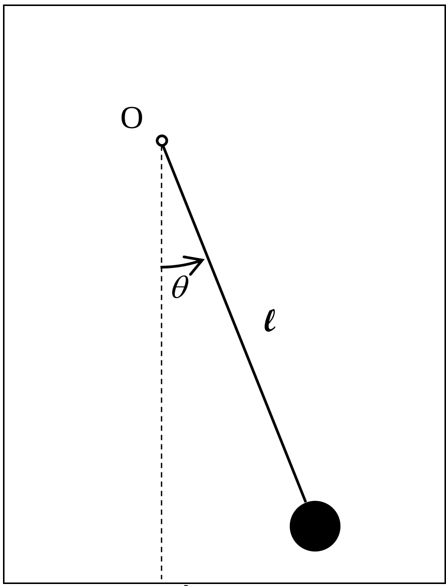
VII. Trigonometria plana

A. Introdução

Considere um pêndulo, como o da **FIGURA 1**a, preso no ponto O e oscilando com amplitude pequena. A **FIGURA 1**b mostra um gráfico do ângulo θ formado com a direção vertical em função do tempo, a partir do momento em que o pêndulo é abandonado de uma posição formando cerca de 9º com a vertical. Os pontos em vermelho são valores experimentais, enquanto a linha é a função

$$\theta = 8{,}99\cos(0{,}042 + 5{,}82\ t)\text{, em graus para } t \text{ em s,} \qquad \text{(VII.1)}$$

com o argumento do cosseno em radianos. Note que a curva desenhada explica muito bem os dados experimentais, dentro das suas incertezas, que correspondem ao tamanho dos círculos vermelhos



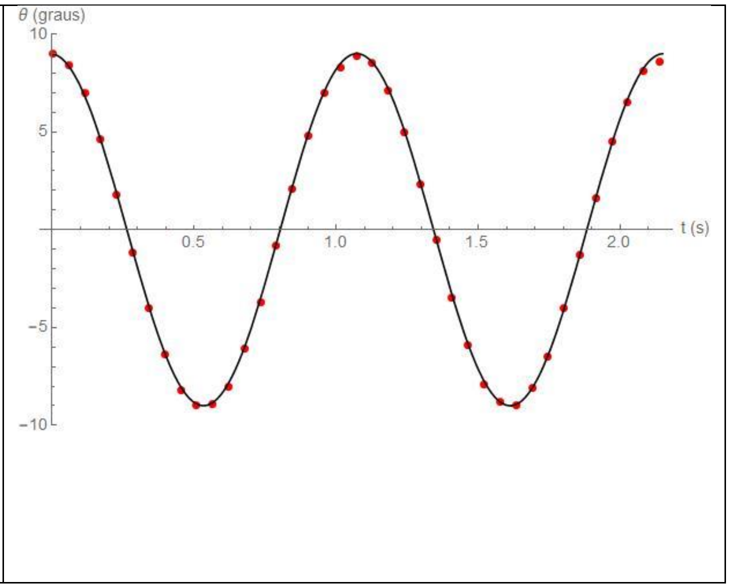


FIGURA 1. À esquerda, esboço de um pêndulo, com a indicação da maneira de medir o ângulo θ. À direita, dados experimentais e função calculada com parâmetros ajustados aos dados experimentais.

Muitos movimentos periódicos são bem descritos pelas funções seno e cosseno. Aprenderemos adiante que a maioria dos fenômenos periódicos pode ser descrita por uma soma de senos e cossenos, de maneira que essas funções são fundamentais no estudo da Física. Note que aqui vai acontecer algo parecido com os outros assuntos – podemos operar com quantidades físicas que sabemos interpretar de maneira que têm significado somente algébrico (trigonométrico, matemático, etc.). Ou seja, aprendemos a somar, dividir, multiplicar, expandir, ..., expressões trigonométricas complexas, porque essas operações serão usadas nas combinações das equações que representam o sistema que levarão a expressões mais compactas e mais simples, mesmo que os cálculos intermediários não representem algo com significado físico. No entanto, as regras matemáticas precisam ser respeitadas ao longo de todas as transformações algébricas que por acaso façamos e, por outro lado, toda transformação matematicamente correta pode ser efetuada, embora neste último caso, o resultado pode ou não interessar.

As funções trigonométricas também são importantes para descrever a geometria dos arranjos e lidar com os sistemas de coordenadas usados para descrevê-los, mas este assunto fica para a última seção.

B. A medida do ângulo em radianos

O exemplo da **Figura 2** indica que há pelo menos duas maneiras de medir ângulos (graus e radianos) e que um ângulo pode ter medida infinita, o que é muito estranho, afinal, os ângulos que desenhamos estão na faixa entre 0 e 360º. Assim, o primeiro detalhe a compreender é o significado de ângulos maiores que 360º e ângulos negativos.

1. A medida do ângulo em radianos

A fim de explicar como se mede um ângulo em radianos, apresentamos na **Figura 2** abaixo um ângulo θ formado por duas retas que se encontram no ponto O. A circunferência de centro em O e raio *r* está desenhada com linha cheia no espaço delimitado pelo ângulo e em linha tracejada, fora. O arco dessa circunferência dentro do ângulo θ tem medida *s*. Imagine a circunferência de raio *R*; o arco compreendido dentro do ângulo tem medida *S* (no caso, maior que *s* porque $R > r$) e podemos deduzir, por semelhança das figuras, que o arco compreendido pelo ângulo é diretamente proporcional ao raio da circunferência,

$$\frac{s}{r} = \frac{S}{R}$$

Definimos a medida do ângulo em radianos como o coeficiente de proporcionalidade entre o tamanho do arco coberto pelo ângulo e o raio da circunferência com centro na interseção das linhas que formam o ângulo, ou seja

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(VII.2)}$$

não sendo necessário especificar o raio do círculo, qualquer um servirá.

