



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Prof. Dr. Walter Ponge-Ferreira

6º Exercício
E6 - Sistema Hidráulico

1 Questão

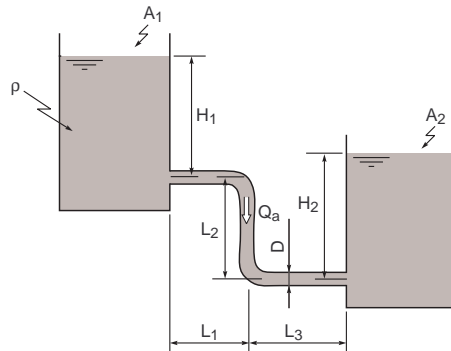


Figura 1: Sistema com dois reservatórios hidráulicos conectados

1.1 Sistema Hidráulico

Numa planta industrial, existem dois reservatórios cilíndricos de água em níveis diferentes. Os dois reservatórios são ligados por uma tubulação de diâmetro $D = 130$ mm conforme o esquema mostrado na figura 1, onde $H_1 = 10$ m, $H_2 = 8$ m, $L_1 = 10$ m, $L_2 = 2$ m e $L_3 = 12$ m. A água tem massa específica $\rho = 1000$ kg/m³ e viscosidade cinemática $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6}$ m²/s, e

a tubulação é feita de aço, com uma rugosidade média $e = 0,046$ mm. São dados os coeficientes de perda de carga da entrada $K_{ent} = 0,5$, de cada uma das curvas $K_{curva} = 1,3$ e da saída $K_{saida} = 1$. Assuma que a aceleração da gravidade vale $g = 10,0$ m/s².

1.2 Perda de carga distribuída

A perda de carga distribuída pode ser calculada pela fórmula de *Darcy-Weisbach-Chézy*, i.e.:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

onde L é o comprimento da tubulação de diâmetro D , $\bar{V} = \frac{Q}{A}$ a velocidade média do escoamento na seção de área transversal A com vazão Q , g a aceleração da gravidade local e f é o coeficiente de atrito, que pode ser obtido pela *fórmula de Colebrook*, dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{e}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

que depende do *Número de Reynolds* - Re e da rugosidade relativa ε , i.e.:

$$Re = \frac{\bar{V} D}{\nu}$$

e

$$\varepsilon = \frac{e}{D}$$

Para valores elevados do *Número de Reynolds*, quando o escoamento turbulento é plenamente desenvolvido, o coeficiente de atrito f é praticamente constante.

1.3 Perda de Carga Singular

A perda de carga singular devido a variações nas seções, entradas, saídas e cotovelos da tubulação é dada por:

$$h_S = K \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

para os quais o coeficiente de perda singular K é determinado empiricamente.

A relação anterior também pode ser escrita como:

$$h_S = \gamma R Q^2$$

onde:

$$R = \frac{K}{2g A^2}$$

é a resistência singular.

1.4 Pressão Hidrostática

A pressão hidrostática é dada por:

$$p_1 = \gamma h + p_2$$

onde p_i são as pressões em duas cotas separadas de uma coluna de fluido de altura h com peso específico $\gamma = \rho g$.

1.5 Equação de Bernoulli

A relação entre perdas de carga h_L e h_S , carga manométrica da bomba h_b , variação da pressão p_i , velocidade média do escoamento \bar{V}_i e cota da seção z_i em uma tubulação é dada pela equação da energia:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g} + z_2 \right) + h_b = h_L + \sum h_{S_i}$$

onde o coeficiente de fluxo de energia cinética α_i pode ser considerado igual a um para escoamento turbulento $Re > 4000$.

1.6 Potência Hidráulica

A potência hidráulica exercida pelo escoamento em uma dada seção transversal é dada por:

$$P_h = \gamma Q H$$

onde Q e H são a vazão volumétrica e a carga manométrica total na seção transversal do duto.

1.7 Reservatório com perda de carga na saída

Um reservatório de água com altura inicial H_0 em relação ao nível da tubulação de saída, pode ser equacionado como:

$$A \frac{dh}{dt} = -q$$

e

$$p_1 = p_0 + \gamma h$$

onde a velocidade dentro do reservatório é desprezada, dada a usual grande área transversal A deste.

