UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CAMPUS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 391 - CAE

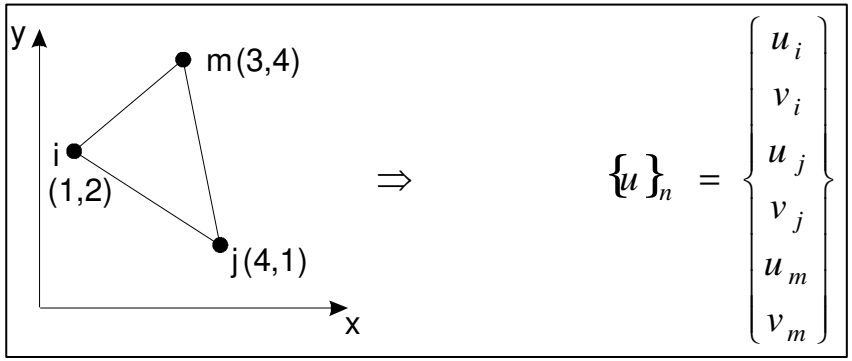
Aula 4

LABORATÓRIO CAD/CAE
São Carlos
Fevereiro, 2000

4.4. Alguns Exemplos

4.4.1. Elemento triangular linear a tensão plana. Matrizes Elementares e Matriz Global.

- Tensão plana : σ_x, σ_y, τ_{xy} com $\sigma_z = 0$, como no caso de uma placa fina no plano x-y e submetida a P_x e P_y.
- Deformação plana : σ_x, σ_y, τ_{xy} mas $\sigma_z \neq 0$, como um prisma infinito ao longo do eixo z. Neste caso σ_z não contribui no trabalho interno (não há movimentos fora do plano) de forma que recai no caso anterior e é analisado com o mesmo tipo de elemento.



$$\Rightarrow \quad \{u\}_n = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

Figura 4.6- Elemento triangular.

As funções deslocamentos serão dadas por:

$u = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, y$

$v = \alpha_4 + \alpha_5\, x + \alpha_6\, y$

As constantes α_l são achadas fazendo-se $u = u_i$ e, $v = v_i$

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot 2 \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \\ u_m = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot 4 \end{cases} \rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & 1 & 2 \\ u_j & 4 & 1 \\ u_m & 3 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{8}\left(13u_i + 2u_j - 7u_m\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{8}\left(-3u_i + 2u_j + u_m\right) \qquad \alpha_3 = \frac{1}{8}\left(-u_i - 2u_j + 3u_m\right)$$

Agora tem-se:

$$u = \frac{1}{8}\left(13u_i + 2u_j - 7u_m\right) + \frac{1}{8}\left(-3u_i + 2u_j + u_m\right) \cdot x + \frac{1}{8}\left(-u_i - 2u_j + 3u_m\right) \cdot y$$

ou

$$u(x, y) = \frac{1}{8}\left(-3x - y + 13\right) \cdot u_i + \frac{1}{8}\left(2x - 2y + 2\right) \cdot u_j + \frac{1}{8}\left(x + 3y - 7\right) \cdot u_m$$

Continuando a dedução, faz-se o mesmo para v = v_i e chega-se aos mesmos valores.

$$\begin{Bmatrix} u & (x,y) \\ v & (x,y) \end{Bmatrix} = \left[\frac{1}{8}(-3x - y + 13)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vdots \frac{1}{8}(2x - 2y + 2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vdots \frac{1}{8}(x + 3y - 7)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ é a forma da função de deslocamento, logo:

$$N_i = \frac{1}{8}(-3x - y + 13) \qquad N_j = \frac{1}{8}(2x - 2y + 2) \qquad N_m = \frac{1}{8}(x + 3y - 7)$$

são as funções deslocamentos. Já se sabe que: [B] = [L] . [N] e para a tensão plana tem-se:

$$[B] = [L] \cdot [N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_i & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_j & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_m & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_i & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_j & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_m \\ \frac{\partial}{\partial y} N_i & \frac{\partial}{\partial x} N_i & \frac{\partial}{\partial y} N_j & \frac{\partial}{\partial x} N_j & \frac{\partial}{\partial y} N_m & \frac{\partial}{\partial x} N_m \end{bmatrix}$$

No exemplo tomado:

$$[B] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota-se que os elementos de [B] não são funções de (x,y) e desde que $\{\varepsilon\} = [B]\{u\}_n$, as deformações e tensões são constantes no interior do elemento (triângulo à tensão plana).

$$[B] \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

e como

$$[K]^e = \int_{vol} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dvol$$

O triplo produto fornece termos independentes de x e y

$$[B]^T \cdot [D] \cdot [B] \int_{vol} dvol = [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot t \cdot A$$

onde:

A = área = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$

t = espessura.

