UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CAMPUS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 391 - CAE

Aula 6

LABORATÓRIO CAD/CAE
São Carlos
Fevereiro, 2000

5. ANÁLISE ESTÁTICA

Uma vez obtidas as matrizes [K], [M] e [C] (matriz de amortecimento) a fase de uso de Elementos Finitos termina e começa a análise dos problemas estruturais propriamente dita.

5.1 Introdução

Análise Estática de Estruturas : resposta do sistema não é dependente do tempo.

$$q = q(x,y,z)$$

Geralmente se deseja saber:

- deslocamento
- tensões e deformações devido a um certo carregamento.

Neste tipo de problema as deformações acontecem "quase estaticamente", ou seja, não existem (ou não se consideram) os transientes. Logo não há acelerações nem forças inerciais. A única energia presente é a energia de deformação elástica (strain energy) e dessa forma o sistema se comporta segundo :

$$[K]\{q\} = \{P\}$$

onde:

[K] = matriz de rigidez
{q} = vetor dos desiocamentos
{P} = vetor das forças

Algumas aplicações práticas:

Engenharia civil:

a) análise de cascas, pontes e outras estruturas de forma complexa;
b) deformação e recalque de fundações e maciços;
c) cálculo de estruturas em treliças: coberturas, pórticos;
d) cálculo de barragens.

Engenharia mecânica:

a) cálculo de elementos de máquinas de forma complexa, eixos-árvore, dente de engrenagem, barramentos;
b) deformações (estáticas) de máquinas ferramentas e de medida;
c) cálculo de tensões e de concentração de tensões em elementos de máquinas;
d) cálculo de estruturas como pontes rolantes, ganchos.

Engenharia aeronáutica: cálculo de deformações de elementos estruturais como trem de pouso, asa, nariz,etc.

Engenharia nuclear:invólucro central, dutos e junções submetidos a pressão elevada.

Geralmente cada uma dessas áreas da Engenharia utiliza-se da Análise Estática de uma forma particular. Numa boa parte dos problemas ligados ã Engenharia Mecânica, o cálculo estático não é o passo final mas apenas serve de subsídio para a análise dinâmica. Além disso as peças mecânicas são em geral de formas complicadas, de forma que o engenheiro mecânico tipicamente dá ênfase à modelagem de seus problemas onde usa 6 gdl/nó, no caso utiliza-se elementos finitos convencionais para a determinação de flechas da estrutura em alguns poucos pontos. Não são raros porém os casos onde uma análise estática de tensões é importante, mas normalmente o grande desafio é o comportamento dinâmico.

Já na Engenharia Civil geralmente a Análise Estática é o estágio final do estudo e dele se exigem mais detalhes - tensões, esforços internos, etc. Por outro lado as estruturas civis são mais simples em termos de forma (quando os arquitetos permitem!) - um edifício por exemplo pode ser uma sucessão de substruturas idênticas (andares).

5.2 Rigidez Estática. Cálculo de deslocamento

Num sistema com 1 gdl a rigidez estática confunde-se com o coeficiente de mola

$F = kx \Rightarrow k = F/x$ [N/m]
e é numericamente igual à força estática necessária para fazera mola se deslocar de 1 unidade de comprimento.

Num sistema com n gdl, um número não é suficiente para caracterizar a "resistência do sistema" à ação de forças estáticas externas. Tem-se a matriz de rigidez, e o problema obedece:

$$\{P\} = [K]\{q\}$$

Então a rigidez é representada por n^2 números. É muito comum os fabricantes de máquinas ferramentas anunciarem que "a rigidez da máquina é de x N/m". Apesar de estar implícito que se trata de força na direção e sentido da força de corte e deslocamento medido entre peça e ferramenta, pode-se dizer que esta afirmação é, no mínimo, vaga.

Os termos de [K] são, por exemplo, do tipo:

k_{u_i, v_j} = força na direção x no nó i quando se desloca o nó j uma unidade de comprimento na direção y.

k_{θ_j, v_i} = momento M_x no nó j para deslocar o nó i uma unidade de comprimento da direção y.

