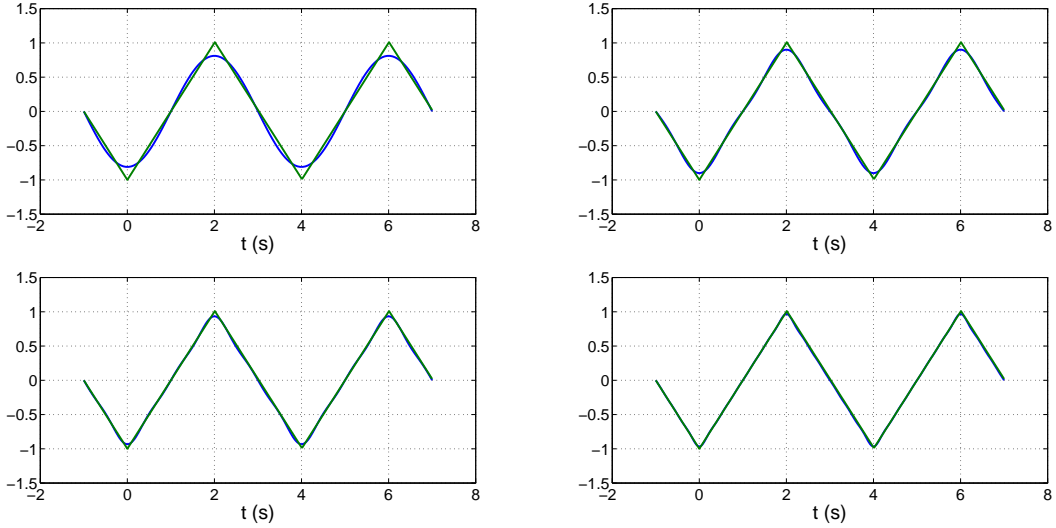


Figura 4: Primeiros termos da série (1) da onda tringular. Em cima, à esquerda: apenas a 1ª harmônica. Em cima, à direita: até a terceira harmônica ($k = 3$). Em baixo, à esquerda: até a quinta harmônica. Em baixo, à direita: até a 11ª harmônica.

aproximações vão ficando melhores à medida que o número de senóides é aumentado. A série mostrada nas figuras foi calculada usando a TDF, e é dada por

$$\begin{aligned}
 s_{\text{vio}}(t) = & 0,0998 \cos(\omega_0 t - 124,56^\circ) + 0,0413 \cos(2\omega_0 t + 143,73^\circ) + \\
 & + 0,1051 \cos(3\omega_0 t + 147,96^\circ) + 0,0785 \cos(4\omega_0 t + 80,74^\circ) + \\
 & + 0,0260 \cos(5\omega_0 t - 149,74^\circ) + \dots
 \end{aligned} \tag{3}$$

em que $\omega_0 = 2\pi \cdot 263,022\text{Hz}$.

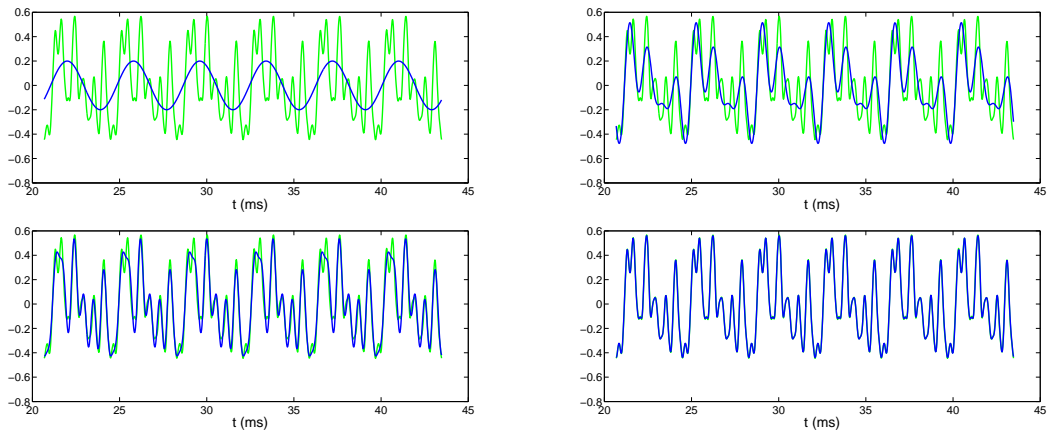


Figura 5: Primeiros termos da série (1) do sinal do violino (azul: série, verde: sinal original). Em cima, à esquerda: apenas a 1ª harmônica. Em cima, à direita: até a quarta harmônica ($k = 4$). Em baixo, à esquerda: até a sétima harmônica. Em baixo, à direita: até a 19ª harmônica.

2 Aplicação à resolução de circuitos elétricos

A série de Fourier e a TDF são usadas em diversas aplicações, mas vamos dar aqui apenas um exemplo, de uso na resolução de um circuito elétrico linear. Suponha que você coloque a onda triangular da Figura 3 na entrada do circuito da Figura 6, e que você queira saber o valor de $v_C(t)$ em regime permanente. Você pode resolver esse problema de diversas maneiras, usando equações diferenciais, transformada de Laplace, etc., no entanto, uma das formas mais simples é usar a série de Fourier.

