Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 7.5.1 ‖ Relator: $\mathbf{x_{20}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{18}}$ ‖) Find quadratic approximations to the following functions about the specified points:

(a) $f(x) = (1+x)^5$ about $x = 0$.

(b) $F(K) = AK\alpha$ about $K = 1$.

(c) $f(\epsilon) = (1 + \frac{3}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2)^{1/2}$ about $\epsilon = 0$

(d) $H(x) = (1-x)^{-1}$ about $x = 0$

(a) $f'(x) = 5(1+x)^4$ e $f''(x) = 20.(1+x)^3$
$f(x) \approx f(0) + f'(0).(x-0) + \frac{1}{2}.f''(0)(x-0)^2$
$f(x) \approx 1 + 5x + 10x^2$

(b) $f'(K) = A.\alpha.K^{\alpha-1}$ e $f''(K) = A.\alpha.(\alpha-1).K^{\alpha-2}$
$F(K) \approx A + A.\alpha.(K-1) + \frac{1}{2}.(A.\alpha)(\alpha-1)(K-1)^2$

(c) $f'(\epsilon) = \frac{1}{2}.(1+\frac{3}{2}.\epsilon+\frac{1}{2}.\epsilon^2)^{-1/2}.(\frac{3}{2}+\epsilon)$ e $f''(\epsilon) = -\frac{1}{4}(1+\frac{3}{2}.\epsilon+\frac{1}{2}.\epsilon^2)^{-3/2}.(\frac{3}{2}+\epsilon)^2 + \frac{1}{2}.(1+\frac{3}{2}.\epsilon+\frac{1}{2}.\epsilon^2)^{-1/2}$
$f(\epsilon) \approx 1 + \frac{3}{4}.\epsilon - \frac{1}{32}.\epsilon^2$

(d) $H'(x) = (1-x)^{-2}$ e $H''(x) = 2(1-x)^{-3}$
$H(x) \approx 1 + x + x^2$

■

Resolução (‖ Questão: 7.5.2 ‖ Relator: $\mathbf{x_{05}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{06}}$ ‖)
Find the fifth-order Taylor approximation to $f(x) = \ln(1+x)$ about $x = 0$

Para resolvermos essa questão utilizaremos a Aproximação de Taylor para $f(x)$ sobre $x = a$:
para x próximo de a;

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Consideraremos $f(x) = \ln(1+x)$ para $a = 0$

Logo, o primeiro passo é achar até a quinta derivada de $f(x)$:
$f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$; $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$; $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$; $f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x^5)}$
Achadas as derivadas o próximo passo é substituir x por 0 nas derivadas achadas, uma vez que estamos considerando $a = 0$:
$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = -1$; $f'''(0) = 2$; $f^{(4)}(0) = -6$; $f^{(5)}(0) = 24$

O último passo é substituir esses valores na Aproximação de Taylor, assim temos:
$f(0) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5 \Rightarrow$
$f(0) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + \frac{(-6)}{24}x^4 + \frac{24}{120}x^5 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ ■

Resolução (‖ Questão: 7.5.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Find the second-order Taylor approximation to $f(x) = 5(\ln(1+x) - \sqrt{1+x})$ about $x = 0$.

A Aproximação de Taylor para $f(x)$ para x próximo de a é dada por:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Consideraremos $a = 0$. Precisaremos calcular: $f(0)$, $f'(x)$, $f'(0)$, $f''(x)$ e $f''(0)$.

- $f(0) = 5(\ln(1) - \sqrt{1}) = -5$
- $f'(x) = 5\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right) \Rightarrow f'(0) = 5\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2\sqrt{1}}\right) \iff f'(0) = \frac{5}{2}$
- $f''(x) = 5\left(\frac{-1}{(1+x)^2} - \left(-\frac{\frac{1}{2}}{2(1+x)^{3/2}}\right)\right) \Rightarrow f''(0) = 5\left(\frac{-1}{(1)^2} + \frac{1}{4(1)^{3/2}}\right) \iff f''(0) = -5 + \frac{5}{4} \iff f''(0) = \frac{-15}{4}$

$\therefore 5(\ln(1+x) - \sqrt{1+x}) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = -5 + \frac{5x}{2} - \frac{15x^2}{8}$
■

Resolução (‖ Questão: 7.5.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

A study of attitudes to risk is based on the following approximation:

$$U(y+m) \approx U(y) + U'(y)m + \frac{1}{2}U"(y)m^2$$

to a consumer's utility function, where y represents the consumer's initial income, and m is a random prize she may receive. Explain how to derive this approximation.

Para derivar essa aproximação foi utilizado a aproximação quadrática, que é dada pela seguinte fórmula:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f"(a)}{2}(x-a)^2$$

Onde a função f da forma quadrática representa a função U da utilidade do consumidor, $x = y + m$ e $a = y$.
■

Resolução (‖ Questão: 7.5.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Encontre a aproximação quadrática para y próximo ao ponto $(x, y) = (0, 1)$, quando y é definido implicitamente como função de x pela equação $1 + x^3y + x = y^{1/2}$.

