

Regime permanente senoidal e Fasores

Flávio R. M. Pavan, 2018

Revisão técnica: Magno T. M. Silva e Flávio A. M. Cipparrone

1 Introdução

O estudo de circuitos elétricos em regime permanente senoidal (RPS) é muito importante do ponto de vista prático. Grande parte dos sistemas de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica operam em regime senoidal, pelo menos de maneira aproximada. Além disso, entender o comportamento senoidal de um circuito elétrico permite prever o comportamento de circuitos com excitações não senoidais*.

Nesta apostila, inicialmente é feita uma breve explicação sobre a operação em regime permanente senoidal de circuitos elétricos. Posteriormente, uma ferramenta importante que facilita a análise de circuitos em RPS, conhecida como fasor, é apresentada.

2 Regime permanente senoidal (RPS)

Suponha que um circuito elétrico linear qualquer é excitado por uma tensão ou corrente cossenoidal. Quando todas as correntes e tensões desse circuito puderem ser descritas somente por funções cossenoidais, na mesma frequência da excitação, diz-se que o circuito atingiu o regime permanente senoidal (RPS).

Em geral, esse regime é atingido após a passagem de um tempo suficiente para que as respostas transitórias do circuito desapareçam. Considere, como exemplo inicial, o circuito R, L série alimentado por um gerador ideal de tensão mostrado na Figura 1.

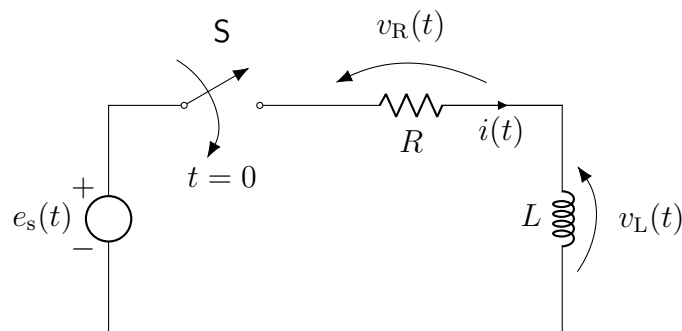


Figura 1: Circuito R, L série alimentado por um gerador ideal de tensão.

*A explicação teórica para isso é estudada no curso de Sistemas e Sinais.

No instante $t = 0$, a chave S é acionada e o gerador ideal de tensão é ligado ao circuito. Ao se escrever a segunda lei de Kirchhoff para esse circuito, considerando-se $t \geq 0$, obtém-se

$$v_L(t) + v_R(t) = e_s(t). \quad (1)$$

Aplicando-se as relações constitutivas do indutor e do resistor (lei de Ohm), chega-se à equação diferencial que descreve a corrente $i(t)$ do circuito para $t \geq 0$, ou seja,

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t). \quad (2)$$

Vamos considerar que a excitação é cossenoidal de frequência angular ω , ou seja,

$$e_s(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Nesse caso, a Equação (2) pode ser reescrita como

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

A fim de determinar a expressão da corrente $i(t)$ no intervalo $t \geq t_0$, seria necessário resolver a equação diferencial (3) usando ferramentas abordadas em cursos de Cálculo. Isso será feito mais tarde no curso de Circuitos Elétricos I, a começar pelo estudo de circuitos de 1ª ordem. Aqui, somente indicaremos o resultado. A solução $i(t)$ da Equação (3) é dada por

$$i(t) = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\varphi - \theta) e^{-tR/L} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi - \theta), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

em que $\theta = \arctg(\omega L/R)$. O primeiro termo da solução tende a 0 a medida que $t \rightarrow +\infty$. Assim, considerando que passou tempo suficiente para que o primeiro termo seja desprezível em relação ao segundo, a corrente $i(t)$ pode ser reescrita como

$$i(t) \approx i_p(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi - \theta). \quad (5)$$

Portanto, para $t \gg 0$, a corrente $i(t)$ é puramente cossenoidal e possui a mesma frequência angular ω da excitação $e_s(t)$. Além disso, as tensões $v_R(t)$ e $v_L(t)$ também serão puramente cossenoidais e de frequência angular ω para $t \gg 0$, pois são proporcionais, respectivamente, à corrente $i(t)$ e à derivada dessa corrente. Conclui-se que, para $t \gg 0$, todas as grandezas do circuito da Figura 1 são cossenoidais e de frequência angular ω – dizemos, portanto, que nesse caso o circuito elétrico opera em regime permanente senoidal.