Com a perda de carga singular na saída do reservatório:

$$p_1 - p_0 = R q^2$$

Temos a seguinte equação diferencial em termos da altura h do reservatório:

$$A \frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{\gamma h}{R}}$$

Para escrevermos em termos da vazão q temos que:

$$h = \frac{R q^2}{\gamma}$$

logo, derivando fica:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{R}{\gamma} 2q \frac{dq}{dt}$$

e assim:

$$\frac{A R}{\gamma} 2q \frac{dq}{dt} = -q$$

ou seja:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\gamma}{2 A R}$$

Logo a vazão varia linearmente com o tempo:

$$q(t) = Q_0 - \frac{\gamma}{2 A R} t$$

e portanto:

$$h(t) = \frac{R}{\gamma} \left(Q_0 - \frac{\gamma}{2 A R} t \right)^2$$

com $h(0) = H_0$ vem:

$$H_0 = \frac{R}{\gamma} Q_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad Q_0 = \sqrt{\frac{\gamma H_0}{R}}$$

onde H_0 e Q_0 são a altura inicial e a vazão de saída inicial do reservatório.

Exemplo Numérico

Para um sistema com os parâmetros da tabela 1:

Tabela 1: Exemplo numérico de reservatório com perda de carga na saída

$$\begin{array}{ll} A = 1,0 \text{ m}^2 & H_0 = 10,0 \text{ m} \\ \rho = 1000 \text{ kg/m}^3 & g = 10 \text{ m/s}^2 \\ \gamma = 10000 \text{ N/m}^3 & R = 250 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^7 \end{array}$$

Fica:

$$Q_0 = 0,02 \text{ m}^3/\text{s} = 20 \text{ L/s}$$

a equação da vazão $q(t)$ fica:

$$q(t) = 0,02 - 0,00002 t$$

portanto o reservatório leva $\Delta t = 1000 \text{ s}$ para esvaziar completamente.

1.8 Dois reservatórios ligados com tubulação afogada com perda de carga

Os reservatórios de água com alturas iniciais H_1 e H_2 em relação ao nível das tubulações afogadas, podem ser equacionados como:

$$\begin{array}{l} A_1 \frac{dh_1}{dt} = -q \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = q \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \gamma h_1 \\ p_2 &= p_0 + \gamma h_2 \end{aligned}$$

onde as velocidades dentro dos reservatórios são desprezadas, dada as usuais grandes áreas transversais A_1 e A_2 destes.

Com a perda de carga na tubulação entre os reservatório:

$$p_1 - p_2 = R q^2$$

Temos as seguintes equações diferenciais em termos das alturas h_1 e h_2 dos reservatórios:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{d h_1}{d t} &= -\sqrt{\frac{\gamma (h_1 - h_2)}{R}} \\ A_2 \frac{d h_2}{d t} &= +\sqrt{\frac{\gamma (h_1 - h_2)}{R}} \end{aligned}$$

para $h_1 \geq h_2$.

Para escrevermos em termos da vazão q temos que:

$$h_1 - h_2 = \frac{R q^2}{\gamma}$$

logo, derivando fica:

$$\frac{d h_1}{d t} - \frac{d h_2}{d t} = \frac{R}{\gamma} 2 q \frac{d q}{d t}$$

e se as áreas transversais dos reservatórios forem iguais, $A_1 = A_2 = A$:

$$A \left[\frac{d h_1}{d t} - \frac{d h_2}{d t} \right] = \frac{A R}{\gamma} 2 q \frac{d q}{d t} = -2 q$$

ou seja:

$$\frac{d q}{d t} = -\frac{\gamma}{A R}$$

Logo a vazão varia linearmente com o tempo:

$$q(t) = Q_0 - \frac{\gamma}{A R} t$$

e portanto:

$$h_1(t) - h_2(t) = \frac{R}{\gamma} \left(Q_0 - \frac{\gamma}{AR} t \right)^2$$

com $h_1(0) = H_1$ e $h_2(0) = H_2$ vem:

$$H_1 - H_2 = \frac{R}{\gamma} Q_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad Q_0 = \sqrt{\frac{\gamma (H_1 - H_2)}{R}}$$

onde H_1 e H_2 são as alturas iniciais dos reservatórios (com $H_1 \geq H_2$) e Q_0 a vazão inicial na tubulação.

