UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP

PSI 3212 - LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

INTRODUÇÃO TEÓRICA - EXPERIÊNCIA 8

1º semestre de 2018

Profs. Inés Pereyra, Marcelo N.P. Carreño, Cinthia Itiki

Modelos de Bipolos Passivos

Esta experiência tem por objetivo determinar modelos com parâmetros constantes na frequência para representar bipolos passivos, especificamente indutores e capacitores reais.

Modelos

Começaremos por esclarecer o que significa "encontrar um modelo" ou "determinar um modelo" para um bipolo passivo, numa determinada faixa de frequências de operação.

Como já foi visto nas experiências anteriores, em regime permanente senoidal, um bipolo passivo é caracterizado por uma impedância $\mathbf{Z_B}(j\omega)$ que nada mais é do que uma função complexa da frequência angular ω. Para uma dada frequência ω, ela é obtida pela divisão entre os números complexos que representam os fasores da tensão $\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{B}$ e corrente $\hat{\mathbf{I}}_\mathbf{B}$ no bipolo nessa frequência. Lembremos que um fasor é caracterizado pelo seu módulo e fase, ou então, pelas suas partes real e imaginária. No caso de se calcular a impedância pelo quociente entre números complexos, é mais conveniente utilizar a representação pelo módulo e fase, ou seja, $\mathbf{Z_B}(j\omega) = Z_B e^{j\Phi_{Z_B}}$, $\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{B} = V_B\, e^{j\Phi_{V_B}}$ e $\hat{\mathbf{I}}_\mathbf{B} = I_B\, e^{j\Phi_{I_B}}$, na frequência ω. Os números e funções complexas são representados nesta apostila por letras em negrito $\mathbf{Z_B}$, $\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{I}}_\mathbf{B}$. O módulo da impedância e as amplitudes de pico dos fasores são números reais positivos denotados por letras em itálico: Z_B, V_B, I_B. Nessa notação, o módulo de $\mathbf{Z_B}(j\omega)$ será dado por

$$Z_B = V_B / I_B \tag{1}$$

e a fase da impedância por

$$\Phi_{Z_B} = \Phi_{V_B} - \Phi_{I_B} \tag{2}$$

Analisar o comportamento do bipolo passivo significa analisar como varia sua impedância (ou seja seu módulo e sua fase) na faixa de frequências de interesse. Conhecida a impedância, "encontrar um modelo" para o bipolo significa encontrar uma associação de componentes passivos (resistores, indutores e capacitores) **ideais** cuja impedância equivalente apresente o mesmo comportamento que o bipolo, na faixa de frequências analisada.

Análise do comportamento do bipolo passivo

Conforme visto nas experiências anteriores, para se obter a impedância de um bipolo numa determinada frequência é necessário conhecer a tensão sobre o bipolo e a corrente que por ele passa, nessa frequência específica. Isto pode ser feito ligando o bipolo em série com um resistor *shunt* (para medir a corrente) e utilizando um gerador de funções para aplicar um sinal senoidal de frequência variável na entrada, conforme ilustrado no circuito da figura 1.

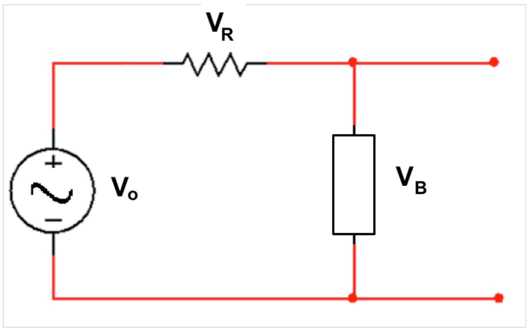

Figura 1. Circuito para caracterização do bipolo passivo real.

