Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 7.9.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

1. Function f , defined for $0 < x < 5$, has the graph that appears in Fig. 7.9.7. Determine the following limits:

a)$\lim_{x\to 1^-} f(x)$
Ao se analisar o gráfico conclui-se que o limite é igual a A.

b)$\lim_{x\to 1^+} f(x)$
Novamente o limite é igual a A de acordo com o gráfico.

c)$\lim_{x\to 2^-} f(x)$
Segundo o gráfico o limite deve ser igual a B.

d)$\lim_{x\to 2^+} f(x)$
Pelo gráfico o limite é igual a 0. ■

Resolução (‖ Questão: 7.9.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Evaluate the following limits

a) $\lim_{x\to 0^+}(x^2 + 3x - 4) = -4$

b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x + |x|}{x} = 1 + \lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$
As $|x|$ is strictly positive, because is a module function of x, and the $\lim_{x\to 0^-} x$ is getting closer to 0 by the left, i.e, it is strictly negative, the limit is:

$$1 + \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = 1 - 1 = 0 \tag{1}$$

c) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x + |x|}{x}$

As $|x|$ is strictly positive, because is a module function of x, and the $\lim_{x \to 0^+} x$ is getting closer to 0 by the right, i.e, it is strictly positive, the limit is:

$$1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 + 1 = 2 \tag{2}$$

d) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{\sqrt{x}}$

As the numerator of the limit is negative, and the denominator is getting closer to 0 by the right, i.e, it is strictly positive, the limit is:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty \tag{3}$$

e) $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x(1 - 3/x)} = \lim_{x \to 3^+} \dfrac{1}{1 - 3/x}$

From $\lim_{x \to 3^+} 3/x$ we know that as $x \to 3^+$, $3/x < 1$ because x is getting closer to 3 from the right, i.e, from bigger values than 3. Thus $1 - 3/x > 0$ as $x \to 3^+$. So, the limit is:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{1 - 3/x} = +\infty \tag{4}$$

f) $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x(1 - 3/x)} = \lim_{x \to 3^-} \dfrac{1}{1 - 3/x}$

From $\lim_{x \to 3^-} 3/x$ we know that as $x \to 3^-$, $3/x > 1$ because x is getting closer to 3 from the left, i.e, from lower values than 3. Thus $1 - 3/x < 0$ as $x \to 3^-$. So, the limit is:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{1 - 3/x} = -\infty \tag{5}$$

■

Resolução (‖ Questão: 7.9.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖) Let $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, and $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine $\lim_{x \to \infty} f_i(x)$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Then examine whether the rules for limits in Section 6.5 apply to the following limits as $x \to \infty$.

(a) $f_1(x) + f_2(x)$

(b) $f_1(x) - f_2(x)$

(c) $f_1(x) - f_3(x)$

(d) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

(e) $\dfrac{f_1(x)}{f_3(x)}$

(f) $f_1(x)f_2(x)$

(g) $f_1(x)f_4(x)$

(h) $f_3(x)f_4(x)$

(a) $\lim_{x\to\infty} x + x = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} x - x = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$

(c) $\lim_{x\to\infty} x - x^2 = \lim_{x\to\infty} x(1-x) = -\infty$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

(f) $\lim_{x\to\infty} x \cdot x = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

(g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \cdot x = 1$

(h) $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$

■

Resolução (‖ Questão: 7.9.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

The non-vertical line $y = ax + b$ is said to be an asymptote as $x \to \infty$(or $x \to -\infty$) to the curve $y = f(x)$ if

$$f(x) - (ax+b) \to 0 \text{ as } x \to \infty \text{ (or } x \to -\infty)$$

This condition means that the vertical distance between point $(x, f(x))$ on the curve and the point $(x, ax+b)$ on the line tends to 0 as $x \to \pm\infty$, as in Fig. 7.9.8.

Suppose that $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ is a rational function where the degree of the polynomial $P(x)$ is one greater than that of the polynomial $Q(x)$. In this case, $f(x)$ will have an asymptote that can be found by performing the method of polynomial division $P(x)\boldsymbol{\nabla} \cdot Q(x)$ that was explained in Section 4.7 in order to obtain a polynomial of degree 1, plus a remainder term that tends to 0 as $x \to \pm\infty$. Use this method to find asymptotes for the graph of each of the following functions of x:

a) $\frac{x^2}{x+1}$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & x+1 \\ -(x^2+x) & x-1 \\ \hline -x & \\ -(-x-1) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Resolvendo essa divisão temos como resultado a assíntota igual a $x-1$ e resto igual a 1

Assim fatorando a função original:

$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x+1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} + \frac{1}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x+1}$

Como é observado a partir do enunciado, $f(x) - (ax+b) \to 0$ as $x \to \infty$ (or $x \to -\infty$), logo, substituindo os valores temos:

$(x-1) + \frac{1}{x+1} - (x-1) \to 0$, quando $x \to \infty$. Assim: $\frac{1}{x+1} \to 0$

Portanto, a assíntota vertical é igual a -1.

b) $\frac{2x^3-3x^2+3x-6}{x^2+1}$

$$\begin{array}{c|l} 2x^3-3x^2+3x-6 & x^2+1 \\ -(2x^3+0+2x+0) & 2x-3 \\ \hline -3x^2+x-6 & \\ -(-3x^2-0-3) & \\ \hline x-3 & \end{array}$$

Resolvendo essa divisão temos como resultado a assíntota igual a $2x-3$ e resto igual a $x-3$

Assim fatorando a função original:

$\frac{2x^3-3x^2+3x-6}{x^2+1} = \frac{(2x-3)(x^2+1)+(x-3)}{(x^2+1)} = \frac{(2x-3)(x^2+1)}{(x^2+1)} + \frac{x-3}{x^2+1} = (2x-3) + \frac{x-3}{x^2+1}$

Como é observado a partir do enunciado, $f(x)-(ax+b) \to 0$ as $x \to \infty$ (or $x \to -\infty$), logo, substituindo os valores temos:

$(2x-3) + \frac{x-3}{x^2+1} - (2x-3) \to 0$, quando $x \to \infty$. Assim: $\frac{x-3}{x^2+1} \to 0$

c) $\frac{3x^2+2x}{x-1}$

$$\begin{array}{c|l} 3x^2+2x & x-1 \\ -(3x^2-3x) & 3x+5 \\ \hline 5x & \\ -(3x-5) & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Resolvendo essa divisão temos como resultado a assíntota igual a $3x+5$ e resto igual a 5

Assim fatorando a função original:

$\frac{3x^2+2x}{x-1} = \frac{(3x+5)(x-1)+5}{(x-1)} = \frac{(3x+5)(x-1)}{(x-1)} + \frac{5}{x-1} = (3x+5) + \frac{5}{x-1}$

Como é observado a partir do enunciado, $f(x)-(ax+b) \to 0$ as $x \to \infty$ (or $x \to -\infty$), logo, substituindo os valores temos:

$(3x+5) + \frac{5}{x-1} - (3x+5) \to 0$, quando $x \to \infty$. Assim: $\frac{5}{x-1} \to 0$

Portanto, a assíntota vertical é igual a 1.

d) $\frac{5x^4-3x^2+1}{x^3-1}$

$$\begin{array}{c|l} 5x^4-3x^2+1 & x^3-1 \\ -(5x^4+0-5x+0) & 5x \\ \hline -3x^2+5x+1 & \end{array}$$

Resolvendo essa divisão temos como resultado a assíntota igual a $5x$ e resto igual a $-3x^2+5x+1$

Assim fatorando a função original:

$\frac{5x^4-3x^2+1}{x^3-1} = \frac{(5x)(x^3-1)+(-3x^2+5x+1)}{(x^3-1)} = \frac{(5x)(x^3-1)}{(x^3-1)} + \frac{-3x^2+5x+1}{x^3-1} = (5x) + \frac{-3x^2+5x+1}{x^3-1}$

Como é observado a partir do enunciado, $f(x)-(ax+b) \to 0$ as $x \to \infty$ (or $x \to -\infty$), logo, substituindo os valores temos:

$(5x) + \frac{-3x^2+5x+1}{x^3-1} - (5x) \to 0$, quando $x \to \infty$. Assim: $\frac{-3x^2+5x+1}{x^3-1} \to 0$

Portanto, a assíntota vertical é igual a 1.

■

Resolução (‖ Questão: 7.9.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Consider the cost function defined for $x \geq 0$ by

$$C(x) = A\frac{x(x+b)}{x+c} + d \tag{6}$$

where A, b, c and d are positive constants. Find its asymptotes

- Faremos a seguinte divisão, com o objetivo de descobrir a assíntota. Calcularemos um y tal que $y = ax + b$ e

$$\lim_{x\to\infty} C(x) - (ax+b) \to 0$$

$Ax^2 + Abx : (x+c) = Ax + Ab - Ac = Ax + A(b-c)$ QUOCIENTE

$$\begin{array}{lllllll}
 & Ax^2 & +Abx & & DIVIDENDO & & \\
(x+c)DIVISOR & & & & & & \\
 & -Ax^2 & -Axc & & & & \\
\hline
 & 0 & +Abx & -Axc & & & \\
 & & -Abx & -Abc & & & \\
\hline
 & & 0 & -Axc & -Abc & & \\
 & & & Axc & +Ac^2 & & \\
\hline
 & & & 0 & -Abc & +Ac^2 & RESTO
\end{array}$$

- Lembremos que: Dividendo = (Quociente)(Divisor) + Resto. Utilizando os resultados obtidos na função $C(x)$:

$$C(x) = A\frac{x(x+b)}{x+c} + d = \frac{(Ax + A(b-c))(x+c) + (-Abc + Ac^2)}{x+c} + d = \tag{7}$$

$$Ax + A(b-c) + \frac{(-Abc + Ac^2)}{x+c} + d \tag{8}$$

Queremos um $y = ax + b$ tal que o limite proposto inicialmente seja cumprido.