Exemplo 1 – Regime permanente senoidal no circuito R, L

Considere o circuito da Figura 1 com $E_m = 100 \text{ V}$, $\varphi = 90^\circ$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $R = 1 \Omega$ e $L = 1 \text{ H}$. Substituindo os valores em (4), a expressão para a corrente $i(t)$ resulta

$$i(t) \approx -9,9901e^{-t} + 9,9504 \cos(10t + 5,7106^\circ), \quad t \geq 0 \quad (\text{A, s}). \quad (6)$$

Note que $i(0) = -9,9901 + 9,9504 \cos(5,7106^\circ) = 0$ como era de se esperar, pois a chave fecha em $t = 0$. Para $t \gg 0$, a corrente $i(t)$ pode ser reescrita como

$$i(t) \approx i_p(t) = 9,9504 \cos(10t + 5,7106^\circ). \quad (7)$$

Na Figura 2 são mostrados gráficos das correntes $i(t)$ e $i_p(t)$ em função de t . Nesse caso, para $t > 4$ s, $i_p(t)$ é muito próxima de $i(t)$. Pode-se dizer que, para $t > 4$ s, o circuito opera em RPS.

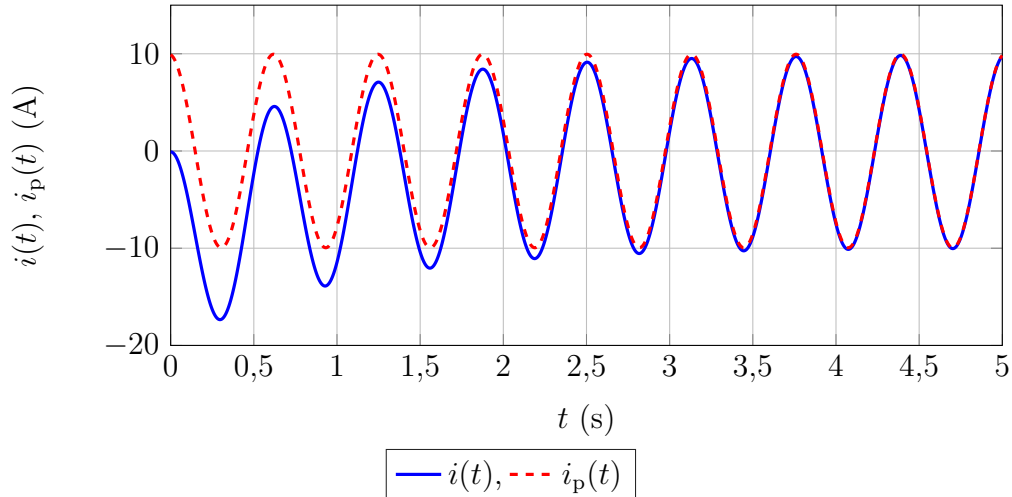


Figura 2: Gráficos das correntes $i(t)$ e $i_p(t)$, para o circuito da Figura 1, em função do tempo.

No estudo de circuitos em RPS, estamos interessados em determinar as correntes e tensões de um circuito elétrico linear excitado por fonte cossenoidal para $t \rightarrow +\infty$, ou seja, supondo que o circuito opera em regime permanente senoidal[†]. Por isso, a chave **S** do circuito da Figura 1 é usualmente omitida nesse contexto, já que supomos que as fontes estão ligadas no circuito há muito tempo e o RPS foi devidamente atingido.

3 Representação fasorial

Para circuitos em RPS, sabemos que todas as tensões e correntes do circuito são cossenoidais e de frequência angular igual àquela da excitação. Logo, para determinar essas grandezas elétricas de um circuito em RPS, basta descobrir as amplitudes e fases de cada uma delas. Esse procedimento é facilitado com o uso de fasores. Os fasores são números complexos que representam funções cossenoidais, como as tensões e correntes de um circuito em RPS. Uma função cossenoidal $f(t)$ é escrita como

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (8)$$

em que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular e T é o período do cosseno, $F_m > 0$ é a amplitude e φ é a fase, usualmente dada em graus no intervalo[‡] $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$. Lembre-se que essa $f(t)$

[†]Alguns circuitos não alcançam o RPS, mesmo com $t \rightarrow +\infty$. Esses circuitos não são abordados nessa apostila. As condições para um circuito elétrico alcançar o regime permanente senoidal envolvem a compreensão do conceito de estabilidade assintótica, que é estudado durante o curso de Circuitos Elétricos II.