Logo :

$$[K]^e = t \cdot A \cdot \frac{E}{64(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 9+a & 3\nu+3a & -6+2a & 6\nu-2a & -3-3a & -9\nu-a \\ & 1+9a & -2\nu+6a & 2-6a & -\nu-9a & -3-3a \\ & & 4+4a & -4\nu-4a & 2-6a & 6\nu-2a \\ & & & 4+4a & -2\nu+6a & -6+2a \\ & SIM. & & & 1+9a & 3\nu+3a \\ & & & & & 9+a \end{bmatrix}$$

com $\boxed{a = \frac{(1-\nu)}{2}}$

Para elementos congruentes $[K]^e$ é o mesmo só no caso a) da figura 4.7, no caso b) as matrizes elementares têm os mesmos números em posições diferentes.

- A rigidez do elemento depende da sua forma, tamanho e propriedades físicas.
- A matriz de rigidez não varia com a translação do elemento (somente com rotação)
- Para a rotação necessária, usam-se as matrizes de transposição [T]

Figura 4.7 - Elementos semelhantes.

Tem-se a matriz de massa, a qual é dada por: $\boxed{[M]^e = \rho \int_{vol} [N]^T \cdot [N] \cdot dvol}$

O integrando é:

$$\boxed{\begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^2 & 0 & N_iN_j & 0 & N_iN_m & 0 \\ & N_i^2 & 0 & N_iN_j & 0 & N_iN_m \\ & & N_j^2 & 0 & N_jN_m & 0 \\ & & & N_j^2 & 0 & N_jN_m \\ & simét. & & & N_m^2 & 0 \\ & & & & & N_m^2 \end{bmatrix}}$$

Ou utilizando-se a formulação agrupada :

$$\boxed{[M]^e = \frac{t \cdot A \cdot \rho}{3} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}$$

Neste ponto é que seriam aplicadas as matrizes [T] conforme já comentado levando as matrizes elementares $[K]^e$ e $[M]^e$ a serem referidas ao sistema global de coordenadas.

MATRIZ GLOBAL - MONTAGEM (para o comportamento de toda a estrutura)

As linhas e colunas da matriz global (quer de massa quer de rigidez) seguem estritamente: a) a numeração dos nós, b) a ordem dos gdl/nó. Por exemplo, num caso de flexão pura :

$$(u)_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x2} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{pmatrix}$$

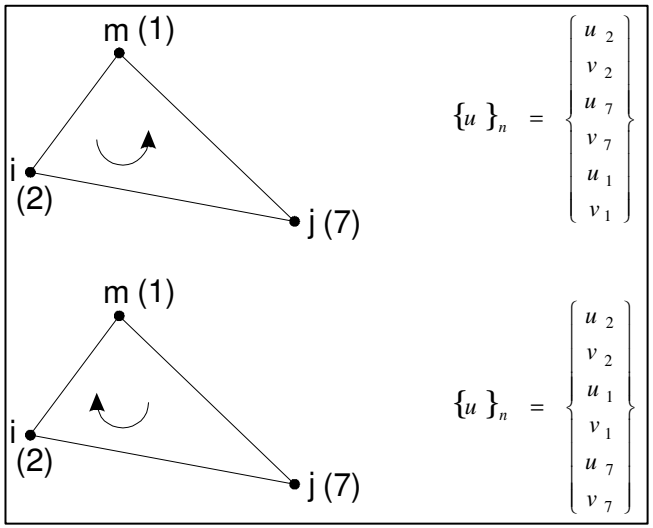
a matriz global de rigidez seria:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{w_1,w_1} & k_{w_1,\theta_{x1}} & k_{w_1,\theta_{y1}} & k_{w_1,w_2} & \cdots & k_{w_1,\theta_{yn}} \\ & k_{\theta_{x1},\theta_{x1}} & k_{\theta_{x1},\theta_{y1}} & k_{\theta_{x1},w_2} & \cdots & k_{\theta_{x1},\theta_{yn}} \\ & & k_{\theta_{y1},\theta_{y1}} & k_{\theta_{y1},w_2} & \cdots & k_{\theta_{y1},\theta_{yn}} \\ & & & k_{w_2,w_2} & \cdots & k_{w_2,\theta_{yn}} \\ & simétr. & & & & \vdots \\ & & & & & k_{\theta_{yn},\theta_{yn}} \end{bmatrix}$$