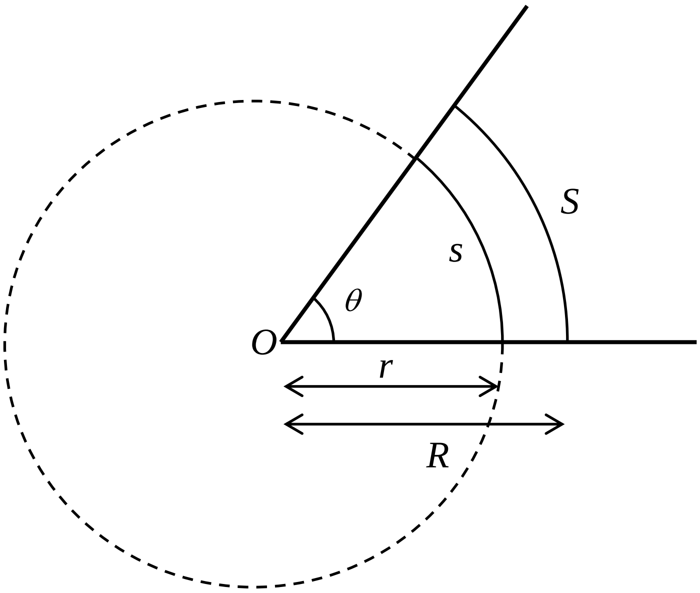


Figura 2. Construção geométrica para medir um ângulo. Desenha-se uma circunferência centrada no vértice do ângulo formado pelas linhas grossas, que cortam essa circunferência em dois pontos e definem um arco, cuja medida é proporcional ao ângulo.

2. Conversão da medida em graus para radianos

Essa conversão baseia-se na proporcionalidade direta que a medida em graus tem com a medida em radianos, de modo que é necessário apenas determinar esse coeficiente de proporcionalidade. Uma volta inteira da circunferência mede, em radianos

$$\theta(\text{volta inteira}) = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Como o ângulo que corresponde à volta inteira da circunferência mede 360º, a regra de transformação da medida de um ângulo em graus para radianos é

$$\theta_{rad} = 2\pi \cdot \frac{\theta_{graus}}{360^o} \qquad \text{(VII.3)}$$

A tabela 1 apresenta os valores em radianos dos ângulos mais usados.

Tabela 1. Cada coluna dá as medidas em graus e radianos dos ângulos mais usados.

graus	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
radianos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Questão 1. Determine a medida em graus do ângulo que mede:

a) 1 rad
b) 0,1 rad
c) 0,01 rad
d) 0,001 rad (ou 1 mrad, um miliradiano)

Questão 2. Determine a medida em radianos do ângulo que mede

a) 37º
b) 22º 30'
c) 1º
d) 1'
e) 1"

Questão 3. São Paulo fica sobre o trópico de Capricórnio. Determine a menor distância de São Paulo ao equador, sobre a circunferência terrestre, com dois dígitos significativos. Procure por sua conta os dados necessários: latitude de São Paulo e tamanho da circunferência terrestre.

C. Significado dos ângulos negativos ou maiores que 2π rad.

No exemplo da seção A, o argumento da função cosseno é um número negativo para qualquer $t < -0{,}01$ s e maior que 2π para $t > 1{,}1$ s. No entanto, estamos acostumados a calcular o cosseno como a razão de segmentos de triângulos, caso em que o ângulo tem um valor entre 0 e π. Assim, é conveniente estender a ideia de ângulo para valores fora da faixa necessária para a geometria, a fim de dar um significado preciso às funções cosseno, seno, tangente, etc.

A ideia é retomar a definição da equação (VII.2) e imaginar um objeto movendo-se ao longo da circunferência, que dá voltas e voltas, e substituir o arco de circunferência pelo espaço percorrido. Desse modo, a cada volta a mais, o ângulo aumenta em 2π rad. Definido dessa forma, todos os ângulos que diferem de 2π correspondem ao mesmo ângulo plano, ou seja

$$\theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \ldots, \theta + 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{N}$$

são medidas diferentes mas equivalentes do ângulo θ. Agora, também pode acontecer que o objeto se mova no sentido dos ponteiros do relógio, então o espaço é percorrido no sentido oposto à orientação positiva, e a equação (VII.2) dará um valor negativo. Assim, também os ângulos menores que θ por 2π ou um múltiplo de 2π correspondem ao mesmo ângulo plano, ou seja

$$\theta, \theta - 2\pi, \theta - 4\pi, \ldots, \theta - 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{N}$$

são outras medidas diferentes mas equivalentes do mesmo ângulo. Essas duas sequências podem ser reunidas em uma só,

$$\theta + 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(VII.4)}$$

são medidas diferentes mas equivalentes do ângulo θ, e as funções trigonométricas têm o mesmo valor para qualquer ângulo do conjunto definido pela relação (VII.4).

Questão 4. Encontre os ângulos na faixa $[0,2\pi]$ que correspondem aos valores, em rad:

a) 157π e $-157\,\pi$
b) $\frac{157\pi}{2}$ e $-\frac{157\pi}{2}$
c) $\frac{157\pi}{4}$ e $-\frac{157\pi}{4}$
d) $\frac{157\pi}{8}$ e $-\frac{157\pi}{8}$

D. O círculo trigonométrico

As **Figura 3** e**Figura 4** ilustram o círculo trigonométrico, usado no estudo das relações básicas entre as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante; as quatro primeiras estão marcadas em traço mais escuro na **Figura 3**, as quatro últimas na **Figura 4**. O sistema de referência *x*O*y* é cartesiano, de modo que ambas as escalas são iguais. Por definição, o raio do círculo vale 1, de modo que os tamanhos dos segmentos representam diretamente os valores das funções.