Exemplo Numérico

Para um sistema com os parâmetros da tabela 2:

Tabela 2: Exemplo numérico de reservatório com perda de carga na saída

$$\begin{array}{lll} A_1 = 1,0 \text{ m}^2 & A_2 = 1,0 \text{ m} & A_1 = A_2 = A \\ \rho = 1000 \text{ kg/m}^3 & g = 10 \text{ m/s}^2 & \gamma = 10000 \text{ N/m}^3 \\ R = 250 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^7 & H_1 = 10,0 \text{ m} & H_2 = 6,0 \text{ m} \end{array}$$

Fica:

$$Q_0 = 0,01265 \text{ m}^3/\text{s} = 12,65 \text{ L/s}$$

a equação da vazão $q(t)$ fica:

$$q(t) = 0,01265 - 0,00004 t$$

portanto o reservatório leva $\Delta t = 316,23$ s para equalizar os níveis.

O volume total transferido fica:

$$V = \int_0^{\Delta t} q(t) dt = 0,01265 \Delta t - 0,00002 (\Delta t)^2 = 2,0$$

Logo:

$$\begin{aligned} h_1(316,23) &= H_1 - \frac{V}{A} = 10,0 - 2,0 = 8,0 \\ h_2(316,23) &= H_2 + \frac{V}{A} = 6,0 + 2,0 = 8,0 \end{aligned}$$

1.9 Atividade

Pede-se:

- a) elaborar um modelo plano para representar o sistema, considerando inicialmente $f = 0,02$.
- b) crie uma função para calcular o fator de atrito f para um dado *Número de Reynolds* - Re e uma rugosidade relativa ε .
- c) repetir o modelo plano, calculando o fator de atrito através da função criada.
- d) construir uma biblioteca de modelos para os seguintes componentes: reservatório, tubulação com perda de carga, singularidade de entrada, singularidade de saída, e singularidade de curva. Aproveite a semelhança entre componentes para criar sub-classes de modelos, quando possível.
- e) crie os elementos de conexão hidráulica para acoplar os diferentes componentes do sistema.
- f) construir uma modelo dinâmico do sistema hidráulico com os componentes da biblioteca.
- g) determinar a vazão Q que passa pela tubulação nessa condições, considerando que as áreas das superfícies dos reservatórios sejam infinitas.
- h) determinar a vazão $q(t)$ que passa pela tubulação, considerando as áreas das superfícies dos reservatórios **1** e **2** iguais a $A_1 = 12 \text{ m}^2$ e $A_2 = 28 \text{ m}^2$.

2 Questão

Foi adicionada uma bomba volumétrica B_a na tubulação de interconexão dos reservatórios para recalcar a água para o reservatório superior. A bomba é acionada por um motor elétrico de corrente contínua M_a .

Um motor elétrico de corrente contínua aciona a bomba com momento de inércia polar $J_c = 0,2 \text{ kg m}^2$. O rotor interno do motor tem momento de inércia polar $J = 0,02 \text{ kg m}^2$. O coeficiente de conversão da força eletromotriz do motor vale $k = 0,1 \text{ Nm/A}$. A resistência elétrica e a indutância da armadura do motor valem $R = 1,0 \Omega$, e $L = 0,01 \text{ H}$, respectivamente. O motor é alimentado por uma fonte de tensão de $U_0 = 120 \text{ V}$. As perdas

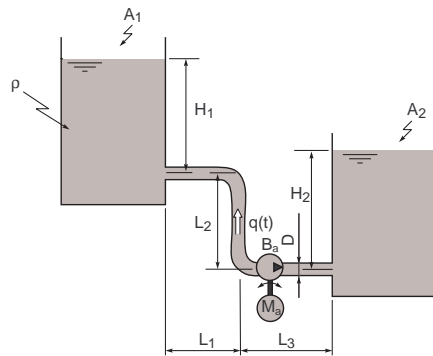


Figura 2: Sistema com dois reservatórios hidráulicos com moto-bomba

mecânicas internas do motor, como forças viscosas nos mancais e o arrasto aerodinâmico interno do rotor, podem ser modelados por um torque viscoso resistivo com constante de amortecimento $c = 0,01 \text{ Nm} \cdot \text{s}/\text{rad}$. O esquema do motor é apresentado na figura 3.