- Cada linha (e coluna) "refere-se" a um certo grau de liberdade do sistema, e.g., a 3° linha "refere-se" a θ_{y1} - giro em torno de y do nó 1. No cruzamento da 3º linha e 4º coluna tem-se $k_{\theta y1,w2}$ que é igual ao momento em torno de y no nó 1 quando se desloca o nó 2 de uma unidade na direção z.

- É necessário que a ordem de numeração seja sequencial por ex: 24, 25, 26 ... 39 =16 nós. Um número "pulado" implica singularidade de [K] e [M] .

As matrizes elementares seguem o sentido de numeração dos nós (anti-horário ou horário, padronizando-se para o resto dos elementos).



A		B	
elemento de $\{u\}_n$	coord. global	elemento de $\{u\}_n$	coord. global
1º	3a	1º	3a
2º	4a	2º	4a
3º	13a	3º	1a
4º	14a	4º	2a
5º	1a	5º	13a
6º	2a	6º	14a

Figura 4.8 – Sentido de numeração caso de tensão plana

Ao contrário de constantes de molas k^e_{ij} podem ser positivos ou negativos carregando o sinal inerentemente em si. O significado de k^e_{ij} negativo é que quando se desloca o nó j na direção positiva o nó i recebe força no sentido negativo.

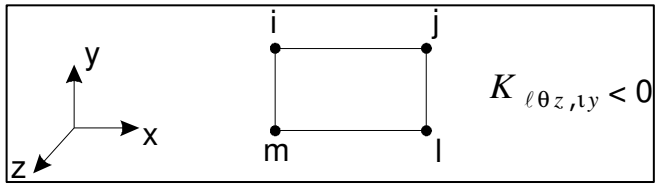


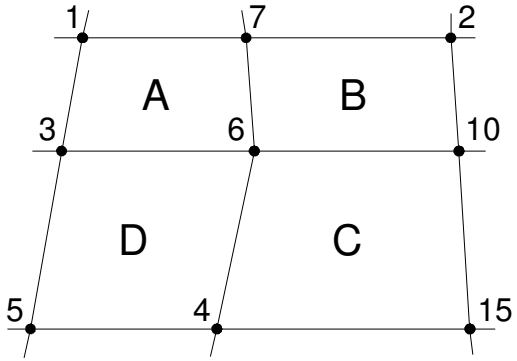
Figura 4.9 – Retângulo a tensão plana

A regra de montagem da matriz global é agora simplesmente:

$$k_{ii} = \sum k^e_{ii}$$

$$k_{ij} = \sum k^e_{ij}$$

No caso da figura 2.10 com 2 gdl/nó:



$$k_{u_6,u_6} = k_{11,11} = k^A{}_{u_6,u_6} + k^B{}_{u_6,u_6} + k^C{}_{u_6,u_6} + k^D{}_{u_6,u_6}$$

$$k_{u_6,v_{10}} = k^B{}_{u_6,v_{10}} + k^C{}_{u_6,v_{10}}$$

Figura 4.10 - Exemplo de montagem

A matriz global de rigidez tem as propriedades:

a) é positiva definida

b) é simétrica

c) é de banda.