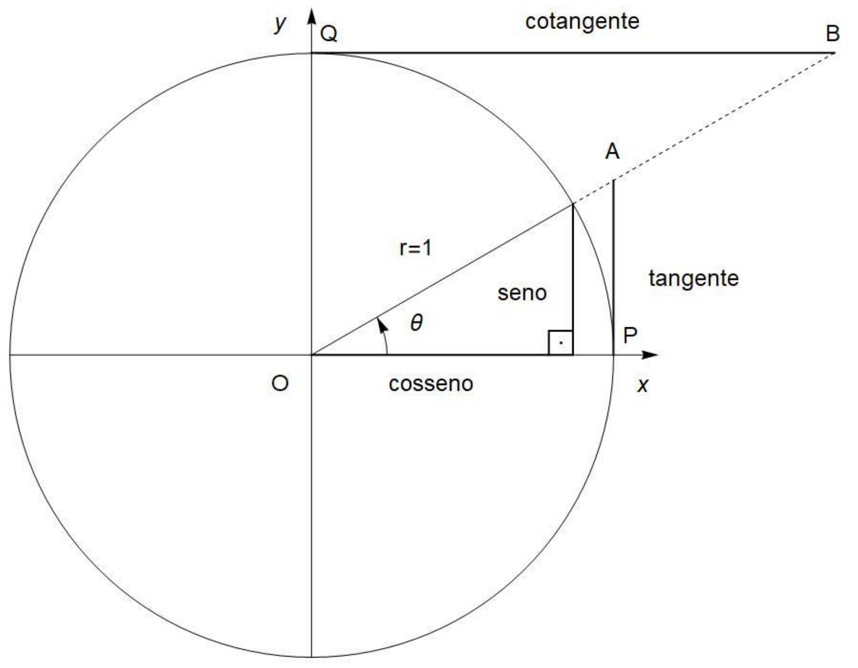


Figura 3. Círculo trigonométrico, cujo raio é definido igual a 1. Em traço grosso estão os segmentos que dão o seno, o cosseno, a tangente e a cotangente do ângulo θ, que é positivo quando medido no sentido anti-horário, indicado pela ponta de seta.

Questão 5. Represente graficamente seno, coseno, tangente e cotangente em um círculo trigonométrico para os ângulos, em rad:

a) $5\pi/6$

b) $7\pi/6$

c) $11\pi/6$

Dica: nestes casos, muitas vezes o raio r precisa ser prolongado através de outro quadrante para que alcance alguma das retas tangentes aos pontos P e Q.

As **Figura 3** e Figura **4** foram desenhadas com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, mas a construção geométrica que permite identificar as funções é a mesma para ângulos em qualquer quadrante: o cosseno e o seno são as projeções do raio *r* que corresponde ao ângulo θ nos eixos O*x* e O*y*, respectivamente, e os segmentos marcados tangente e cotangente são tangentes ao círculo respectivamente nos pontos P ($\theta_P = 0$) e Q ($\theta_Q = \pi/2$), seus tamanhos são definidos pela interseção dessas tangentes com o prolongamento de *r*, e os sinais vêm das suas projeções no eixos coordenados O*x* e O*y*. A secante (porque corta a circunferência) e a cossecante são os segmentos OA e OB, fáceis de identificar tanto na **Figura 3** quanto na **Figura 4**, mas seus sinais são evidentes apenas na **Figura 4**.

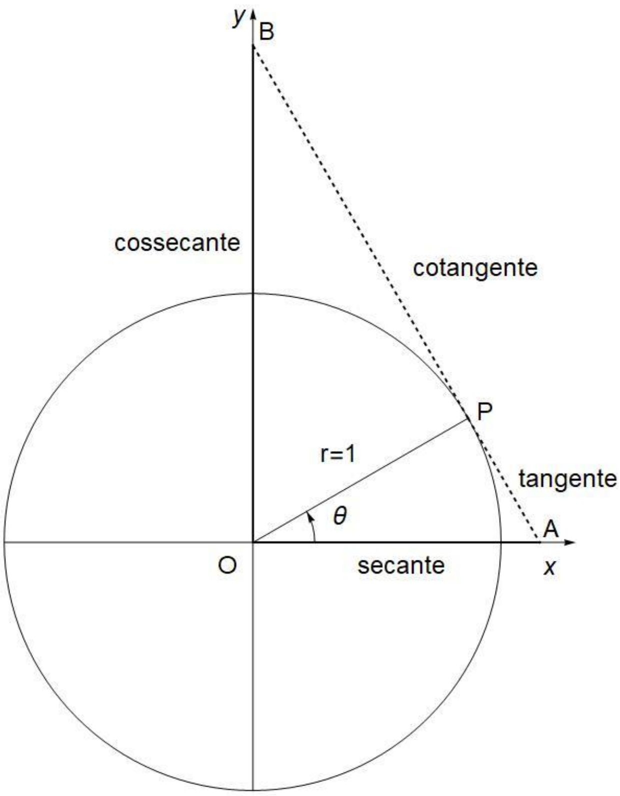


Figura 4. Outro esboço do círculo trigonométrico. Em traço grosso estão os segmentos que dão a secante e a cossecante do ângulo θ e, em linha tracejada, estão a tangente (segmento AP) e a cotangente (BP).