[‡]Também é usual considerar a fase no intervalo $-180^\circ \leq \varphi < 180^\circ$.

pode também ser escrita como[§]

$$f(t) = \operatorname{Re} \left\{ F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right\}, \quad (9)$$

sendo $j^2 = -1$.

O número complexo $F_m e^{j\varphi}$, que aparece na Equação (9), contém informação sobre a amplitude e a fase de $f(t)$. Embora esse número complexo não tenha informação sobre a frequência ω , sabemos que em RPS essa frequência é dada pela frequência da excitação, conhecida na maioria dos casos, e é igual para todas as tensões e correntes do circuito. Portanto, a fim de facilitar a resolução do circuito elétrico, pode-se trocar momentaneamente a função $f(t)$ pelo número complexo $F_m e^{j\varphi}$, que contém todas as informações relevantes para se representar $f(t)$. Esse número complexo é o fasor associado à função $f(t)$, denotado por \hat{F} e definido como

$$\hat{F} \triangleq F_m e^{j\varphi} = F_m \underline{\varphi}. \quad (10)$$

A determinação do fasor \hat{F} a partir de $f(t)$ é direta, desde que $f(t)$ esteja na forma da Equação (8). Embora o fasor \hat{F} não dependa do tempo t , para transformá-lo em função cossenoidal, basta lembrar que o fasor dado pela Equação (10) corresponde ao cosseno da Equação (8).

O procedimento usual para a resolução de um circuito elétrico em RPS com fasores é:

- inicialmente, representam-se todas as tensões e correntes de interesse do circuito como fasores;
- depois, resolve-se o circuito utilizando-se as relações constitutivas fasoriais para encontrar os fasores das grandezas de interesse;
- finalmente, é preciso converter esses fasores para suas correspondentes funções cossenoidais.

O uso de fasores é conveniente pois permite trocar uma função cossenoidal por um número complexo durante a resolução de um circuito elétrico em RPS. As leis de Kirchhoff continuam valendo quando se utilizam fasores e as relações constitutivas para os bipolos elementares são consideravelmente simplificadas ao se lançar mão da representação fasorial. Isso é visto com mais detalhe a seguir.

4 Relações fasoriais nos bipolos elementares

Inicialmente, considera-se que a tensão de um bipolo elementar é dada por

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (V, s), \quad (11)$$

[§]Para se convencer disso, basta lembrar da fórmula de Euler para os números complexos,

$$e^{jx} = \cos(x) + j \operatorname{sen}(x).$$

sendo $V_m > 0$ a amplitude do cosseno e φ a sua fase em graus. O fasor dessa tensão, segundo a definição (10), é dado por

$$\widehat{V} = V_m e^{j\varphi}. \quad (12)$$

A seguir, vamos encontrar a relação entre esse fasor de tensão e o fasor de corrente \widehat{I} em cada um dos bipolos elementares ideais.

4.1 Resistor ideal

Considere um resistor ideal de resistência R (ou condutância G) com a tensão $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ na convenção do receptor, como mostrado na Figura 3.

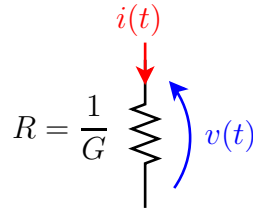


Figura 3: Resistor ideal na convenção do receptor.

A corrente $i(t)$ no resistor, de acordo com a lei de Ohm, é dada por

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \varphi). \quad (13)$$

Portanto, o fasor correspondente à corrente $i(t)$ vale

$$\widehat{I} = \frac{V_m}{R} e^{j\varphi} = \frac{\widehat{V}}{R} = G\widehat{V}. \quad (14)$$

Calculando-se o módulo dos dois lados de (14), tem-se

$$|\widehat{I}| = |G\widehat{V}| = G|\widehat{V}|, \quad (15)$$

ou seja, o módulo de \widehat{I} é igual ao módulo de \widehat{V} multiplicado por G . Ao tomar a fase dos dois lados de (14), resulta

$$\angle \widehat{I} = \angle \{G\widehat{V}\} = \angle \widehat{V}. \quad (16)$$

Logo, para o resistor na convenção do receptor, a **tensão** e a **corrente** estão **em fase**. Na Figura 4(a) é mostrado o diagrama de fasores para \widehat{V} e \widehat{I} , e na Figura 4(b) são mostradas as formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ ao longo do tempo.