$\therefore y = Ax + A(b-c) + d$, que é uma assíntota para a qual o valor de $C(x)$ converge, quando $x \to \infty$

Resto: $\dfrac{(-Abc + Ac^2)}{x+c}$. Como $x \geq 0$, então $x = -c$ não está definido, nem haverá assíntota neste valor de x.

■

Resolução (‖ Questão: 7.9.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

. Let f be the function, defined for $0 < x < 5$, whose graph appears in Fig. 7.9.9. Study the continuity and differentiability of the function at: (a) x = 1; (b) x = 2; (c) x = 3; and (d) x = 4.

Para justificar a continuidade de uma função temos a seguinte passagem:

. If $f(x)$ tends to $f(a)$ as x tends to a, we say that f is left continuous at a. Similarly [...] we say that f is right continuous at a if $f(x)$ tends to $f(a)$ as x tends to a^+. [...] we see that a function f is continuous

Figure 1

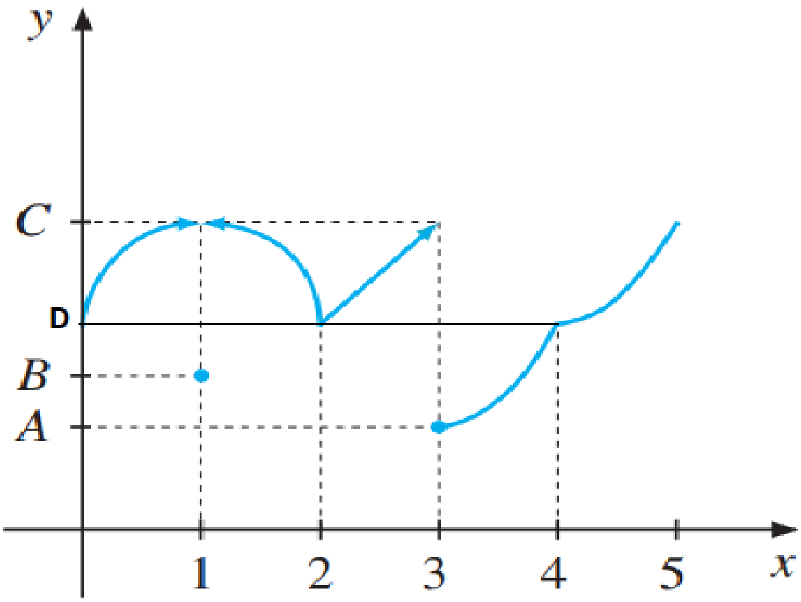


Figure 7.9.9 Exercise 7

at a if and only if f is both left and right continuous at a"

Em relação a diferenciabilidade de uma função temos que:

"If function f is differentiable at $x = a$, then it is continuous at $x = a$"

Logo, se a função não é contínua, ela não será diferenciável no ponto $x = a$.

Ainda temos que:

If f is continuous at a and has different left and right derivatives, $f(a^+) \neq f(a^-)$, then the graph of f is said to have a kink at $(a, f(a))$.

Quando um gráfico tem uma quina em um ponto, o gráfico tem mais de uma reta tangente ao ponto e portanto a função não é diferenciável nesse ponto.

(a) $x = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f = C$

$\lim_{x\to 1^+} f = C$

Entretanto note que $f(1) = B$

Portanto não é contínua

Como a função não é contínua, ela não será diferenciável no ponto $x = 1$

(b) $x = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f = D$

$\lim_{x \to 2^+} f = D$

Note que $f(2) = D$

Portanto é contínua

Note que há uma quina no ponto, ou seja, há duas retas tangentes ao ponto. Portanto a função não é diferenciavel no ponto $x = 2$.

(c) $x = 3$

$\lim_{x \to 3^-} f = C$

$\lim_{x \to 3^+} f = A$

Note que $f(3) = A$

Portanto não é contínua

Como a função não é contínua, ela não será diferenciável no ponto $x = 3$.

(d) $x = 4$

$\lim_{x \to 4^-} f = D$

$\lim_{x \to 4^+} f = D$

Note que $f(4) = D$

Portanto é contínua

Note que há uma quina no ponto, ou seja, há duas retas tangentes ao ponto. Portanto a função não é diferenciavel no ponto $x = 4$.