Questão 6. Preencha a tabela abaixo com os sinais das funções nos vários quadrantes.

quadrante	Seno	cosseno	tangente	cotangente	secante	cossecante
1º						
2º						
3º						
4º						

Questão 7. Represente graficamente a secante e a cossecante em um círculo trigonométrico para os ângulos, em rad:

a) $5\pi/6$

b) $7\pi/6$

E. As relações fundamentais entre as funções trigonométricas

De acordo com o círculo trigonométrico, o ângulo entre os segmentos que representam o seno e o coseno é reto, assim o seno e o cosseno são catetos e *r*, a hipotenusa, portanto

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{(VII.5)}$$

Essa equação (VII.5) expressa uma relação trigonométrica fundamental e usada frequentemente para determinar o seno de um ângulo quando se conhece o cosseno e vice-versa. Também ocorre muito na simplificação de equações, como por exemplo, na demonstração da relação (VII.27) na seção K adiante, além de permitir eliminar o ângulo θ quando se resolvem sistemas de equações.

Da semelhança entre o triângulo formado pelo cosseno, seno e raio e o triângulo OPA, podemos deduzir duas relações:

$$\frac{\tan\theta}{r} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\sec\theta}{r} = \frac{\mathrm{r}}{\cos\theta}$$

Usando que $r = 1$, deduz-se

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \text{(VII.6)}$$

e

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{(VII.7)}$$

De maneira parecida, o triângulo formado pelo cosseno, seno e raio também é semelhante ao triângulo BQO, chega-se a

$$\frac{\text{cotan}\,\theta}{r} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\text{cosec}\,\theta}{r} = \frac{r}{\text{sen}\,\theta}$$

de modo que, substituindo $r = 1$, deduz-se que

$$\text{cotan}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \qquad \text{(VII.8)}$$

e

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \text{(VII.9)}$$

Questão 8. Escolhendo os triângulos retângulos apropriados na Figura **4** (ou na Figura **3**), prove que:

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \qquad \text{(VII.10)}$$

$$\text{cosec}^2\,\theta = \text{cotan}^2\,\theta + 1 \qquad \text{(VII.11)}$$

Questão 9. Prove as relações (VII.10) e (VII.11) algebricamente, a partir das relações (VII.5) a (VII.9).

Questão 10. A partir da **Figura 3**, pode-se deduzir que há quatro ângulos na faixa 0 a 2π que tem seno do mesmo módulo, dois com sinal positivo e um com sinal negativo. O mesmo acontece com as demais funções trigonométricas. Na tabela abaixo, relacionamos nas linhas as várias funções trigonométricas e nas colunas, esses ângulos, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. A 2ª coluna dá os valores dessa função para θ.

Preencha as colunas vazias da tabela com os valores correspondentes à função e ao ângulo. A linha correspondente ao seno já está toda preenchida.

Função\ângulo	θ	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$2\pi - \theta$
sen	s	s	$-s$	$-s$
cos	c			
tan	t			
cotan	χ			
sec	σ			
cosec	τ			

Questão 11. Usando o círculo trigonométrico para localizar as funções, mostre que

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{(VII.12)}$$

e

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{(VII.13)}$$

A fim de facilitar a demonstração, use $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, mas essas identidades valem para qualquer ângulo.

Para ver como mudam os segmentos que correspondem às diferentes funções trigonométricas com o ângulo na faixa entre zero e noventa graus, click no link a seguir: animação com o GeoGebra (último acesso em 13/10/2019).

Os valores numéricos das funções trigonométricas para os ângulos mais comuns estão na tabela 2 abaixo.

Tabela 2. As colunas de 3 a 8 dão os valores numéricos das funções trigonométricas para os ângulos mais comuns que estão na 1ª e 2ª colunas, em radianos e graus, respectivamente.

ângulo (graus)	ângulo (rad)	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	cossecante
0	0	0	1	0	∞	1	∞
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1

F. As funções trigonométricas – gráficos e aplicação aos triângulos retângulos.

Na **Figura 5** representamos o triângulo OCD semelhante ao formado pelo seno, cosseno e raio do círculo trigonométrico, cuja hipotenusa mede ρ, em princípio, um tamanho qualquer – usamos maior que ρ, > 1, para facilitar a visão. Por conta da semelhança entre os triângulos, os lados OC e CD valem

$$\overline{OC} = \rho\cos\theta \quad \text{e} \quad \overline{CD} = \rho\operatorname{sen}\theta$$

Assim, qualquer razão entre os lados desse triângulo OCD independe de ρ, de modo que podemos usar as funções trigonométricas, sempre definidas como razões, em qualquer triângulo retângulo. Nesta seção, vamos apresentar essas propriedades para cada uma das funções separadamente, junto com seus gráficos.

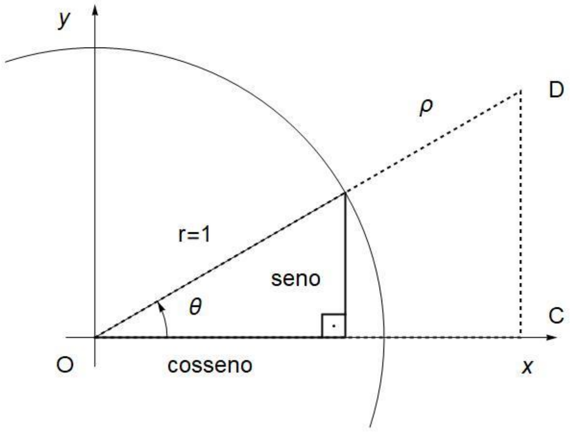


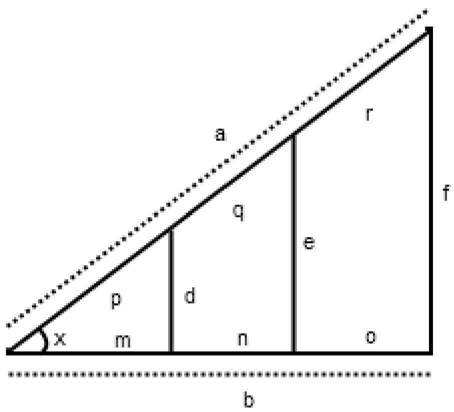
Figura 5. Esboço do círculo trigonométrico com um triângulo semelhante ao formado pelo seno, coseno e raio, para ilustrar a aplicação das funções trigonométricas na determinação dos lados de um triângulo retângulo.