4.2 Capacitor ideal

Considere um capacitor ideal de capacitância C com a tensão $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ na convenção do receptor, como mostrado na Figura 5.

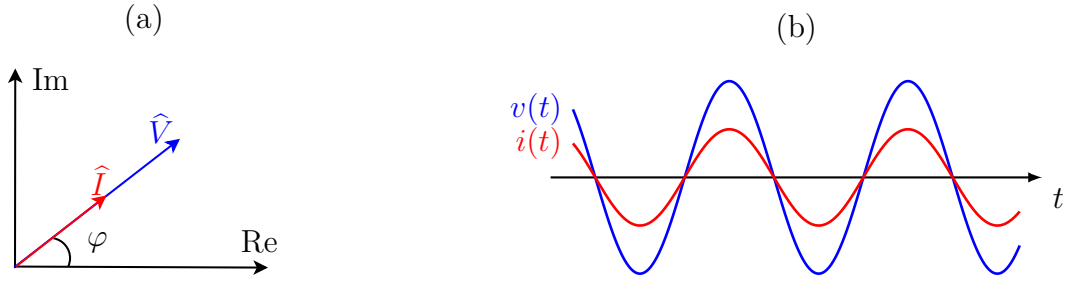


Figura 4: (a) Diagrama de fasores para \hat{V} e \hat{I} do resistor na convenção do receptor. (b) Formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ ao longo do tempo.

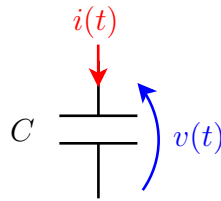


Figura 5: Capacitor ideal na convenção do receptor.

A corrente $i(t)$ no capacitor, de acordo com a sua relação constitutiva, é dada por

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -\omega C V_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega C V_m \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ). \quad (17)$$

Portanto, o fasor correspondente à corrente $i(t)$ vale

$$\hat{I} = \omega C V_m e^{j\varphi} e^{j90^\circ} = j\omega C \hat{V}. \quad (18)$$

Calculando-se o módulo dos dois lados de (18), tem-se

$$|\hat{I}| = |j\omega C \hat{V}| = \omega C |\hat{V}|, \quad (19)$$

ou seja, o módulo de \hat{I} é igual ao módulo de \hat{V} multiplicado pelo fator ωC , dependente da frequência. Ao tomar a fase dos dois lados de (18), resulta

$$\angle \hat{I} = \angle \{j\omega C \hat{V}\} = \angle \hat{V} + 90^\circ \Rightarrow \angle \hat{V} = \angle \hat{I} - 90^\circ. \quad (20)$$

Logo, para o capacitor na convenção do receptor, a **tensão** está **atrasada** de 90° em relação à **corrente**. Na Figura 6(a) é mostrado o diagrama de fasores para \hat{V} e \hat{I} , e na Figura 6(b) são mostradas as formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ ao longo do tempo.

4.3 Indutor ideal

Considere um indutor ideal de indutância L com a tensão $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ na convenção do receptor, como mostrado na Figura 7.

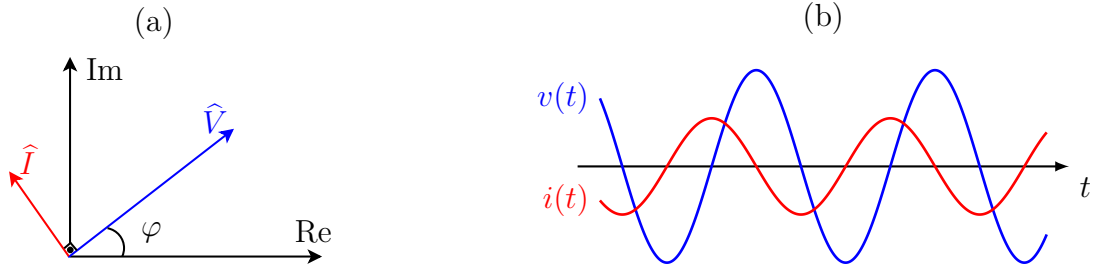


Figura 6: (a) Diagrama de fasores para \hat{V} e \hat{I} do capacitor na convenção do receptor. (b) Formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ ao longo do tempo.

