Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{06}: Maurício Damião	x_{11}: Luca Monaco
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 8.2.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Let y denote the weekly average quantity of pork produced in Chicago during 1948, in millions of pounds, and let x be the total weekly work effort, in thousands of hours. A study estimated the relation $y = -2.05 + 1.06x - 0.04x^2$. Determine the value of x that maximizes y by studying the sign variation of y.

Condição de primeira ordem:

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 1,06 - 0,08x &= 0 \\ x &= \frac{1,06}{0,08} \\ x &= 13,25 \end{aligned}$$

Se $x > 13,25$, y' será negativo e y será decrescente.
Se $x < 13,25$, y' será positivo e y será crescente.
Portanto, $x = 13,25$ é ponto de máximo de y

$\blacksquare$

Resolução (‖ Questão: 8.2.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

2. Find the derivative of the function h, defined for all x by the formula $h(x) = \dfrac{8x}{(3x^2+4)}$. Note that $h(x) \to 0$ as $x \to \pm\infty$. Use the sign variation of $h'(x)$ to find the extreme points of $h(x)$.

$$h(x) = \frac{8x}{(3x^2+4)} \tag{1}$$

$$h'(x) = \frac{[8 \cdot (3x^2+4)] - [8x \cdot 6x]}{(3x^2+4)^2} \tag{2}$$

$$h'(x) = \frac{24x^2 + 32 - 48x^2}{(3x^2+4)^2} \tag{3}$$

$$h'(x) = \frac{-24x^2 + 32}{(3x^2+4)^2} \tag{4}$$

Analisando $h'(x)$ percebemos que o denominador da função em questão nunca é igual a 0 e será positivo para qualquer valor de x, dessa forma para encontrarmos o(s) ponto crítico(s) deve-se igualar o numerador a zero.

$$-24x^2 + 32 = 0 \tag{5}$$
$$32 = 24x^2 \tag{6}$$
$$\frac{32}{8} = \frac{24x^2}{8} \tag{7}$$
$$4 = 3x^2 \tag{8}$$
$$\frac{4}{3} = x^2 \tag{9}$$
$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \tag{10}$$
$$x \approx \pm 1,1547 \tag{11}$$

No caso x possui dois pontos críticos.Vamos analisar primeiro $1,1547$, para isso tomemos dois valores, o primeiro um pouco menor que $1,1547$ e o segundo um pouco maior que $1,1547$, assim:

Seja x igual a $1,14$, então $h'(x)$ será igual a $0,8096$;

Seja x igual a $1,16$ então $h'(x)$ será igual a $-0,2944$

Logo $1,1547$ é um ponto de máximo, pois antes dele a função era positiva e após ele a função se tornou negativa.

Repetindo o mesmo processo para $-1,1547$, assim:

Seja x igual a $-1,16$, então $h'(x)$ será igual a $-0,2944$;

Seja x igual a $-1,14$, então $h'(x)$ será igual a $0,8096$

Portanto, $-1,1547$ é um ponto de mínimo.
■

Resolução (‖ Questão: 8.2.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Find possible extreme points for $g(x) = x^3 \ln x$, for $x \in (0, \infty)$

- Estabelecendo o método para acharmos os pontos extremos da função:

i) Suponha a função $f(x)$ é diferenciável em um intervalo I que inclua c
Se $f'(x) \geq 0$ para $x \leq c$ e $f'(x) \leq 0$ para $x \geq c$, então $x = c$ é um ponto máximo de f em I
Se $f'(x) \leq 0$ para $x \leq c$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \geq c$, então $x = c$ é um ponto mínimo de f em I

ii) Suponha que uma função f seja diferenciável em um intervalo I e que c seja um ponto interior de I. Para c ser um ponto mínimo ou máximo de f em I, uma condição necessária é que c seja um ponto crítico de f - isto é, $x = c$ é uma solução de

$$f'(x) = 0 \tag{12}$$

- Com isso explícito, analisemos $g(x) = x^3 \ln x$.

$$g(x) = x^3 \ln x \implies g'(x) = 3x^2 \ln x + \frac{x^3}{x} \implies g'(x) = x^2(3\ln x + 1)$$

A fim de satisfazer a condição necessária de primeira ordem, precisamos achar um c tal que $x = c$ satisfaça $f'(x) = 0$.

$\therefore$ Devemos resolver: $x^2(3\ln x + 1) = 0$

$x^2(3\ln x + 1) = 0 \implies (3\ln x + 1) = 0$ ou $x^2 = 0$.

Uma vez que $x = 0$ não está no domínio de $g(x)$, descartamos este resultado.

Resolvendo $(3\ln x + 1) = 0$:

$$(3\ln x + 1) = 0 \tag{13}$$
$$3\ln x = -1 \tag{14}$$
$$\ln x = -\frac{1}{3} \tag{15}$$
$$x = e^{-1/3} \tag{16}$$

Satisfeita a condição ii), partimos para satisfazer a questão i).