1. Função seno

Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos igual a θ, a razão entre o cateto oposto a e a hipotenusa desse triângulo é o seno do ângulo, ou seja:

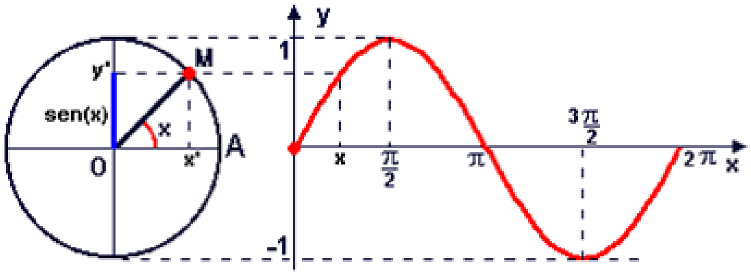
$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \tag{VII.14}$$

Com essa expressão, podemos determinar o seno do ângulo *x* dos triângulos abaixo.



$$\mathrm{sen}(x) = \frac{d}{p} = \frac{e}{p+q} = \frac{f}{a}$$

No círculo trigonométrico, cujo raio é igual a 1, pode-se verificar que o valor do sen θ pertence ao intervalo [-1,1], uma vez que seu comprimento é sempre menor ou igual ao do raio. O gráfico da função sen θ no intervalo entre 0 e 2π é



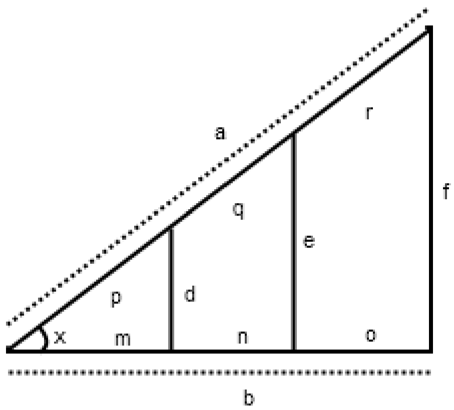
Note que a função $\operatorname{sen}\theta$ tem período igual a 2π, uma vez que esse é o ângulo que corresponde a uma volta inteira – o ponto M, marcado em vermelho no círculo, volta ao mesmo lugar depois de girar 2π em volta de O.

2. Função cosseno

Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos igual a θ, o $\cos\theta$ é a razão entre o cateto adjacente a θ e a hipotenusa desse triângulo, ou seja:

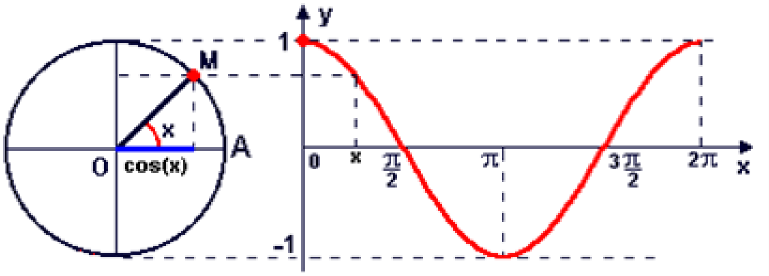
$$\cos(\theta) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \qquad \text{(VII.15)}$$

Com essa expressão, podemos determinar o cosseno do ângulo x dos triângulos abaixo.



$$\cos(x) = \frac{m}{p} = \frac{m+n}{p+q} = \frac{b}{a}$$

No círculo trigonométrico de raio igual a 1, o valor do $\cos\theta$ pertence ao intervalo [-1,1]. Abaixo segue o gráfico da função de $\cos\theta$ no intervalo entre 0 e 2π. Como seu período é 2π, pela mesma razão que a função seno, o gráfico terá a mesma forma para qualquer faixa de valores $[n\ 2\pi, (n+1)2\pi], n \in \mathbb{Z}$.

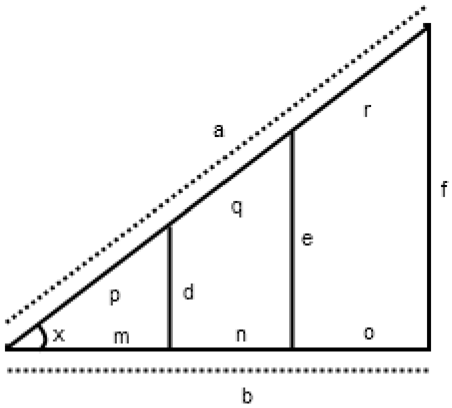


3. Função Tangente

A tangente de um ângulo θ é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente em um triângulo retângulo:

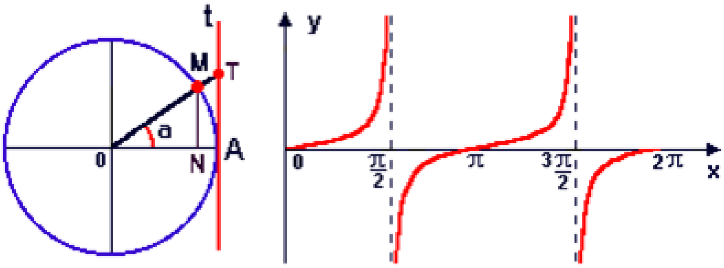
$$tg(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \tag{VII.16}$$