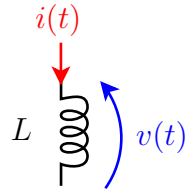


Figura 7: Indutor ideal na convenção do receptor.

A corrente $i(t)$ no indutor, de acordo com a sua relação constitutiva, é dada por[¶]

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(\tau) d\tau = \frac{V_m}{\omega L} \text{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ). \quad (21)$$

Portanto, o fasor correspondente à corrente $i(t)$ vale

$$\hat{I} = \frac{1}{\omega L} V_m e^{j\varphi} e^{-j90^\circ} = \frac{1}{j\omega L} \hat{V}. \quad (22)$$

Calculando-se o módulo dos dois lados de (22), tem-se

$$|\hat{I}| = \left| \frac{1}{j\omega L} \hat{V} \right| = \frac{1}{\omega L} |\hat{V}|, \quad (23)$$

ou seja, o módulo de \hat{I} é igual ao módulo de \hat{V} multiplicado pelo fator $\frac{1}{\omega L}$, dependente da frequência. Ao tomar a fase dos dois lados de (22), resulta

$$\angle \hat{I} = \angle \left\{ \frac{1}{j\omega L} \hat{V} \right\} = \angle \hat{V} - 90^\circ \Rightarrow \angle \hat{V} = \angle \hat{I} + 90^\circ. \quad (24)$$

Logo, para o indutor na convenção do receptor, a **tensão** está **adiantada** de 90° em relação à **corrente**. Na Figura 8(a) é mostrado o diagrama de fasores para \hat{V} e \hat{I} , e na Figura 8(b) são mostradas as formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ ao longo do tempo.

[¶]Na relação constitutiva, utiliza-se a integral indefinida e desconsidera-se a condição inicial pois a análise do circuito é feita em regime permanente senoidal. Portanto, as condições iniciais são irrelevantes.

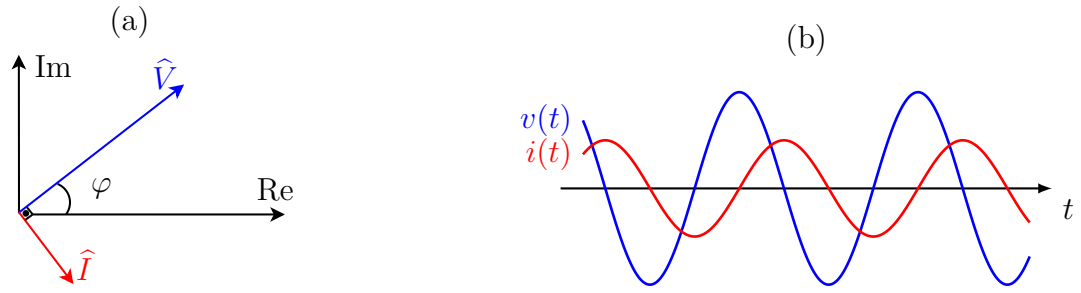


Figura 8: (a) Diagrama de fasores para \hat{V} e \hat{I} do indutor na convenção do receptor. (b) Formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ ao longo do tempo.

As relações fasoriais obtidas para o resistor, o capacitor e o indutor ideais são resumidas na Tabela 1. Note que, nessas relações, considera-se que o bipolo está na convenção do receptor.

Tabela 1: Relações fasoriais para bipolos elementares na convenção do receptor.

Bipolo	Relações fasoriais	
Resistor	$\hat{V} = R\hat{I}$	$\hat{I} = G\hat{V}$
Capacitor	$\hat{V} = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}$	$\hat{I} = j\omega C\hat{V}$
Indutor	$\hat{V} = j\omega L\hat{I}$	$\hat{I} = \frac{1}{j\omega L}\hat{V}$

5 Impedância e admitância

Nessa seção, as relações fasoriais encontradas na Seção 4 são reescritas de uma forma mais geral, também conhecida como lei de Ohm em corrente alternada. Considere um bipolo elementar qualquer na convenção do receptor, em RPS, conforme mostrado na Figura 9.

