1. Escrever a forma linearizada do sistema:

$$\ddot{x} = -\sin(x) + u(t)$$

em torno do ponto de equilíbrio 0. Qual será o estado do sistema linear no instante de tempo $T = 1s$ se no instante zero temos $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$ usando o controle constante $u(t) = 1$?

2. Achar a exponencial $\exp(tA)$ da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. As equações de Euler para a velocidade angular de um corpo rígido são dadas por :

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_2\omega_1 + u_3 \end{aligned}$$

onde o vetor ω é a velocidade angular, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é o torque e I_1, I_2 e I_3 são os momentos de inércia principais. No caso de simetria em que $I_1 = I_2$, mostre que $\mathbf{u} = 0$ e

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} t) \\ \sin(\omega_0 \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} t) \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

é uma solução do sistema e ache a linearização em torno desta solução.

4. Sejam A_1 uma matriz quadrada $n \times n$ e A_2 uma matrz quadrada $k \times k$. Prove qua a exponencial da matriz em blocos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \exp(A_1) & 0 \\ 0 & \exp(A_2) \end{bmatrix}$$

5. Resolver a equação diferencial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + u_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\text{com } u_0 \text{ constante e} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

6. Achar a solução da equação

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \sin(2t)$$
$$x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

7. Dados T e S números reais maiores que zero. Mostre $\mathcal{A}(0,T) = \mathcal{A}(0,S)$, para todo par de matrizes (A, B) que definem um sistema linear.
8. Ache a matriz de controlabilidade Q_T do sistema dado pela eqaução:

$$\ddot{x}(t) = -9x(t) + u(t)$$

9. Considere o sistema de controle linear:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y + u_1\\ \dot{y} &= 2y + z - u_2\\ \dot{z} &= z + 2u_1 - u_2\end{aligned}$$

Verifique se o sistema é controlável.
10. Suponha que num sistema linear (A, B) a matriz B tenha posto n, e seja B^+ uma matriz tal que $BB^+ = I$. Mostre que o controle:

$$u(s) = \frac{1}{T} B^+ \exp((s-T)A)(b - \exp(TA)a) \text{ onde } s \in [0, T]$$

transporta o estado a para o estado b em tempo T.