Analisemos a função $g'(x)$ à esquerda de à direita quando $x = e^{-1/3}$:

- $f'(x) \geq 0$ quando $x \geq e^{-1/3}$. Logo $g(x)$ está crescendo em $[e^{-1/3}, \infty)$.
- $f'(x) \leq 0$ quando $x \leq e^{-1/3}$. Logo $g(x)$ está descrescendo em $(0, e^{-1/3}]$.
- Segundo a definição apresentada em i), temos em $x = e^{-1/3}$ um ponto mínimo.
- Uma vez que $g(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$, $g(x)$ não possui valor máximo.

■

Resolução (‖ Questão:8.2.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Find possible extreme points for $f(x) = e^{3x} - 6e^x$, for x $\in (-\infty, \infty)$.

Note que $f(x) = e^x(e^{2x} - 6)$

Para encontrar possíveis pontos extremos da função vamos tomar a primeira derivada da função é a igualar a zero. O valor que satisfazer tal equação é um possível ponto de extremo.

$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^x = 0$

$3e^{3x} - 6e^x = 0 \Rightarrow 3e^x(e^{2x} - 2) = 0 \Rightarrow e^{2x} = 2 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln 2$

Note que quando $x < \dfrac{1}{2} \cdot \ln 2$, $f'(x) < 0$ e que quando $x > \dfrac{1}{2} \cdot \ln 2$, $f'(x) > 0$, de modo que $x = \dfrac{1}{2}\ln 2$ é um ponto de mínimo.

Ainda, podemos ver em $f(x) = e^x(e^2x - 6)$ que a função não tem ponto de máximo pois quando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.

■

Resolução (‖ Questão: 8.2.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Encontre o máximo de $y = x^2e^{-x}$ no intervalo $[0, 4]$.

Condição de primeira ordem:

$$y' = 0 \Rightarrow 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0$$

Os valores de x que satisfazem $xe^{-x}(2 - x) = 0$ são $x = 2$ e $x = 0$. Como y' tem valor negativo quando x está entre 0 e 2 e valor positivo quando x está entre 2 e 4, y será crescente até $x = 2$ e decrescente quando $x > 2$, o que significa que 2 é ponto máximo de $y = x^2e^{-x}$ no intervalo $[0, 4]$.

■

Resolução ($\|$ Questão: 8.2.8 $\|$ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ $\|$ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ $\|$)

8. Use Theorem 8.2.2 to find the values of x that maximize/minimize the functions given by the following formulas:

a)$y = e^x + e^{-2x}$

b)$y = 9 - (x - a)^2 - 2(x - b)^2$

c)$y = \ln x - 5x$, for $x > 0$

O Teorema 8.2.2 diz que:

Suppose that f is a function defined in an interval I and that c is a critical point for f in the interior of I.

(i) If f is concave, then c is a maximum point for f in I.

(ii) If f is convex, then c is a minimum point for f in I.

Sabendo disso podemos continuar, assim:

a)$y = e^x + e^{-2x}$

$$y = e^x + e^{-2x} \tag{17}$$
$$y' = e^x - 2e^{-2x} \tag{18}$$
$$y'' = e^x + 4e^{-2x} \tag{19}$$

Como y'' é positivo, uma vez que e elevado a qualquer expoente é sempre positivo, então y é uma função convexa.

$$y' = e^x - 2e^{-2x} \tag{20}$$
$$0 = e^x - 2e^{-2x} \tag{21}$$
$$2e^{-2x} = e^x \tag{22}$$
$$\frac{2}{e^{2x}} = e^x \tag{23}$$
$$2 = e^{3x} \tag{24}$$
$$\ln 2 = \ln e^{3x} \tag{25}$$
$$\ln 2 = 3x \tag{26}$$
$$\frac{\ln 2}{3} = x \tag{27}$$

Assim $\dfrac{\ln 2}{3}$ é um ponto de mínimo.

b)$y = 9 - (x-a)^2 - 2(x-b)^2$

$$y = 9 - (x-a)^2 - 2(x-b)^2 \quad (28)$$
$$y' = -2(x-a) - 4(x-b) \quad (29)$$
$$y' = -2x + 2a - 4x + 4b \quad (30)$$
$$y'' = -6 \quad (31)$$

Visto que, y'' é menor que zero, então a função y em questão é côncava.

$$y' = -2(x-a) - 4(x-b) \quad (32)$$
$$0 = -2(x-a) - 4(x-b) \quad (33)$$
$$0 = -6x + 2a + 4b \quad (34)$$
$$6x = 2a + 4b \quad (35)$$
$$x = \frac{2a+4b}{6} \quad (36)$$
$$x = \frac{a+2b}{3} \quad (37)$$

Assim $\dfrac{a+2b}{3}$ é um ponto de máximo.

c)$y = \ln x - 5x$, for $x > 0$

$$y = \ln x - 5x \quad (38)$$
$$y' = \frac{1}{x} - 5 \quad (39)$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2} \quad (40)$$

Uma vez que y'' é menor que zero, a função y em questão é côncava.

$$y' = \frac{1}{x} - 5 \quad (41)$$
$$0 = \frac{1}{x} - 5 \quad (42)$$
$$5 = \frac{1}{x} \quad (43)$$
$$x = \frac{1}{5} \quad (44)$$

Assim $\dfrac{1}{5}$ é um ponto de máximo.
$\blacksquare$