Assim teremos que o módulo da impedância do bipolo é dado por

$$Z_B = V_B / (V_R / R) \tag{3}$$

e a fase da impedância do bipolo Φ_{Z_B} será dada pela defasagem (diferença de fases) entre a tensão no bipolo Φ_{V_B} e na corrente no circuito Φ_{I_B}. Esta, por sua vez, está em fase com a tensão V_R. Logo, tem-se que a fase da impedância é dada por

$$\Phi_{Z_B} = \Phi_{V_B} - \Phi_{V_R} \tag{4}$$

Note que o módulo da impedância é uma função da frequência. Dependendo da natureza do bipolo, o módulo da impedância pode apresentar máximos ou mínimos, mas também pode ser simplesmente uma função crescente ou decrescente, na faixa de frequências analisada. A fase, por sua vez, poderá ser sempre negativa, sempre positiva, ou então, passar de negativa (em frequências baixas) para positiva (em frequências altas) ou vice-versa. Para melhor compreender esses comportamentos, consideremos o exemplo ilustrado na figura 2. Note que, nessa figura, o módulo da impedância é decrescente nas baixas frequências, apresenta um mínimo em médias frequências e cresce linearmente nas altas frequências.

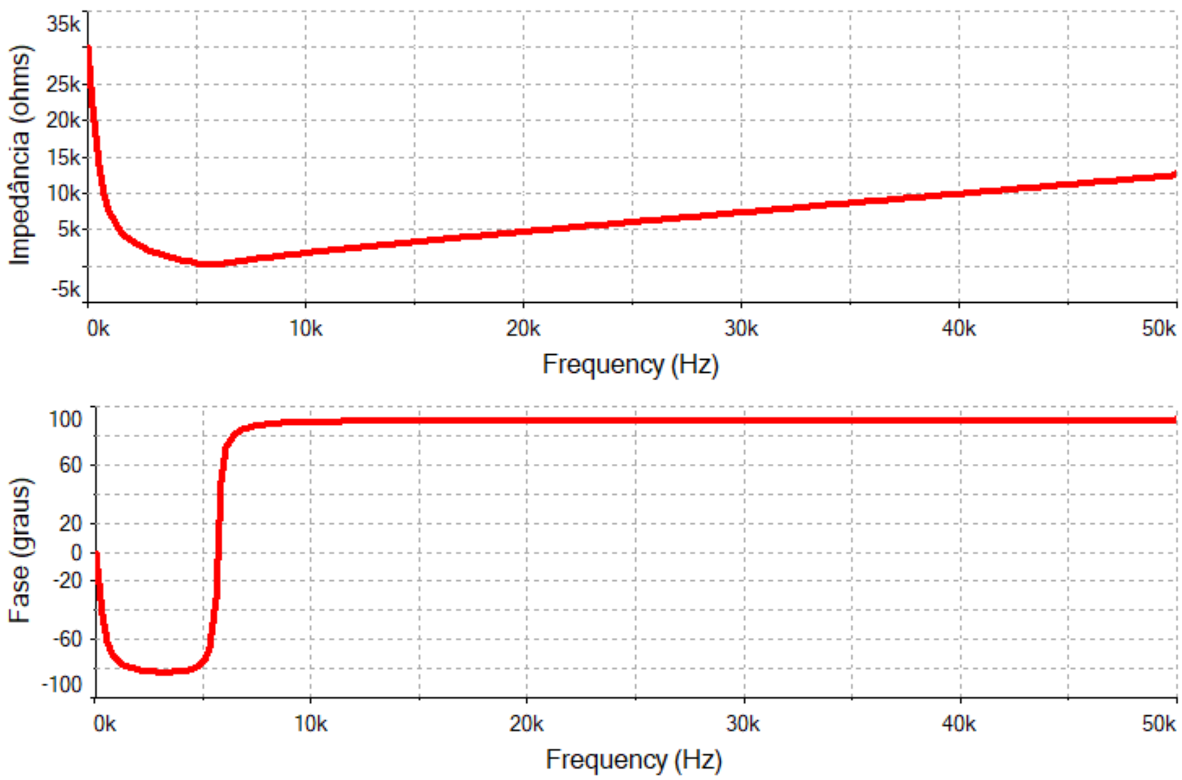

Figura 2. Exemplo de impedância de um bipolo passivo real, dependente da frequência.

