Recuperação, 16/12/2019, Cálculo II, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: ____ Número USP: ____________

1) Resolva o problema de valor inicial $y´´(x) - 2y´(x) + 4y(x) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 0$, $y´\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 1$.

Solução:

Proponha uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx} \tag{1}$$

para a equação diferencial:

$$y´´(x) - 2y´(x) + 4y(x) = 0. \tag{2}$$

Onde r é um parâmetro a ser determinado. Derivando duas vezes (1) e substituindo em (2) encontramos o polinômio caraterístico:

$$r^2 - 2r + 4 = 0.$$

O discriminante é $\triangle = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$ e as raízes são número complexos (Tipo III):

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i = \alpha \pm \beta i$$

Isto é, $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{3}$. Segue que a solução geral de (2) é

$$y_{g.h.}(x) = e^{x}\left[C_1 cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 sen\left(\sqrt{3}x\right)\right].$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$. Como as condições iniciais foram dadas no ponto $x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{48}} \neq 0$ para facilitar os cálculos vamos promover na solução anterior a troca de x por $x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}$:

$$y_{g.h.}(x) = e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[D_1 cos\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right) + D_2 sen\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{3}$$

Onde D_1 e $D_2 \in \mathbb{R}$. Usando a primeira restrição $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 0$ temos:

$$0 = e^{[0]}\left[D_1 cos\,(0) + D_2 sen\,(0)\right]$$

$$D_1 = 0 \tag{4}$$

Para continuar derivamos (3) usando a regra do produto e da cadeia:

$$y´_{g.h.}(x) = e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[\left(D_1 + D_2\sqrt{3}\right) cos\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right) + \left(D_2 - D_1\sqrt{3}\right) sen\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{5}$$

Mas de (4) temos:

$$y´_{g.h.}(x) = e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[D_2\sqrt{3} cos\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right) + D_2 sen\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{6}$$

Agora aplicamos a segunda restrição $y´\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 1$:

$$1 = e^{[0]}\left[D_2\sqrt{3} cos\,(0) + D_2 sen\,(0)\right]. \tag{7}$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{8}$$

Substituindo (4) e (8) em (3) encontramos a solução do Problema de Valor Inicial (P.V.I.):

$$y_{P.V.I.}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]} \left[sen \left(\sqrt{3} \left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}} \right] \right) \right]. \tag{9}$$

Note também que $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right] = \sqrt{3}x - \frac{\pi}{4}$. Podemos usar a identidade trigonométrica $sen\,(a+b) = sen\,(a)\,cos\,(b) + sen\,(b)\,cos\,(a)$ para escrever:

$$sen\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\sqrt{3}x\right) cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$sen\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\sqrt{3}x\right) cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$sen\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[sen\left(\sqrt{3}x\right) - cos\left(\sqrt{3}x\right)\right].$$

Com isto outra forma de escrever a mesma solução em (9) é

$$y_{P.V.I.}(x) = \frac{\sqrt{6}}{6} e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]} \left[sen\left(\sqrt{3}x\right) - cos\left(\sqrt{3}x\right) \right]. \tag{10}$$

2) Considere a sequência definida como indicada na Tabela 1 a seguir:

n	a_n
1	0,1
2	0,12
3	0,123
$\vdots$	$\vdots$
9	0,123456789
10	0,12345678910
11	0,1234567891011
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1: Sequência definida por tabela e verbalmente.

Isto é, dado o termo n-ésimo para construir o termo de ordem $n+1$ adicione os dígitos do número $n+1$ no final da representação decimal de a_n. Essa sequência é convergente ou divergente? Justifique.

Solução:

Esse problema está resolvido na vídeo-aula 103: "Exemplo do uso do Teorema da Sequência Monótona I".

A sequência dada é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona. De fato, a sequência é crescente pois novos dígitos são adicionados do termo n-ésimo para o termo de ordem $n+1$. Adicionalmente vale para todo $n \in \mathbb{N}$ que $a_n < 0,2$.

O Teorema da Sequência Monótona diz que se uma sequência é crescente e limitada superiormente ou decrescente e limitada inferiormente, então a sequência é convergente.

3) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Solução:

Esse problema está resolvido na vídeo-aula 131: "Séries de Potências II".

A sequência geradora da série dada é $a_n = n!x^n$. Segue que $a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$. Usaremos o Teste da Razão:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)\cdot n! \cdot x \cdot x^n}{n!x^n}\right| = |(n+1)\cdot x| = (n+1)\,|x|\,.$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x|\,.$$

O limite anterior somente existe quando $x = 0$ e nesse caso o limite é zero. Como $L = 0 < 1$ quando $x = 0$ a série converge. Logo, o raio de convergência da série é zero ($R = 0$) e não existe nenhum intervalo de convergência.

4) Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração se a trajetória de uma partícula é descrita pela função vetorial

$$\overrightarrow{r\,(t)} = <1+t, t^2-2t> .$$

Solução:

Este problema está resolvido a partir do minuto 6:25 na vídeo-aula Aceleração Tangencial e Normal II -V163.

Notemos inicialmente que

$$\overrightarrow{r'\,(t)} = <1, 2t-2>,$$

$$\overrightarrow{r''\,(t)} = <0, 2> .$$

Adicionalmente

$$||\overrightarrow{r'\,(t)}|| = \sqrt{1+4\,(t-1)^2} = \sqrt{4t^2-8t+5}.$$

i) Para calcular a componente tangencial da aceleração $a_T\,(t)$ usaremos que

$$a_T\,(t) = \frac{\overrightarrow{r'\,(t)} \cdot \overrightarrow{r''\,(t)}}{||\overrightarrow{r'\,(t)}||}.$$

Como o produto escalar é

$$\overrightarrow{r'\,(t)} \cdot \overrightarrow{r''\,(t)} = 1\cdot 0 + (2t-2)\cdot 2 = 4\,(t-1)\,,$$

segue que

$$a_T\,(t) = \frac{4\,(t-1)}{\sqrt{4t^2-8t+5}}.$$

ii) Para calcular a componente normal da aceleração $a_N\,(t)$ usaremos que

$$a_N\,(t) = \frac{||\overrightarrow{r'\,(t)} \times \overrightarrow{r''\,(t)}||}{||\overrightarrow{r'\,(t)}||}.$$

Para poder calcular o produto vetorial devemos transformar os vetores $\overrightarrow{r'\,(t)}$ e $\overrightarrow{r''\,(t)}$ de bidimensionais para tridimensionais adicionando um zero. Isto é:

$$\overrightarrow{r'\,(t)} = <1, 2t-2, 0>,$$

$$\overrightarrow{r''\,(t)} = <0, 2, 0> .$$

Como o produto vetorial é

$$\overrightarrow{r'\,(t)} \times \overrightarrow{r''\,(t)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2t-2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = <0, 0, 2>,$$

e

$$||\overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{r''(t)}|| = 2$$

segue que

$$a_N(t) = \frac{2}{\sqrt{4t^2 - 8t + 5}}.$$

5) Encontre as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

no ponto da superfície correspondente ao ponto $(4, 3)$ do domínio de f.

Solução:
Este problema está resolvido na vídeo-aula Exemplo de Plano Tangente e Reta Normal -V192.
O ponto de interesse sobre a superfície $z = f(x, y)$ é

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = \left(4, 3, \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right),$$

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(4, 3, \frac{1}{5}\right).$$

Vamos definir as funções

$$u(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}},$$

para deixar em evidência que f é uma função composta

$$f(x, y) = g(u(x, y)).$$

A primeira derivada parciais de f em relação a x é

$$f_x(x, y) = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x},$$

$$f_x(x, y) = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x,$$

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_x(x_0, y_0) = f_x(4, 3) = \frac{-4}{(4^2 + 3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4}{125}.$$

A primeira derivada parciais de f em relação a y é

$$f_y(x, y) = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y},$$

$$f_y(x, y) = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y,$$

$$f_y(x,y) = \frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_y(x_0,y_0) = f_y(4,3) = \frac{-3}{\left(4^2+3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{125}.$$

A equação do plano tangente a superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ é

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Logo, a equação do plano procurado é

$$z = \frac{1}{5} - \frac{4}{125}(x-4) - \frac{3}{125}(y-3).$$

$$z = \frac{2}{5} - \frac{4}{125}x - \frac{3}{125}y.$$

$$\frac{4}{125}x + \frac{3}{125}y + z = \frac{2}{5}.$$

Lembramos que a equação de um plano também pode ser escrita na forma $ax+by+cz=d$, onde $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$ é um vetor normal ao plano. Segue que

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{4}{125}, \frac{3}{125}, 1\right).$$

A equação vetorial da reta normal ao plano no ponto (x_0,y_0,z_0) pode ser escrita como $\overrightarrow{r(t)} = (x_0,y_0,z_0) + \overrightarrow{n}t$ onde $t \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{r(t)} = \left(4,3,\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{4}{125}, \frac{3}{125}, 1\right)t.$$