A bomba volumétrica tem uma vazão de $V_0 = 0,01 \text{ m}^3$ por volta. A resistência interna do refluxo vale $R = 10,0 \cdot 10^9$, e o torque de atrito é dado por:

$$\mu N \frac{d}{2} = 20,0 \text{ Nm}$$

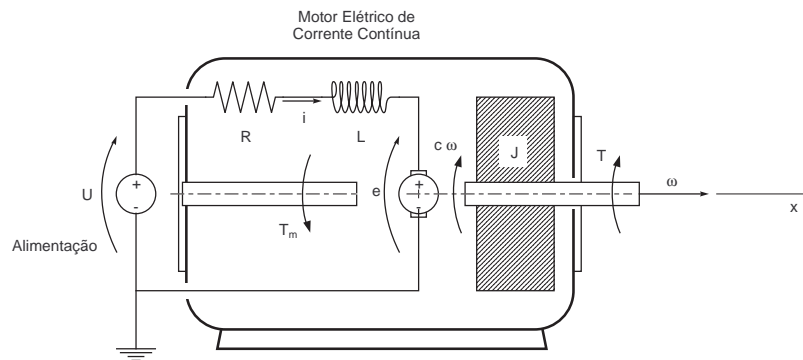


Figura 3: Motor Elétrico de Corrente Contínua

2.1 Modelo Dinâmico do Motor Elétrico

O campo eletromagnético do estator produz um torque eletromagnético T_m e existe um torque resistivo interno $c \cdot \omega$ no motor, resultando em um torque mecânico líquido T no eixo de saída dado por:

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_m - c\omega - T \quad (1)$$

Por outro lado, o modelo elétrico da armadura fornece a seguinte equação:

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + e \quad (2)$$

e para conversão eletromotriz temos:

$$\begin{aligned} e &= k_e \omega \\ T_m &= k_t i \end{aligned}$$

Para um processo ideal de conversão sem perdas as duas constantes são iguais quando expressas em um sistema de unidades coerente:

$$k_e = k_t = k$$

assim:

$$\begin{aligned} e &= k\omega \\ T_m &= ki \end{aligned} \quad (3)$$

Se desejarmos podemos substituir as equações da conversão (3) nas equações diferenciais mecânica (1) e elétrica (2) e obter duas equações diferenciais acopladas:

$$J \frac{d\omega}{dt} + c\omega = k \cdot i - T \quad (4)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U - k \cdot \omega \quad (5)$$

que resumem a dinâmica do motor elétrico.

2.2 Bomba de Deslocamento Positivo

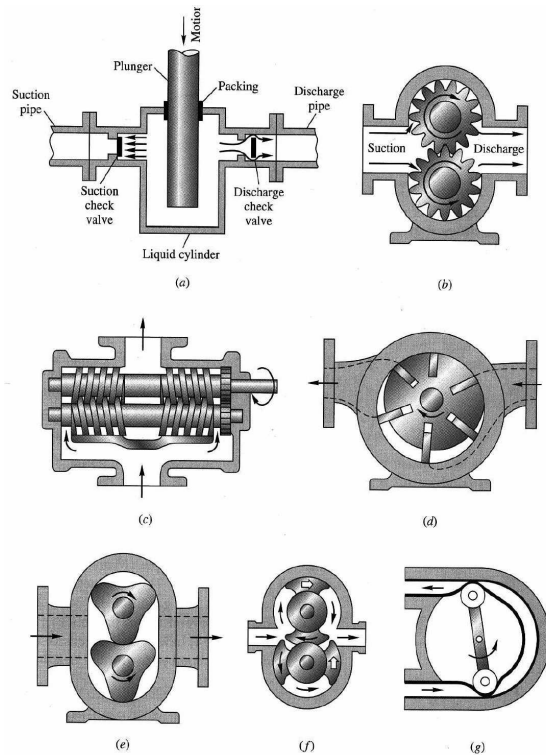


Figura 4: Modelos de bombas de deslocamento positivo

Bomba Ideal

Uma bomba de deslocamento positivo ideal desloca uma volume fixo V_0 de fluido por volta, assim:

$$Q = V_0 \frac{\omega}{2\pi} \quad (6)$$

onde Q é a vazão de fluido deslocado e ω a velocidade de rotação angular da bomba.