Uma vez obtidas as curvas de fase e módulo da impedância do bipolo, elas devem ser comparadas com as curvas de fase e módulo das impedâncias dos componentes passivos ideais. Dessa forma, descobre-se qual é o componente passivo ideal fundamental (ou dominante), que descreve o comportamento do bipolo em cada faixa de frequências. Assim é possível descobrir qual seria a associação de componentes que melhor representaria o bipolo. É necessário, portanto, revisar o comportamento com a frequência dos componentes passivos ideais.

Comportamento dos componentes passivos ideais com a frequência

Resistor ideal

Um **resistor ideal** de resistência constante apresenta uma impedância real independente da frequência. Assim, o módulo da sua impedância será constante e igual a *R* para todas frequências. Semelhantemente, sua fase será constante e nula para todas frequências. A figura 3 ilustra o módulo Z_R e a fase Φ_R da impedância de um resistor ideal de 1,5kΩ. A frequência em hertz equivale a $f=\omega/(2\pi)$ [Hz].

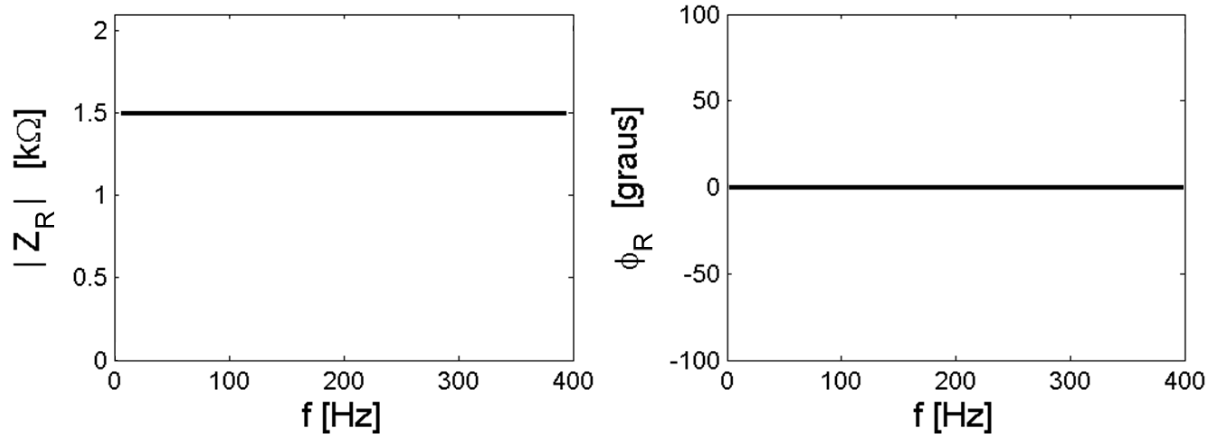

Figura 3. Módulo Z_R e fase Φ_R da impedância de um resistor ideal, de resistência *R* igual a 1,5 kΩ, em função da frequência

Indutor ideal

A figura 4 mostra o comportamento do módulo e da fase da impedância de um **indutor ideal** de indutância L constante. Sabe-se que o módulo da impedância é dado por uma função linear na frequência $Z_L(\omega) = \omega\, L$ ohms e a fase é a constante positiva $\phi_{Z_L}(\omega) = +90^{\circ}$, indicando que a tensão no indutor está adiantada da corrente.