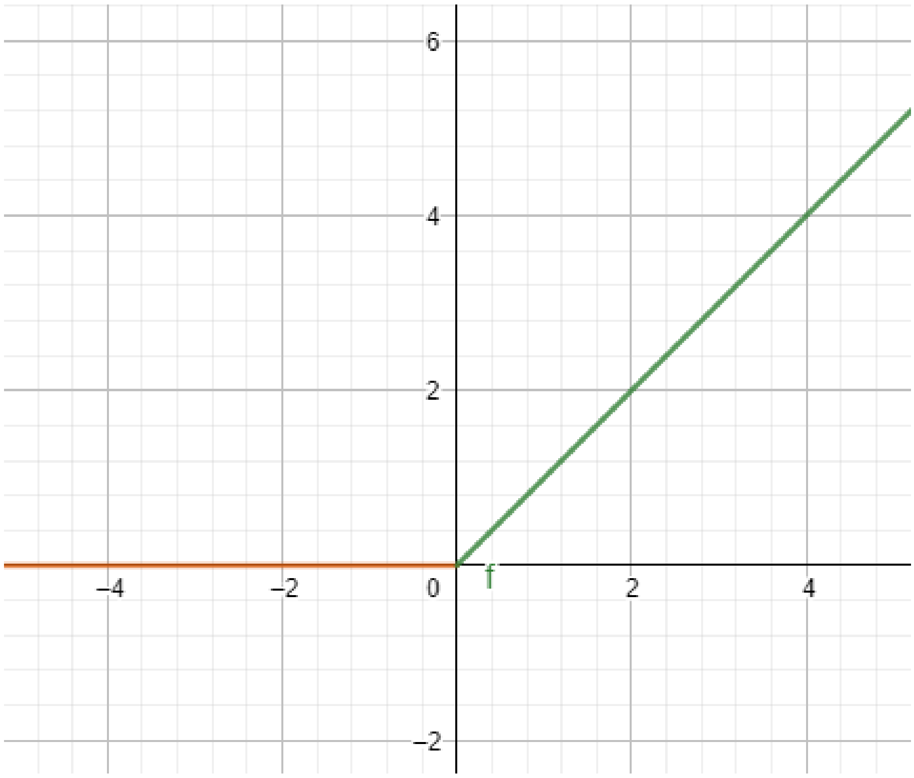
■

Resolução (‖ Questão: 7.9.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Desenhe o gráfico da função f definida por $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ e $f(x) = x$ para $x > 0$. Calcule $f'(0^+)$ e $f'(0^-)$.

Como $f(x) = 0$ quando $x \leq 0$, para calcular $f'(0^-)$ deriva-se $f(x) = 0$. Portanto, $f'(0^-) = 0$.
Para calcular $f'(0^+)$, deriva-se $f(x) = x$ pois $x > 0$. Portanto, $f'(0^+) = 1$.
O gráfico da função será:

Figure 2: 7.9.8



Onde a parte laranja é $f(x) = 0$ e a parte verde é $f(x) = x$.
■

Resolução (‖ Questão: 7.9.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

9. Consider the function f defined by the formula

$$f(x) = \frac{3x}{-x^2 + 4x - 1} \tag{9}$$

Compute $f(x)$ and use a sign diagram to determine where the function increases. (The function is not defined for $x = 2 \pm \sqrt{3}$)

Começando com a primeira derivada da função:

$$f(x) = \frac{3x}{-x^2 + 4x - 1} \tag{10}$$

$$f'(x) = \frac{3(-x^2 + 4x - 1) - [3x(-2x + 4)]}{(-x^2 + 4x - 1)^2} \tag{11}$$

$$f'(x) = \frac{(-3x^2 + 12x - 3) - (-6x^2 + 12x)}{(-x^2 + 4x - 1)^2} \tag{12}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x - 3 + 6x^2 - 12x}{(-x^2 + 4x - 1)^2} \tag{13}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{(-x^2 + 4x - 1)^2} \tag{14}$$

Para achar as raízes que faltam igualamos o numerador a zero, logo:

$$3x^2 - 3 = 0 \tag{15}$$
$$3(x^2 - 1) = 0 \tag{16}$$
$$x^2 - 1 = 0 \tag{17}$$
$$x = \pm 1 \tag{18}$$

As outras raízes já foram dadas no enunciado, portanto resta fazer o diagrama de sinais:

$$\begin{array}{rccccccccc}
3(x^2-1) & + & | & - & | & - & | & + & | & + \\
(-x^2+4x-1)^2 & + & | & + & | & + & | & + & | & + \\
\dfrac{3x^2-3}{(-x^2+4x-1)^2} & + & | & - & | & - & | & + & | & + \\
\hline
 & & -1 & & 2-\sqrt{3} & & 1 & & 2+\sqrt{3} &
\end{array}$$

A função cresce quando $x \leq -1$,em $1 \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$ e em $x \geq 2 + \sqrt{3}$ ∎