Tomando a primeira derivada:

$$3x^2y + y'x^3 + 1 = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$$
$$y'(x^3 - \frac{1}{2}y^{-1/2}) = -1 - 3x^2y$$
$$y' = \frac{-1 - 3x^2y}{x^3 - \frac{1}{2}y^{-1/2}}$$

Substituindo os valores de x e y por $(0, 1)$:

$$y' = \frac{-1 - 3 \cdot 0^2 \cdot 1}{0^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^{-1/2}} = 2$$

Tomando a segunda derivada:

$$y'' = \frac{(-3x^2y' - 6xy)(x^3 - \frac{1}{2}y^{-1/2}) - (-1 - 3x^2y)(3x^2 + \frac{1}{4}y^{-3/2}y')}{(x^3 - \frac{1}{2}y^{-1/2})^2}$$

Substituindo os valores de x e y por $(0, 1)$:

$$y'' = \frac{(-3 \cdot 0^2 \cdot 2 - 6 \cdot 0 \cdot 1)(0^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^{-1/2}) - (-1 - 3 \cdot 0^2 \cdot 1)(3 \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^{-3/2} \cdot 2)}{(0^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^{-1/2})^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

Utilizando a fórmula da aproximação quadrática:

$$y = f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x - 0)^2 = 1 + 2x + x^2$$

■

Resolução (‖ Questão: 7.5.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

6. Let the function $x(t)$ be given by the conditions $x(0) = 1$ and $\dot{x}(t) = tx(t) + 2[x(t)]^2$. Determine the second-order Taylor polynomial for $x(t)$ about $t = 0$.

A fórmula do polinômio de Taylor é dada a seguir, para x perto de a:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n \tag{1}$$

Adotando $f(x)$ equivalente a $x(t)$ e a igual a t, sendo este último igual a 0, teremos:

$$x(0) = 1 \tag{2}$$
$$\dot{x}(0) = 0x(0) + 2[x(0)]^2 = 2 \tag{3}$$

Para obtermos o polinômio de Taylor de segunda ordem precisamos da segunda derivada de $x(t)$, assim:

$$\ddot{x}(t) = x(t) + t\dot{x}(t) + 2 \cdot 2[x(t)] \cdot \dot{x}(t) \tag{4}$$
$$\ddot{x}(0) = x(0) + 0\dot{x}(0) + 4 \cdot x(0) \cdot \dot{x}(0) \tag{5}$$
$$\ddot{x}(0) = 1 + 4 \cdot 2 = 9 \tag{6}$$

Logo, o polinômio de Taylor de segunda ordem para $x(t)$ com $t = 0$, será aproximadamente:

$$x(t) \approx x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2 \tag{7}$$
$$x(t) \approx 1 + 2t + \frac{9}{2}t^2 \tag{8}$$

■

Resolução (‖ Questão: 7.5.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Establish the approximation $e^{\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 + \sigma\sqrt{t/n} + \sigma^2 t/2n$

(7.5.1) denotes that, for x close to a, the quatratic approximation is:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \tag{9}$$

In this case, let $a = 0$, so, we must find $f(0)$, $f'(0)$ and $f''(0)$, to find the quadratic approximation to the function. Let's consider $f(x) = e^x$
$f(0) = e^0 = 1$
$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^x$

Therefore, the quadratic approximation for the function, considering x close to 0, is :

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \tag{10}$$

Substituting x for $\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}$:

$$e^{\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 + \sigma\sqrt{t/n} + \sigma^2 t/2n \tag{11}$$

■

Resolução (‖ Questão: 7.5.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Establish the approximation

$$(1+\frac{p}{100})^n \approx 1 + n\frac{p}{100} + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{p}{100})^2$$

Sendo $f(p) = (1+\frac{p}{100})^n$
Encontrando a primeira e segunda derivadas da função:
$f'(p) = \frac{n}{100}(1+\frac{p}{100})^{n-1}$
$f''(p) = \frac{n(n-1)}{10000}(1+\frac{p}{100})^{n-2}$
A aproximação da função f(p) através de um polinômio de Taylor de segunda ordem será:

$f(p) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(p-a) + \frac{f''(a)}{2!}(p-a)^2$
Para $a = 0$
$f(p) \approx f(0) + f'(0)p + \frac{f''(0)}{2}p^2 \iff f(p) \approx 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{p}{100})^2$

Resolução (‖ Questão: 7.5.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖) The function h is defined, for all $x > 0$, by

$$h(x) = \frac{x^p - x^q}{x^p + x^q} \tag{12}$$

where $p > q > 0$. Find its first-order Taylor approximation about $x = 1$.

$$h(x) = \frac{x^p - x^q}{x^p + x^q} = (x^p - x^q)(x^p + x^q)^{-1} \tag{13}$$

Primeira derivada:

$$h'(x) = (p.x^{p-1} - q.x^{q-1})(x^p + x^q)^{-1} + (x^p + x^q)[-(x^p + x^q)^{-2}.p.x^{p-1} + q.x^{q-1}] \tag{14}$$

$h'(1) = \frac{1}{2}(p-q)$
Aproximação: $h(x) \approx h(1) + h'(1)(x-1)$
$h(x) \approx (p-q)(\frac{1}{2})(x-1)$
$h(x) \approx [\frac{p-q}{2}].(x-1)$
$h(x) \approx \frac{1}{2}.(p-q)(x-1)$ ■ ■