Uma bomba ideal não tem perdas, assim a potência de acionamento é igual a potência hidráulica fornecida ao fluido:

$$T_b \cdot \omega = \rho g Q H \quad (7)$$

onde T_b é o torque no eixo de acionamento da bomba, ρ a densidade do fluido, g a aceleração da gravidade local e $H = \frac{\Delta p}{\rho g}$ a carga manométrica fornecida pela bomba ao fluido.

Substituindo (6) em (7) temos a expressão para o torque de acionamento T_b de uma bomba volumétrica ideal:

$$T_b = \frac{\rho g V_0}{2\pi} \cdot H = \frac{V_0}{2\pi} \cdot \Delta p \quad (8)$$

Bomba Real

Quando há perdas por vazamento na bomba temos que:

$$\Delta p = R q^2 \quad (9)$$

onde q a vazão perdida pelo refluxo e R a constante de perda de carga desse refluxo.

Além disso, o torque total disponível é reduzido pelo torque de atrito da gaxeta, assim:

$$T_b = T - \mu N \frac{d}{2} \quad (10)$$

onde μ é coeficiente de atrito entre a gaxeta e o eixo, N a força resultante da pressão da gaxeta sobre o eixo e d o diâmetro de eixo de acionamento da bomba.

Assim, para uma bomba com perdas temos:

$$T = \frac{V_0}{2\pi} \cdot \Delta p + \mu N \frac{d}{2} \quad (11)$$

e

$$Q = \frac{V_0}{2\pi} \cdot \omega - q = \frac{V_0}{2\pi} \cdot \omega - \sqrt{\frac{\Delta p}{R}} \quad (12)$$

onde T e Q são o torque de acionamento e a vazão volumétrica da bomba real e Δp a pressão fornecida pela bomba ao escoamento.

Em termos de carga manométrica temos:

$$T = \frac{\rho g V_0}{2\pi} \cdot H + \mu N \frac{d}{2} \quad (13)$$

e

$$Q = \frac{V_0}{2\pi} \cdot \omega - \sqrt{\frac{\rho g H}{R}} \quad (14)$$

Eficiência da Bomba Volumétrica

A potência fornecida à bomba é:

$$P_m = T \cdot \omega \quad (15)$$

e a potência hidráulica efetiva fornecida ao fluido é:

$$P_h = \rho g Q H \quad (16)$$

Assim a eficiência da bomba fica:

$$\eta = \frac{P_h}{P_m} = \left[\rho g \left(\frac{V_0}{2\pi} \cdot \omega - \sqrt{\frac{\rho g H}{R}} \right) H \right] \div \left[\omega \cdot \left(\frac{\rho g V_0}{2\pi} \cdot H + \mu N \frac{d}{2} \right) \right] \quad (17)$$

$$\eta = \frac{P_h}{P_m} = \frac{\rho g H \left(\frac{V_0}{2\pi} \cdot \omega - \sqrt{\frac{\rho g H}{R}} \right)}{\omega \cdot \left(\frac{\rho g V_0}{2\pi} \cdot H + \mu N \frac{d}{2} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\rho g H R}}}{1 + \mu N \frac{d}{2\omega}} \quad (18)$$

no caso de bomba ideal, $\mu = 0$ e $R = \infty$ assim:

$$\eta = \frac{P_h}{P_m} = \frac{\rho g H \left(\frac{V_0}{2\pi} \cdot \omega \right)}{\omega \cdot \left(\frac{\rho g V_0}{2\pi} \cdot H \right)} = 1 \quad (19)$$

2.3 Atividade

- criar um modelo para a bomba volumétrica e acrescentá-la ao modelo do sistema hidráulico.
- acrescentar o modelo do motor elétrico de corrente contínua ao sistema.
- Inicialmente considerando as áreas das superfícies infinitas, calcule a vazão, a carga manométrica da bomba e a potência consumida pela bomba para manter a vazão fixa.
- Repita a simulação considerando agora as áreas dos reservatórios dadas na questão anterior.