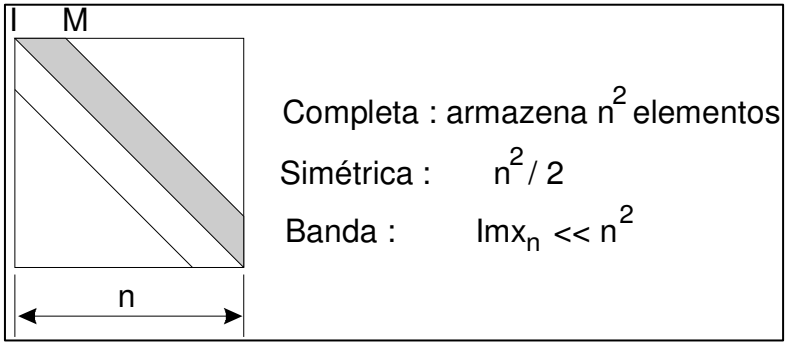


Figura 4.11 - Matriz simétrica de banda.

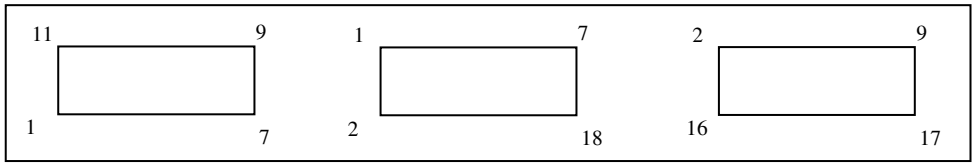
Na Figura 4.11, IM = largura de banda = "máxima distância" entre nós ligados por relação de rigidez. Na Figura 4.10, o nó 6 relaciona-se com todos os demais mas os nós 2 e 3, por exemplo, não estão relacionados. Notar que apesar da matriz de rigidez ter muitos zeros, a matriz de flexibilidade estática, i.e., $[K]^{-1}$ é densamente populada o que implica que se certo nó é forçado quase todos os outros vão se mover, pois

$$\{x\}= [K]^{-1}\cdot\{P\}$$

A largura de banda é assim calculada:

IM=(max(máx diferença, entre nº nós de cada elemento) + 1))gdl.

Exemplo:



máx. dif. = 10 máx. dif. = 17 máx. dif. = 16

gdl/nó = 3

IM = (máx(10,17,16)+1) gdl

IM = 18 x 3 = 54

Obs.:

- IM não depende do n° total de gdl do sistema (n) mas de maneira como se numera os nós. Portanto se requer muito cuidado na numeração dos nós pois a eficiência do processamento depende de IM.

CONDIÇÕES DE CONTORNO

- Singularidade ou não de [K] : possibilidades de movimento de corpo rígido da estrutura relacionadas com o comportamento numérico da sua matriz de rigidez .

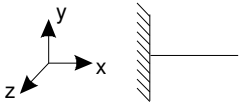
Tipo	Figura	gdl existentes	gdl retirados
Apoio móvel plano		x , θ_z	y
Apoio fixo plano		θ_z	x , y
Engastamento fixo		nenhum	x ,y ,z ,θ_x, θ_y, θ_z
Engastamento móvel		x , θ_x	y ,z ,θ_y, θ_z

Figura 4.12 – Condições de contorno

As condições de contorno podem ser levadas em conta de duas formas:

a) eliminação total da linha e coluna referente do gdl retirado.

- não há o deslocamento e nem a contribuição dessa parcela de elasticidade para o sistema todo.

- desvantagem : renumeração ou re-arranjo dos elementos no caso de softwares.

b) linha e coluna relativos ao gdl (grau de liberdade) eliminados são preenchidos com 0 (zeros) e ao elemento diagonal é atribuído valor altíssimo.

- Computacionalmente mais eficiente, e facilmente realizável (condições de contorno são tratadas "a posteriori", não dificultando em nada o método) .

As condições de contorno acima são do tipo u (x_0 ,y_0) = 0 e $\boxed{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = 0}$

No caso de em vez de zero temos um valor especificado de deslocamento, desconta-se do vetor de carga a parcela correspondente à esse deslocamento. Seja dado d_x:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_{yi} - d_x k_{21} \\ F_{xj} - d_x k_{31} \\ F_{yj} - d_x k_{41} \\ F_{xm} - d_x k_{51} \\ F_{ym} - d_x k_{61} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}}$$