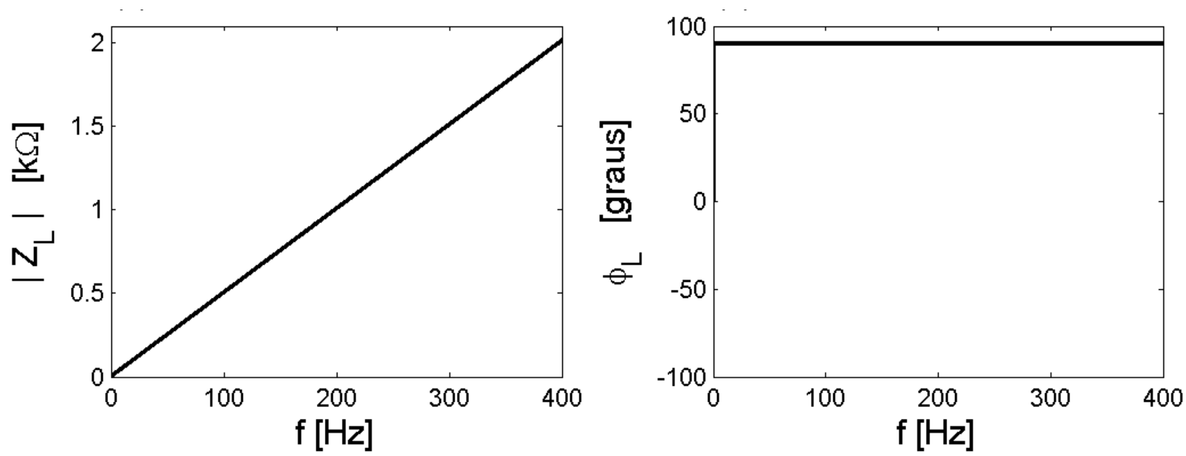

Figura 4. O indutor ideal com indutância constante L tem impedância com **(a)** módulo linear $Z_L(\omega) = \omega\, L$ e **(b)** fase constante positiva $\phi_{Z_L}(\omega) = +90^{\circ}$ entre tensão e corrente.

Capacitor ideal

A figura 5 mostra o comportamento do módulo e da fase da impedância de um **capacitor ideal** de capacitância C constante. Sabe-se que o módulo da impedância é inversamente proporcional à frequência $Z_C(\omega) = 1/(\omega C)$ ohms e a fase é a constante negativa $\phi_{Z_C}(\omega) = -90^{\circ}$. O módulo da impedância decresce de forma inversamente proporcional à frequência (conforme ilustrado na figura 5.a) e a fase é negativa e igual a -90 graus (na figura 5.b). Isso indica que a tensão está atrasada de 90 graus em relação à corrente.

Para facilitar a visualização, é interessante desenhar o comportamento linear da admitância (inverso da impedância) do capacitor ideal. As figuras 5.c e 5.d ilustram respectivamente que o módulo da admitância cresce linearmente com a frequência $Y_C(\omega) = \omega C$ e a fase da admitância é $\phi_{Z_C}(\omega) = +90^{\circ}$, cujo sinal positivo indica que a corrente está adiantada da tensão.