Com essa expressão, podemos determinar a tangente do ângulo x do triângulo abaixo de várias formas



$$\tan(x) = \frac{d}{m} = \frac{e}{m+n} = \frac{f}{b}$$

No círculo trigonométrico de raio igual a 1, o domínio da função $\tan\theta$ corresponde aos Reais diferentes de $(\pi/2) + k\pi$, com $k \in$ **Z**, uma vez que para esses valores: ..., -3π/2, -π/2, π/2, 3π/2, 5π/2,... a tangente tende ao infinito. Abaixo, o gráfico da função $\tan\theta$ no intervalo entre 0 e 2π, que tem período igual a 2π, pela mesma razão que o seno.



Questão 12. Faça os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ no mesmo sistema de eixos.

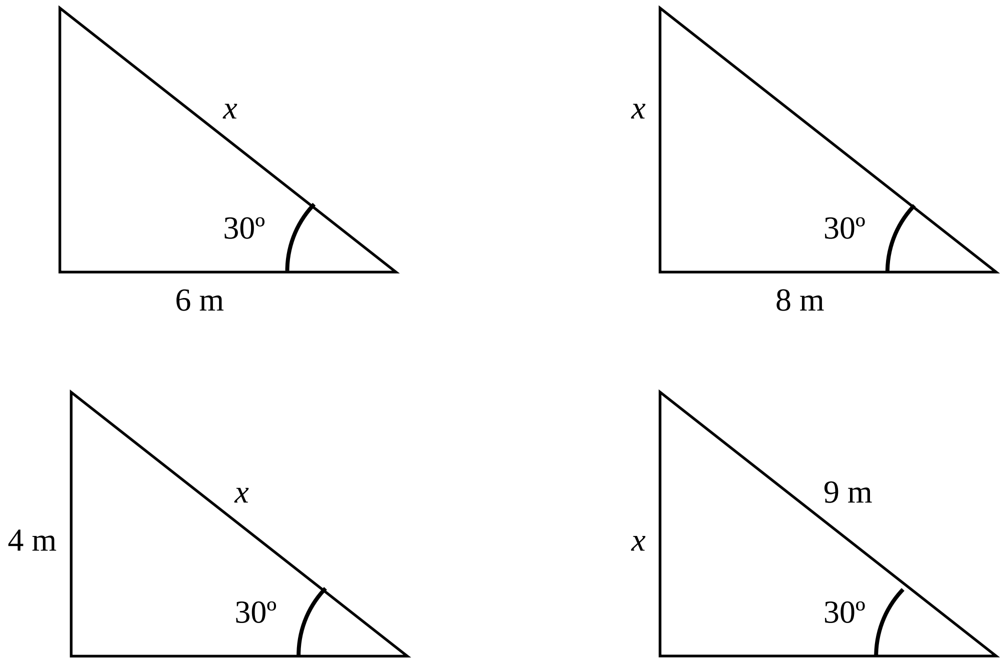
Determine os valores de x que resolvem a equação $\operatorname{sen} x = \cos x$.

Questão 13. Faça os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $\tan x$ no mesmo sistema de eixos.

Determine os valores de x que resolvem a equação $\operatorname{sen} x = \tan x$.

Questão 14. Nos esboços dos triângulos retângulos das figuras abaixo, que não estão em escala, conhece-se a medida de um lado e a medida de um dos ângulos agudos.

Determine a medida do lado marcado x nos seguintes casos:



G. Fase

Na seção anterior, mostramos os gráficos das funções trigonométricas de argumento igual à grandeza representada na abscissa. No entanto, é comum que o argumento seja uma transformação linear da abscissa, como no exemplo da seção A, em que o argumento do cosseno é

$$\theta(t) = 0{,}042 + 5{,}82\ t$$

Nessa expressão, o deslocamento da origem é chamado frequentemente de fase, φ, no caso

$$\varphi = 0{,}042 \text{ rad}$$

Note que uma transformação como essa não muda a aparência do gráfico: a fase causa um deslocamento do desenho em relação à origem, e o fator que multiplica t faz com que a função cruze o zero em valores diferentes do gráfico da função $\cos x$.

Questão 15. Esboce os gráficos de

a) $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
b) $\text{cosec}\,\frac{\theta}{2}$
c) $\tan\left(0{,}4\,x - \frac{\pi}{4}\right)$

H. Relações trigonométricas importantes

A ocorrência de funções trigonométricas com argumentos formados por uma soma é frequente, como ilustrado desde a seção A, mas é mais fácil lidar com argumentos que tem um único termo. Por isso, é conveniente saber transformar o argumento que é uma soma em uma combinação de funções trigonométricas. As fórmulas básicas são as do seno e cosseno de uma soma de ângulos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \qquad \text{(VII.17)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad \text{(VII.18)}$$

É interessante deduzir essas fórmulas; claro que é necessária muita imaginação para encontrar o caminho desta dedução, que não é nada evidente, mas ele já foi achado – leia, reflita e convença-se que as fórmulas (VII.17) e (VII.18) acima estão corretas. Primeiro, construímos três triângulos retângulos, um com um ângulo b e hipotenusa igual a 1 e os outros dois com ângulo a e hipotenusas iguais aos catetos do primeiro triângulo: $\operatorname{sen} b$ e $\cos b$. A **Figura 6** abaixo identifica todos os lados dos três triângulos, em particular daquele que tem hipotenusa igual a 1, cujos catetos valem $\operatorname{sen} b$ e $\cos b$.

