Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 7.10.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Show that each of the following functions has at least one root in the given interval:

a) $f(x) = x^7 - 5x^5 + x^3 - 1$, $(-1, 1)$

As $f(x)$ is a polynomial, it is continuous $\forall x \in \mathbf{R}$.

$f(-1) = (-1)^7 - 5(-1)^5 + (-1)^3 - 1 = 2$

$f(1) = (1)^7 - 5(1)^5 + (1)^3 - 1 = -4$

Considering that $f(-1)$ and $f(1)$ have different signs, and $f(x)$ is continuous, there is at least one $c \in]-1, 1[$ such that $f(c) = 0$

b) $f(x) = x^3 + 3x - 8$, $(1, 3)$

As $f(x)$ is a polynomial, it is continuous $\forall x \in \mathbf{R}$.

$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 8 = -4$

$f(3) = 3^3 + 3 \cdot 3 - 8 = 28$

Considering that $f(1)$ and $f(3)$ have different signs, and $f(x)$ is continuous, there is at least one $c \in]1, 3[$ such that $f(c) = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 3x$, $(0, 1)$

Because $\sqrt{x^2 + 1}$ and $3x$ are continuous $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ is also continuous $\forall x \in \mathbf{R}$.

$f(1) = \sqrt{0^2 + 1} - 3 \cdot 0 = 1$

$f(3) = \sqrt{1^2 + 1} - 3 \cdot 1 \approx -1,58$

Considering that $f(0)$ and $f(1)$ have different signs, and $f(x)$ is continuous, there is at least one $c \in]0, 1[$ such that $f(c) = 0$

d) $f(x) = e^{x-1} - 2x$, $(0, 1)$

Because e^{x-1} and $2x$ are continuous $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ is also continuous $\forall x \in \mathbf{R}$.

$f(1) = e^{0-1} - 2 \cdot 0 = 1/e$

$f(3) = e^{1-1} - 2 \cdot 1 = -1$

Considering that $f(0)$ and $f(1)$ have different signs, and $f(x)$ is continuous, there is at least one $c \in]0, 1[$ such that $f(c) = 0$

■

Resolução (‖ Questão: 7.10.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖) Explain why anybody who is taller than 1 metre today was once exactly 1 metre tall.
Como o enunciado sugere, a altura (h) de um indivíduo está em função do tempo (t). Isto é, a altura é uma função contínua do tempo.

Tomando a frase do enunciado: "Qualquer um que é mais alto que 1 metro hoje, já teve um metro de altura" e tomando altura como uma função do tempo, isto é $h(t)$, e o intervalo $[1, a]$ com $a > 1$, temos pelo teorema o valor intermediário que: Para qualquer c entre $f(1)$ e $f(a)$ existe um número b pertencente a $[1, a]$ para o qual $f(c) = b$. ■

Resolução (‖ Questão: 7.10.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Find a better approximation to $\sqrt[3]{17} \approx 2.5$ by using Newton's method once.

Como visto na seção, utilizaremos a fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, \cdots$$

Iremos definir $n = 0$. Portanto precisamos de uma equação da forma $f(x_n) = 0$ que tem $\sqrt[3]{17} = 17^{\frac{1}{3}}$ como raíz.
A equação $x = 17^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^3 = 17$ tem essa raíz, então deixamos $f(x_0) = x_0^3 - 17$; e sua derivada é igual a $f'(x_0) = 3x_0^2$.
Logo, vamos escolher $x_0 = 2.5$, assim substituindo o valor escolhido nas funções, encontraremos os valores: $f(x_0) = -1.375$ e $f'(x_0) = 18.75$.
Agora utilizando a fórmula:
$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = 2.5 - \dfrac{(-1.375)}{18.75} \Rightarrow x_1 \approx 2.573$ ■

Resolução (‖ Questão: 7.10.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

The equation $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 8x + 3 = 0$ has an integer root. Find it. The three additional roots are close to -1.9, 0.4, and 1.5. Find better approximations by using Newton's method once for each root that is not an integer.

Por tentativa e erro, concluímos que $f(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 - 3(-3)^2 - 8(-3) + 3 = 81 - 81 - 27 + 24 + 3 = 0$
$\therefore x = -3$ é uma das raízes da equação.
. Seja $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 8x + 3$. Então, $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 6x - 8$

. O método de Newton:
Desde que $f'(x) \neq 0$, o método de Newton gera a sequência de pontos dada pela fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

para $n = 0, 1...$

- Usando $x_0 = -1.9$

  Precisamos de $f'(-1.9)$ e $f(-1.9)$. Utilizando a calculadora, temos que $f'(-1.9) = 8.454$ e $f(-1.9) = -0.1749$

  Aplicando o método de Newton: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1.9 + \dfrac{0.1749}{8.454} \approx 1.8793$

- Usando $x_0 = 0.4$

  Precisamos de $f'(0.4)$ e $f(0.4)$. Utilizando a calculadora, temos que $f'(0.4) = -8.704$ e $f(0.4) = -0.4624$

  Aplicando o método de Newton: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.4 - \dfrac{0.4624}{8.704} = 0.346875$

- Usando $x_0 = 1.5$

  Precisamos de $f'(1.5)$ e $f(1.5)$. Utilizando a calculadora, temos que $f'(1.5) = 16.75$ e $f(1.5) = -0.5625$

  Aplicando o método de Newton: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.4 + \dfrac{0.5625}{16.75} \approx 1.5335821$

$\blacksquare$

Resolução (‖ Questão: 7.10.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

The equation $(2x)^x = 15$ has a solution which is approximately an integer. Find a better approximation by using Newton's method once.