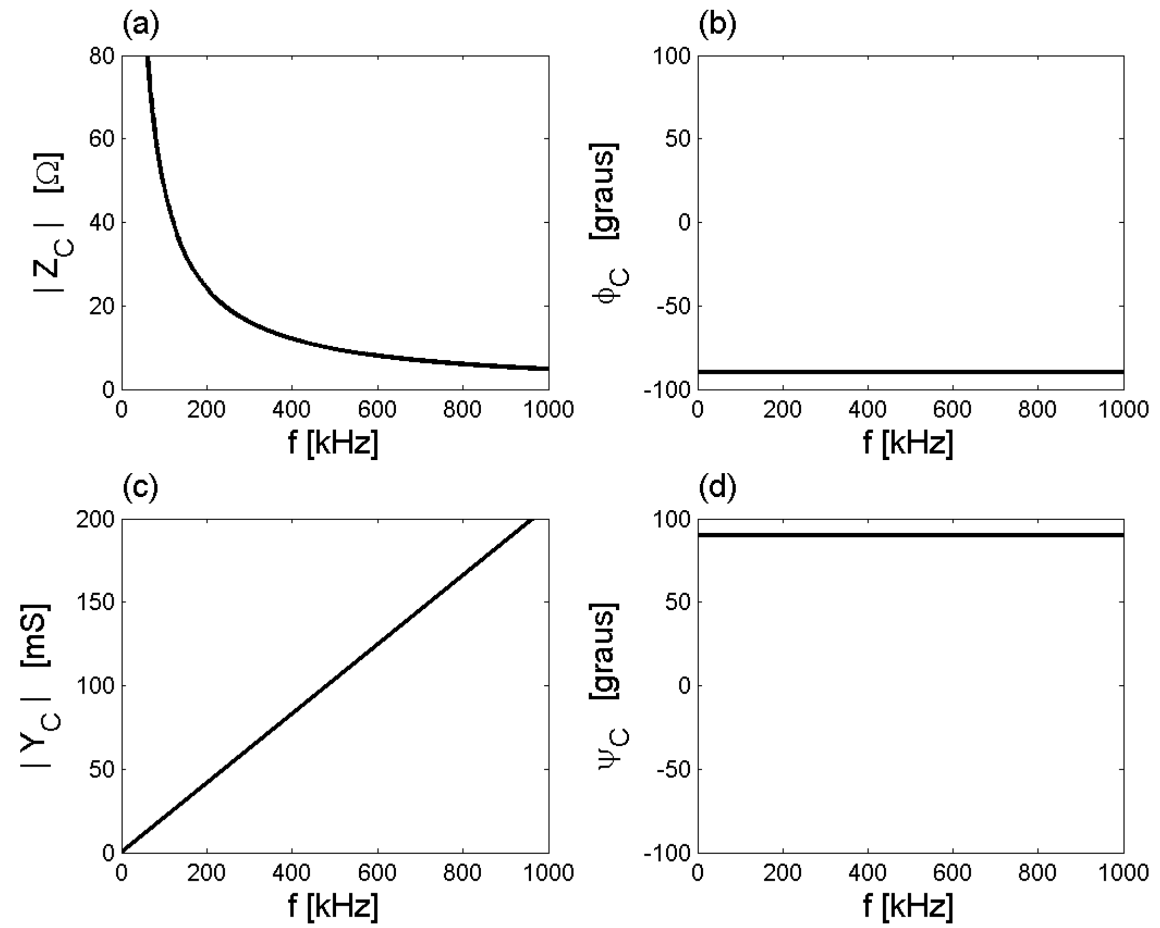

Figura 5. O capacitor ideal com capacitância constante C tem impedância com **(a)** módulo $Z_C(\omega) = 1/(\omega\, C)$ e **(b)** fase negativa constante $\phi_{Z_C}(\omega) = -90°$ entre tensão e corrente. Alternativamente, a admitância tem **(c)** módulo linear $Y_C(\omega) = \omega\, C$ e **(d)** fase positiva constante $\phi_{Y_C}(\omega) = +90°$ entre corrente e tensão.

Obtenção dos modelos para alguns bipolos particulares

Caso 1

Agora que já relembramos o comportamento dos componentes passivos ideais com a frequência, podemos determinar o modelo para alguns bipolos reais dos quais conhecemos o seu comportamento numa determinada faixa de frequência.

Consideremos a figura 6, que mostra o gráfico do módulo e da fase da impedância do bipolo real, na faixa de frequências em que queremos obter um modelo.