$k_{u_j, \theta_{xi}}$ = força na direção x no nó j para deslocar o nó i uma unidade de rotação em torno de x

e o seu conjunto traz informações completas sobre o comportamento estático da estrutura. Este comportamento também pode ser representado pela matriz de Flexibilidade [F], conforme visto na capítulo1.

$$[F] \cdot \{P\} = \{q\}$$

O cálculo dos deslocamentos (estáticos) resume-se em resolver o referido sistema de equações lineares. Geralmente o maior problema neste caso é o tamanho de [K] tendo-se que trabalhar com matrizes particionadas armazenadas no computador em memória auxiliar. O problema é ainda maior quando são muitos os vetores de carga e em vez de resolver o sistema pretende-se inverter a matriz. Para contornar este problema é possível se usar a Redução de Guyan ou condensação estática.

5.3 Método de Redução (condensação) estática de Guyan

Basicamente este método é usado para economizar esforço computacional, aproveitando os "zeros" existentes no vetor de carga. Rearranja-se os gdl de tal forma que os que são agrupados sob o sub-índice 1 são aqueles que são forçados e/ou de interesse e/ou vinculados.

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Então:

$$\begin{cases} [K_{11}].\{d_1\} + [K_{12}]\{d_2\} = \{P_1\} \\ [K_{21}].\{d_1\} + [K_{22}]\{d_2\} = \{0\} \rightarrow \{d_2\} = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{d_1\} \end{cases}$$

Portanto:

$$\left([K_{11}] - [K_{12}].[K_{22}]^{-1}.[K_{21}]\right)\{d_1\} = \{P_1\} \rightarrow [\overline{K}_1]\{d_1\} = \{P_1\}$$

onde $[\overline{K}_1]$ é a matriz condensada e é dada por:

$$[\overline{K}_1] = \left([K_{11}] - [K_{12}].[K_{22}]^{-1}.[K_{21}]\right)$$

com:

$$\boxed{\underset{\substack{\downarrow \\ kxk}}{|K_1|} = \underset{\substack{\downarrow \\ kxk}}{|K_{11}|} - \underset{\substack{\downarrow \\ kx(n-k)}}{|K_{12}|} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ (n-k)x(n-k)}}{|K_{22}|^{-1}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ (n-k)xk}}{|K_{21}|}}$$

A economia resultante pode ser avaliada contando-se o número de operações envolvidas, sabendo-se que:

-a inversão pelo método de Gauss de uma matriz nxn exige $n^4/3 + n^3 - n^2/3$ operações de multiplicação e divisão

-a multiplicação de duas matrizes nxn exige n^3 operações de multiplicação e divisão.

Por exemplo, toma-se n=36 e $\{d_1\}_{12x1}$

a) inversão 36x36	**$6{,}0 \times 10^5$** operações
b) método de Guyan	
. inversão de $[K_{22}]$	$1{,}2 \times 10^5$ operações
. multiplicação tripla	
$k \cdot (n-k)^2 + k^2 \cdot (n-k)$	$0{,}1 \times 10^5$ operações
. inversão de $[K_1]$	$0{,}08 \times 10^5$ operações
Total	**$1{,}38 \times 10^5$** operações

Observa-se neste exemplo um ganho de quase 80%. É importante notar-se que isto não implica em desprezar-se os gdl de sub-índice 2, trata-se de manipulação algébrica.

5.4 Cálculo de Tensões e Deformações

O passo seguinte na Análise Estática é o cálculo de tensões e deformações. Em máquinas ferramentas e na maioria dos conjuntos mecânicos, é comum dimensionar-se os elementos quanto "à flecha ou deslocamento" e não quanto "à tensão". Isto porque as tensões de trabalho estão geralmente bem abaixo da admissível, porém os deslocamentos podem atingir valores inaceitáveis. No entanto o conhecimento das tensões e deformações ao longo da estrutura é de grande importância. O projetista deve estar atento a distribuições de tensões muito heterogêneas e outros parâmetros que indiquem um mau projeto estrutural.