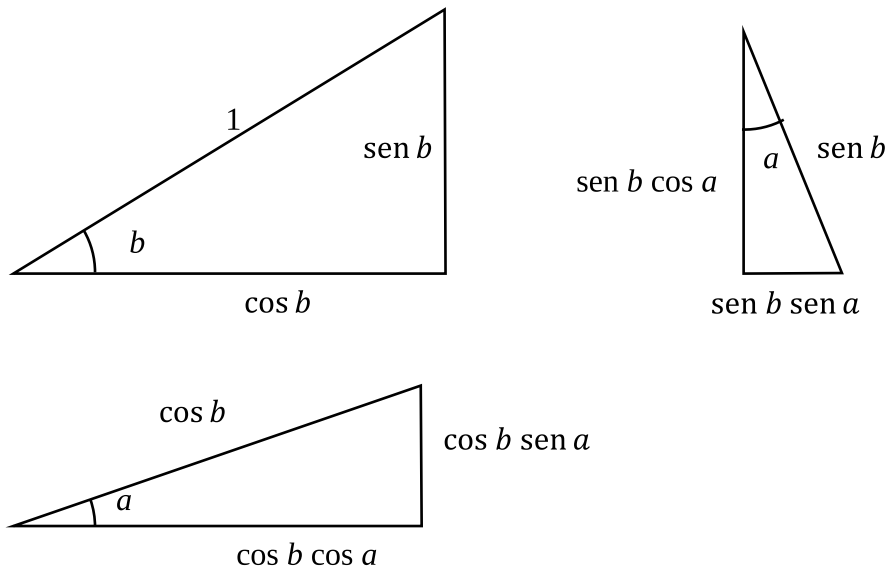


Figura 6. Triângulos usados para demonstrar a formula do seno da soma de ângulos. A figura dá as medidas dos ângulos e dos lados.

Agora, é preciso juntar esses três triângulos pelos lados que medem $\operatorname{sen} b$ e $\cos b$, conforme a **Figura 7** abaixo, em que, usando uma linha tracejada, definimos um quarto triângulo retângulo, com um ângulo igual a $a + b$ e hipotenusa 1. Desse tangram de 3 peças, saem as fórmulas (17) e (18).

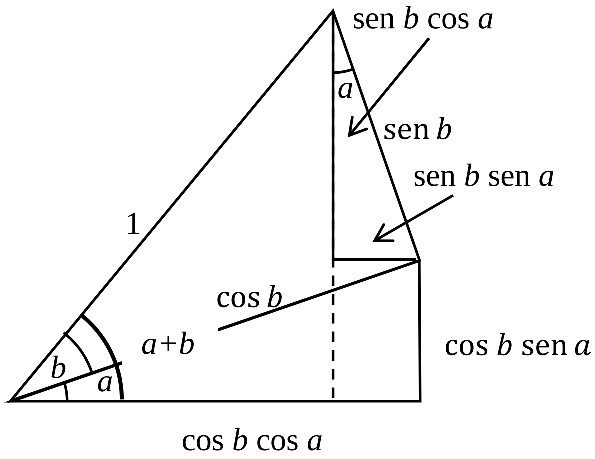


Figura 7. Montagem dos triângulos da figura 6, destinada a deduzir as fórmulas do seno e cosseno da soma de ângulos.

A medida do cateto oposto ao ângulo a + b é o $\mathrm{sen}(a+b)$, uma vez que a hipotenusa vale 1 e, de outro ponto de vista, é a soma dos catetos dos outros dois triângulos, $\mathrm{sen}\, a \cos b + \mathrm{sen}\, b \cos a$, provando, portanto, a relação (VII.17). Já o cateto adjacente ao ângulo a + b é o $\cos(a+b)$, que é uma diferença dos catetos dos outros dois triângulos, $\cos a \cos b - \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b$, provando a relação (VII.18). Essa fórmula vale para qualquer ângulo, não se limitando a ângulos menores que o reto, como foi usado para montar a figura.

Questão 16. Prove que

$$\mathrm{sen}(2a) = 2\, \mathrm{sen}\, a \cos a \qquad \text{(VII.19)}$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\, a \qquad \text{(VII.20)}$$

A partir das fórmulas (VII.17) e (18), pode-se encontrar as fórmulas para o seno e o cosseno de uma diferença de ângulos, que vamos precisar em seguida:

$$\mathrm{sen}(a-b) = \mathrm{sen}\big(a+(-b)\big) = \mathrm{sen}\, a \cos b - \mathrm{sen}\, b \cos a \qquad \text{(VII.21)}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b \qquad \text{(VII.22)}$$

Note que a soma membro a membro das equações (VII.17) e (21) dá uma fórmula que transforma o produto de dois senos em uma soma (e vice-versa),

$$\mathrm{sen}\, a \cos b = \frac{1}{2}\big(\mathrm{sen}(a+b) + \mathrm{sen}(a-b)\big) \qquad \text{(VII.23)}$$

a soma das equações (VII.18) e (22) dá

$$\cos a \cos \mathrm{b} = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big) \tag{VII.24}$$