Seja $f(x) = (2x)^x - 15 = 2^x \cdot x^x - 15 = e^{\ln(2^x \cdot x^x)} - 15 = e^{\ln 2^x + \ln x^x} - 15 = e^{x \ln 2 + x \ln x} - 15 = e^{x \ln 2} \cdot e^{x \ln x} - 15$

(Utilizaremos essa álgebra em breve)

Nesse exercício, vamos encontrar um valor para x tal que $f(x) = 0$.

O método de Newton é dado por:

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}; n = 1, 2, ...$ (Isso supondo que $f'(x_n) \neq 0$).

Ainda, segundo o enunciado, a equação tem uma solução que é aproximadamente um número inteiro. O inteiro que faz com que $(2x)^x$ se aproxime de 15 é 2 pois $(2(2))^2 = 4^2 = 16$. Sendo assim, vamos usar $x_n = 2$ no método de Newtow para obter uma aproximação melhor de x.

Vamos descobrir agora o valor de $f(x_n)$ e de $f'(x_n)$

$f(x) = (2x)^x - 15$

$f(2) = (2(2))^2 - 15 = 16 - 15 = 1$

$f'(x) = (\ln 2) e^{x \ln 2} \cdot e^{x \ln x} + (\ln x + 1) \cdot e^{x \ln x} \cdot e^{x \ln 2} = (\ln 2) \cdot 2^x \cdot x^x + (\ln x + 1) x^x \cdot 2^x = 2^x \cdot x^x (\ln 2 + \ln x + 1)$

$f'(2) = 2^2 \cdot 2^2 (\ln 2 + \ln 2 + 1) = 16(\ln 4 + 1)$

Só substituindo valores no método de Newton temos que:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{16(\ln 4 + 1)} \approx 1,9738$$

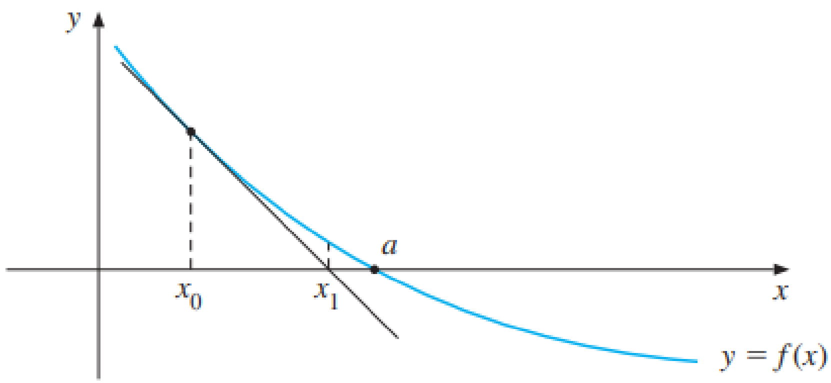
Essa é uma aproximação melhor para o valor de x.

■

Resolução (‖ Questão: 7.10.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Na figura (7.10.1), $f(x_0) > 0$ e $f'(x_0) < 0$. Além disso, x_1 está à direita de x_0. Verifique se isso está de acordo com a fórmula (7.10.1) para $n = 0$. Confira as outras combinações de sinais para $f(x)$ e $f'(x)$ para ver tanto geometricamente quanto analiticamente em que lado de x_0 está o ponto x_1

Figure 1: Método de Newton



Equação 7.10.1:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, ...$$

Isso supondo que $f'(x_n) \neq 0$

Quando n = 0 temos que $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Como $f(x_0)$ é um valor positivo e $f'(x_0)$ é um valor negativo (pois a inclinação da função é negativa no ponto) teremos que $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ assumirá um valor negativo. Dado que o valor dessa fração iria subtrair x_0 caso essa fração fosse positiva, temos que como a fração é negativa ela irá se somar à x_0, fazendo com que x_1 fique a direita de x_0 no gráfico de (7.10.1), estando de acordo com a equação (7.10.1).

De forma mais geral, quando $f(x_n)$ e $f'(x_n)$ tiverem o mesmo sinal, $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ será subtraído de x_n (fazendo com que x_{n+1} fique a esquerda de x_n) e se tiverem sinais diferentes, $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ será somado a x_n (fazendo com que x_{n+1} fique a direita de x_n).

■