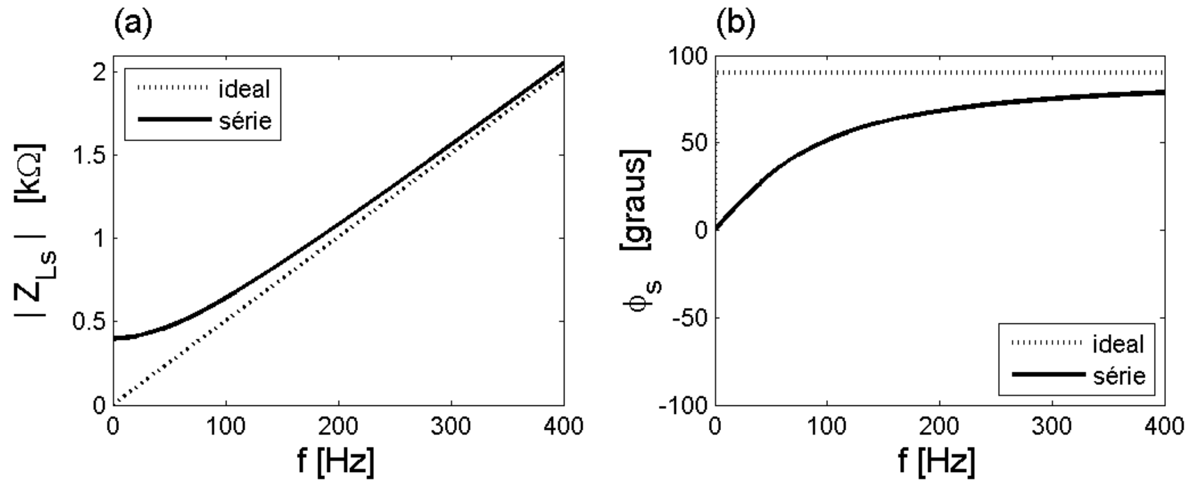

Figura 6. Um bipolo real representado pelo **(a)** módulo e **(b)** fase da impedância.

Podemos observar que, para baixas frequências (até aproximadamente 20 Hz), o módulo da impedância do bipolo real permanece praticamente constante e a fase se mantém menor que 10^{o}. Ou seja nessa faixa de frequências o bipolo se comporta aproximadamente como um resistor de aproximadamente 400 Ω. Por outro lado para frequências altas (acima de 200Hz) o módulo aumenta linearmente e a fase permanece na faixa de 80 a 90 graus. Isso significa que, para essas frequências acima de 200 Hz, o comportamento do bipolo real é praticamente igual ao de um indutor ideal com indutância *L* dada pela inclinação da reta dividida por 2π radianos, ou seja, de 800mH. Observa-se que $L = Z_B / \omega = Z_B / 2\pi f = (Z_B / f)/(2\pi)$.

Assim, considerando os dois comportamentos observados e destacados acima, poderíamos dizer que o bipolo real se comporta como um resistor ideal de 400 Ω em série com um indutor ideal de 800mH. (Observe que se o bipolo real fosse representado por um resistor ideal em paralelo com um indutor, ideal o módulo da impedância variaria linearmente em frequências baixas e seria aproximadamente constante em frequências altas).

Em outras palavras, podemos dizer que um resistor ideal de 400 Ω em série com um indutor ideal de 800mH representa muito bem o nosso bipolo real na faixa de frequências considerada.

Caso 2

Como segundo exemplo consideremos o bipolo cujo módulo e fase da impedância variam com a frequência, conforme mostrado na figura 2. Vemos que, para frequência nula, o módulo da impedância é 30kΩ e a **fase nula**, ou seja o comportamento é o de um resistor de 30kΩ. Para frequências até 5kHz, o módulo da impedância decresce com a frequência e a **fase negativa** decresce até atingir aproximadamente -90^{o}. Ou seja, para frequências até 5kHz, o comportamento do bipolo é capacitivo. Já para frequências maiores ainda o módulo da impedância atinge um mínimo e começa a crescer. Por outro lado, a fase se faz menos negativa e para a frequência na que o módulo apresenta o mínimo se anula e passa a ter valores crescentes positivos. Para frequências acima de 7kHz, o módulo da impedância cresce linearmente e a **fase positiva** é aproximadamente igual a +90 graus. Portanto, para frequências suficientemente altas o comportamento do bipolo é indutivo.