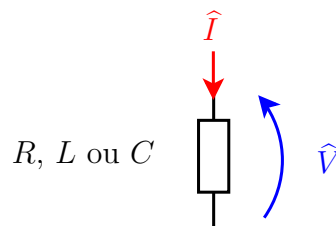


Figura 9: Bipolo elementar R , L ou C na convenção do receptor.

A partir das Equações (14), (18) e (22), observa-se que as relações entre tensão e corrente para os bipolos elementares podem ser escritas na forma geral

$$\hat{V} = Z(j\omega)\hat{I}, \quad (25)$$

em que $Z(j\omega)$ é chamada de **impedância** do bipolo. A Equação (25) é conhecida como a lei de Ohm em corrente alternada. Observe que $Z(j\omega)$ varia com a frequência e depende do bipolo considerado. Podemos também representar as relações entre tensão e corrente como

$$\hat{I} = Y(j\omega)\hat{V}, \quad (26)$$

em que $Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}$ é chamada de **admitância** do bipolo. Novamente, observe que $Y(j\omega)$ varia com a frequência e depende do bipolo considerado. Na Tabela 2, são resumidos os valores de impedância e admitância dos bipolos elementares na convenção do receptor.

Tabela 2: Valores de impedância e admitância dos bipolos elementares na convenção do receptor.

Bipolo	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$	Defasagem entre tensão e corrente
Resistor	R	$G = \frac{1}{R}$	tensão e corrente em fase
Capacitor	$\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$	$j\omega C$	tensão atrasada de 90° em relação à corrente
Indutor	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$	tensão adiantada de 90° em relação à corrente

No caso de um bipolo qualquer, obtido, por exemplo, a partir da associação de bipolos elementares, a impedância pode ser colocada na forma geral

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega), \quad (27)$$

em que $R(\omega)$ é o componente resistivo ou dissipativo da impedância e $X(\omega)$ é o componente reativo da impedância ou reatância. A admitância desse bipolo pode ser obtida invertendo-se Equação (27), resultando em

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)} \\ &= \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)} \left[\frac{R(\omega) - jX(\omega)}{R(\omega) - jX(\omega)} \right] \\ &= \frac{R(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} - j \frac{X(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \end{aligned} \quad (28)$$

$$= G(\omega) + jB(\omega), \quad (29)$$

em que $G(\omega)$ é o componente condutivo da admitância e $B(\omega)$ é denominada susceptância.

Exemplo 2 – Cálculo de impedância e admitância de um bipolo R, C

Considere um bipolo constituído de um resistor ideal de resistência R em série com um capacitor ideal de capacitância C , em RPS de frequência ω . Adota-se convenção do receptor para o bipolo, conforme mostrado na Figura 10.

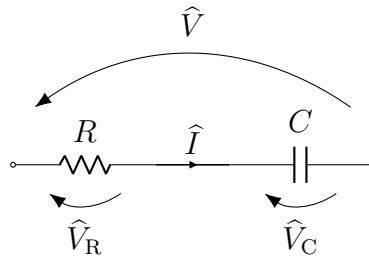


Figura 10

A tensão \hat{V} pode ser escrita como

$$\hat{V} = \hat{V}_R + \hat{V}_C. \quad (30)$$

Utilizando-se as relações da Tabela 2 para as tensões \hat{V}_R e \hat{V}_C , resulta

$$\hat{V} = R\hat{I} + \frac{1}{j\omega C}\hat{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I}. \quad (31)$$

A impedância do bipolo na convenção do receptor é dada por

$$Z(j\omega) = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}. \quad (32)$$

Portanto, o bipolo considerado possui componente resistiva da impedância igual a R e reatância $-\frac{1}{\omega C}$. A admitância do bipolo pode ser calculada invertendo-se a impedância (32), resultando em

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega C}{\omega RC - j} \\ &= \frac{\omega C}{\omega RC - j} \left(\frac{\omega RC + j}{\omega RC + j} \right) \\ &= \frac{\omega^2 RC^2}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} + j\frac{\omega C}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Sendo assim, o bipolo considerado possui componente condutiva da admitância igual a $\frac{\omega^2 RC^2}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$ e susceptância igual a $\frac{\omega C}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$.

Referências Bibliográficas

ORSINI, L. Q.; CONSONNI, D. Curso de Circuitos Elétricos, volumes 1 e 2. Segunda edição. Edgard Blücher, 2002.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. Electric Circuits. Décima edição. Pearson, 2014.