As equações básicas neste caso são:

$$\boxed{\begin{aligned} \{\varepsilon\}^e &= [B].\ \{u\}^e_n \\ \{\sigma\}^e &= [D].\ \{\varepsilon\}^e \end{aligned}}$$

onde:

$\{\varepsilon\}^e$ = deformações do elemento
$\{u\}^e_n$ = deslocamento nodal do elemento
$\{\sigma\}^e$ = tensões elementares

Depois que todos os deslocamentos nodais {q} foram obtidos, os deslocamentos elementares $\{u\}^e_n$ são um subconjunto dos mesmos. A matriz [B] tem como elementos funções de x e y, a não ser no elemento triangular a tensão plana. Assim de um modo geral calcula-se [B] e portanto no {ε} centro de gravidade do elemento ((x_c , y_c , z_c). Em tensão plana por exemplo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{CG} = [B]_{(x_c, y_c)} . \{u\}^e_n \quad \text{e posteriormente} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{CG} = \{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e_{CG}$$

É também comum se determinar as tensões principais e direção dos respectivos eixos

$$\left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{, no caso plano.} \qquad tg\ 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$$

Um outro enfoque é achar {ε} e {σ} nodais fazendo [B] = [B] (xi, yi). Comumente os valores de {σ} diferem ligeiramente quando calculados nos vários elementos e então uma boa aproximação é dada, para o caso da figura 5.1 , tem-se o -seguinte :

$$\{\sigma\}_2 = \frac{1}{4}\left(\{\sigma\}_2^I + \{\sigma\}_2^{II} + \{\sigma\}_2^{III} + \{\sigma\}_2^{IV}\right)$$

Um outro exemplo pode ser visto a seguir:

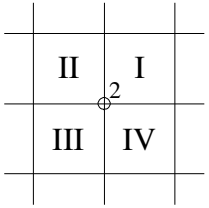
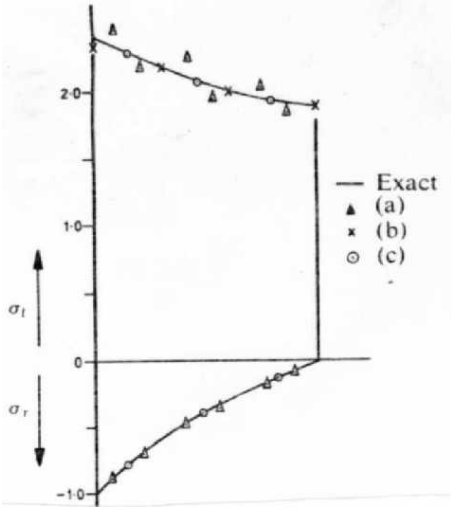


Fig 5.1 – Valor nodal da tensão



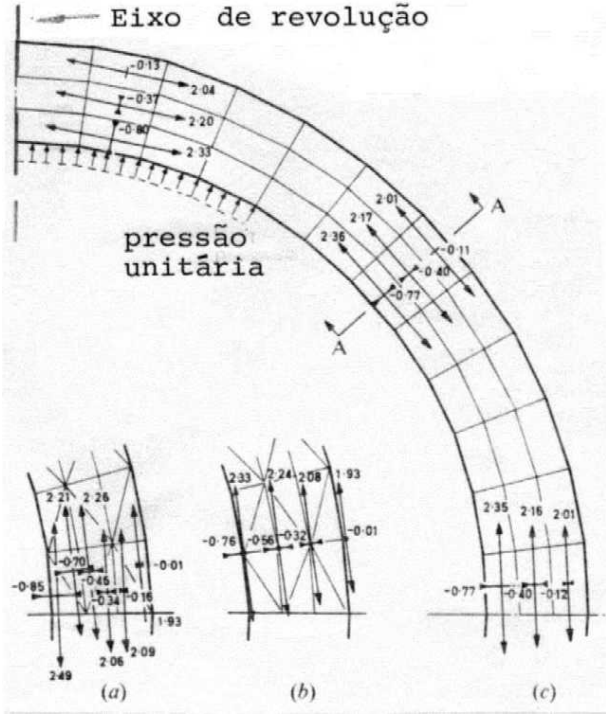


Figura 5.2

a)(Δ) valores no C.G.

b)mesmo elementos que o a) mas média nodal – (x)

c)média dos Δs adjacentes (.)

Tensões na secção AA

A Figura 5.2, mostra que uma boa determinação das tensões se resume num problema de modelagem.