Qual é o circuito com resistores, capacitores e indutores que apresenta esse comportamento? Um bom exercício é que você tente descobrir sozinho e só depois de pensar nisso você mesmo, continue lendo na próxima página. Desenhe o modelo sugerido por você no espaço abaixo.

Considere o circuito com resistores, capacitores e indutores mostrado na figura 7 e verifique que ele representa bem esse comportamento numa faixa ampla de frequências. Para frequência nula, o capacitor ideal C_P é um aberto e o indutor ideal L é um curto-circuito. Logo o bipolo será um resistor ideal de valor (R_P+ R_L). Para frequências baixas, o módulo da impedância do capacitor Z_C vai começar a diminuir. Em frequências intermediárias, o capacitor passará a ter uma impedância menor que R_P, em módulo. Logo, o conjunto paralelo $C_P//R_P$ será dominado pelo capacitor e o comportamento será capacitivo. Semelhantemente, o módulo da impedância Z_L aumenta com a frequência, até que Z_L se faça da mesma ordem que Z_C. Quando Z_L=Z_C teremos o mínimo do módulo da impedância, que caracteriza a auto-ressonância do bipolo real. Para frequências acima da frequência de auto-ressonância, o bipolo real terá comportamento indutivo. Para frequências muito altas, o capacitor C_P vira um curto, o bipolo se comportará aproximadamente como um indutor ideal, já que $R_L \ll \omega L$.

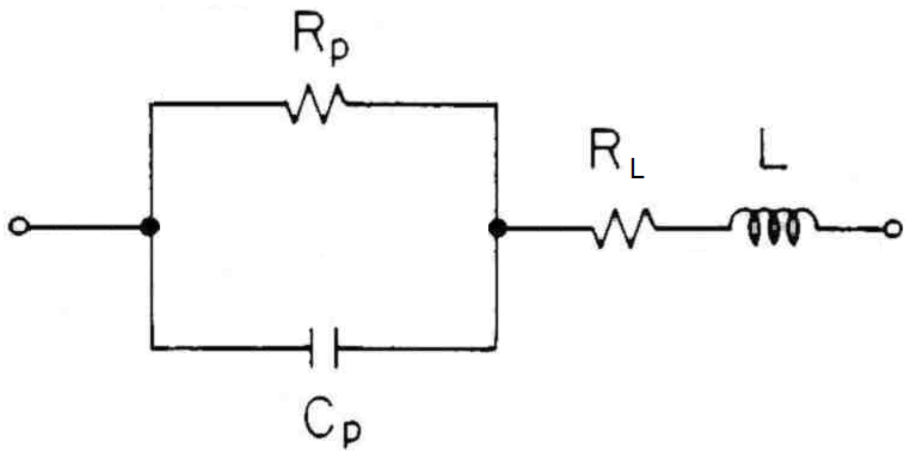

Figura 7. Modelo RCRL para o bipolo real cujo módulo e fase da impedância estão caracterizados na figura 2.

Por último vejamos como obter os valores dos componentes do modelo, isto é o capacitor C_p, o resistor em paralelo R_p, o resistor em série R_L e o indutor L. Como já vimos anteriormente, para frequência nula, tem-se

$$R_P + R_L = Z_B(0) \tag{5}$$

Nas frequências baixas, temos que o bipolo é dominado pelo capacitor

$$C_P = 1 / (\omega_{baixas} \; Z_B(\omega_{baixas})) \tag{6}$$

Na auto-ressonância, a impedância indutiva e capacitiva estão em contra-fase, de forma que a fase da impedância se anula. Obtém-se que

$$R_L + L/(R_P \, C_P) = Z_B(\omega_R), \tag{7}$$

em que ω_R é a frequência angular de auto-ressonância. Finalmente para altas frequências, quando a impedância do bipolo apresenta comportamento linearmente crescente, teremos

$$L = Z_B(\omega_{altas}) / \omega_{altas}. \tag{8}$$

Assim obtemos todos os valores de C_p, R_p , R_L e L e completamos o cálculo dos componentes do modelo.