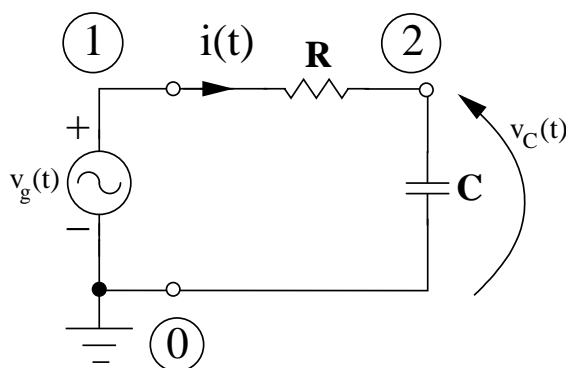


Figura 6: Circuito RC. $R = 500\Omega$, $C = 1\text{mF}$.

Simple? É, porque, como o circuito é linear (lembre-se do curso de Circuitos Elétricos [3, 4]), sabemos que se à entrada $v_{g1}(t)$ corresponder a saída $v_{c1}(t)$, e se à entrada $v_{g2}(t)$ corresponder a saída $v_{c2}(t)$, então a saída correspondente à entrada $v_{g1}(t) + v_{g2}(t)$ será $v_{c1}(t) + v_{c2}(t)$. Vamos aplicar isso à série da onda triangular. Chame

$$v_{g1}(t) = -\frac{8}{\pi^2} \cos(\omega_0 t), \quad v_{g3}(t) = -\frac{8}{9\pi^2} \cos(3\omega_0 t), \quad v_{g5}(t) = -\frac{8}{25\pi^2} \cos(5\omega_0 t), \quad \dots \quad (4)$$

Podemos achar a resposta do circuito a cada um desses sinais usando fasores:

$$\hat{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \hat{V}_g,$$

vem (usando $R = 500\Omega$, $C = 1\text{mF}$):

$$\hat{V}_{C1} = -\frac{1}{1 + j\omega_0 RC} \frac{8}{\pi^2} = 0,6375 e^{-j38,146^\circ}, \quad \hat{V}_{C3} = -\frac{1}{1 + j3\omega_0 RC} \frac{8}{9\pi^2} = 0,0352 e^{-j67,003^\circ}, \quad \dots$$

Assim, a série da tensão $v_C(t)$ fica

$$v_C(t) = 0,6375 \cos(\omega_0 t - 38,146^\circ) + 0,0352 \cos(3\omega_0 t - 67,003^\circ) + \dots \quad (5)$$

O resultado pode ser visto na Figura 7. Veja que com poucos harmônicos a aproximação já é muito boa.

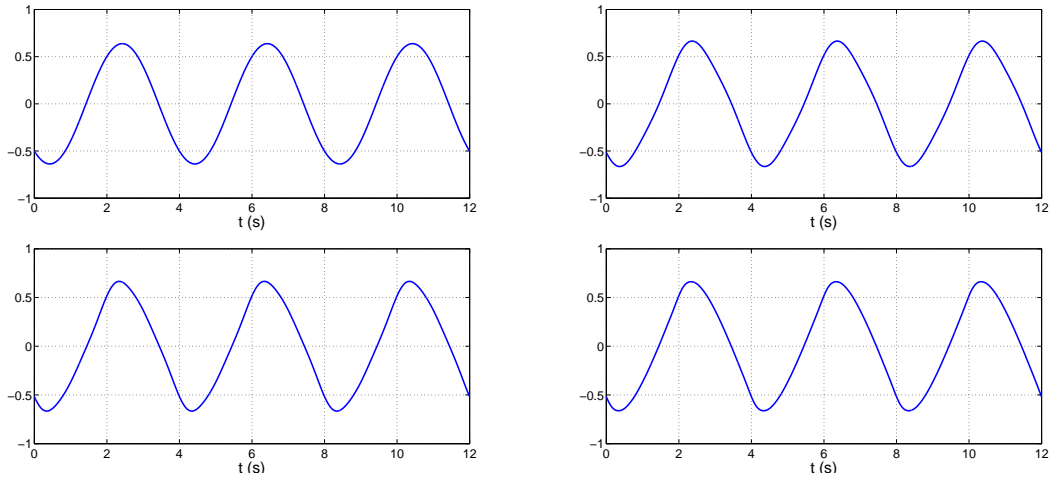


Figura 7: Primeiros termos da série de $v_C(t)$ com entrada triangular. Em cima, à esquerda: apenas a 1ª harmônica. Em cima, à direita: até a 3ª harmônica ($k = 3$). Em baixo, à esquerda: até a 5ª harmônica. Em baixo, à direita: até a 11ª harmônica.

Referências

- [1] V. H. Nascimento. Introdução à análise de Fourier: Sinais periódicos. Apostila da Disciplina PSI3214–Laboratório de Instrumentação Elétrica., 2015.
- [2] A. V. Oppenheim e A. S. Willsky. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, 1996.
- [3] L. Q. Orsini e D. Consonni. *Curso de circuitos elétricos, vol. 1*. Editora Edgard Blücher, 2002.
- [4] L. Q. Orsini e D. Consonni. *Curso de Circuitos Elétricos, vol. 2*. Editora Edgard Blücher, 2004.