e, finalmente, a diferença das equações (VII.18) e (22) resulta em

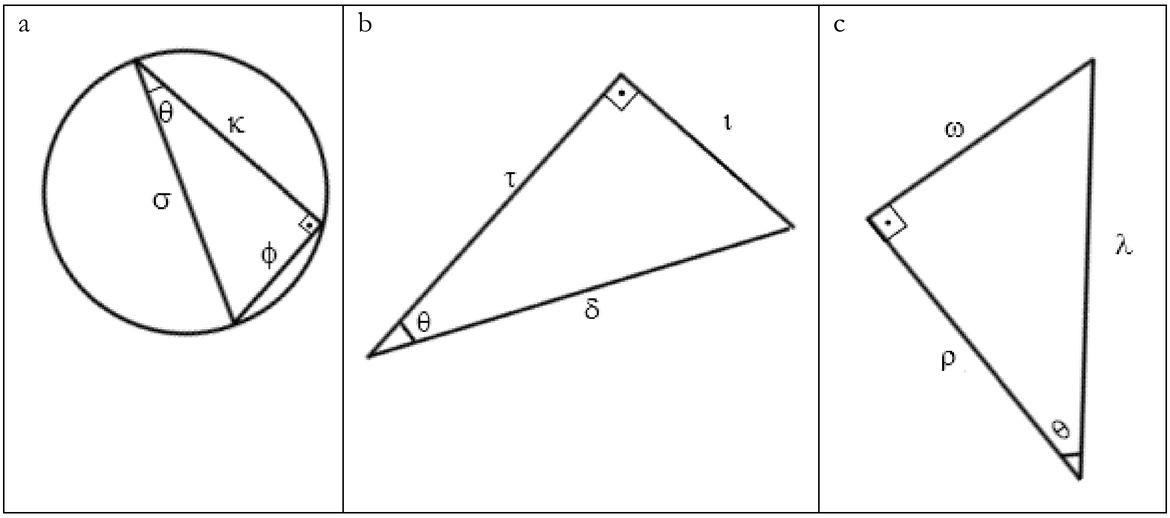
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{b} = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big) \tag{VII.25}$$

Estas 3 últimas relações são conhecidas como fórmulas de prostaférese.

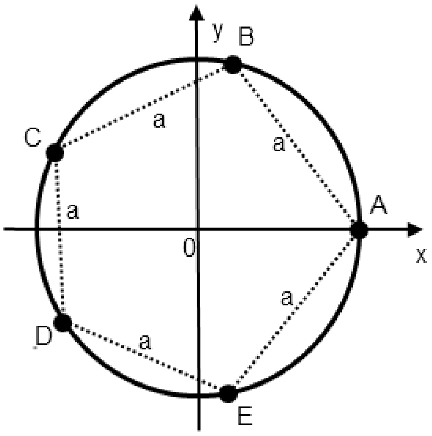
Questão 17. Calcule cos(15º).

I. Exercícios.

1) De cada triângulo abaixo, determine os valores de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente do ângulo ϑ em função dos tamanhos dos lados dos triângulos.



2) Considere uma circunferência trigonométrica dividida em cinco partes iguais, por meio dos pontos A, B, C, D e E.



Dê as medidas algébricas (em radianos) dos conjuntos de arcos que têm extremidades nesses pontos, ou seja, AB, AC, AD e AE.

3) Simplifique $A = \dfrac{a^2\cos(0) - b^2\,\mathrm{sen}\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{a\cos^2(\pi) + b\,\mathrm{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) - 2ab\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$

4) Simplifique a expressão $(sen(x)+\cos(x))^2 + (sen(x)-\cos(x))^2$, para $x \in$ R.

5) Considere que $\mathrm{sen}(x) - \cos(x) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, com x um número real.

Determine o valor de $\mathrm{sen}(x)\cdot\cos(x)$.

6) A solução da equação de segundo grau::

$x^2 sen(\theta) - 2x\cos(\theta) - sen(\theta) = 0$

é (escolha uma das alternativas)

a) $x = tg(\theta) \pm \sec(\theta)$
b) $x = \cot g(\theta) \pm \sec(\theta)$
c) $x = tg(\theta) \pm \cos\sec(\theta)$
d) $x = \cot g(\theta) \pm \cos\sec(\theta)$

7) Simplifique a expressão $y = \dfrac{sen(-\alpha)}{sen(\pi+\alpha)} - \dfrac{tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)} + \dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

8) Resolva a equação $2\cos^2 x + 5\,sen\,x - 4 = 0$, no intervalo $0 \le x \le 2\pi$.

9) Resolva as equações abaixo, por meio dos gráficos das funções envolvidas. Em cada caso, construa os gráficos das funções intermediárias num mesmo par de eixos.

a) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,(x)$

b) $2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$

c) $4\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$

J. A lei dos senos

Essa é outra relação importante, especialmente porque vale para qualquer triângulo. Considere a Figura 8 abaixo, em que os lados que medem *a*, *b* e *c* são opostos aos ângulos α, β e γ, respectivamente. A lei dos senos é

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \qquad \text{(VII.26)}$$

ou seja, os lados têm tamanhos proporcionais ao seno do ângulo oposto.

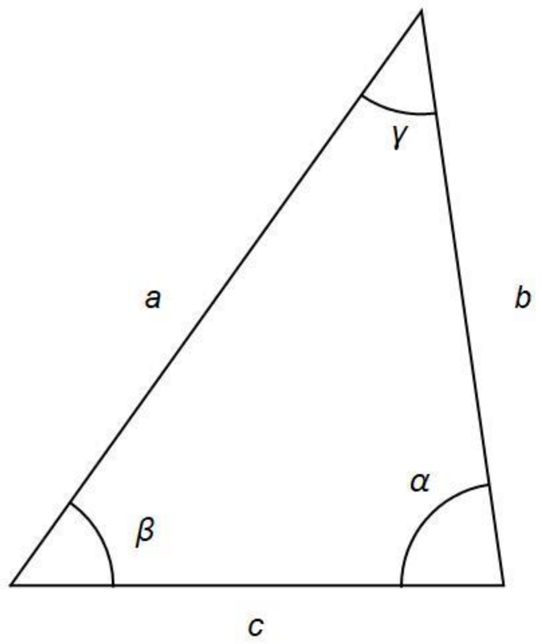
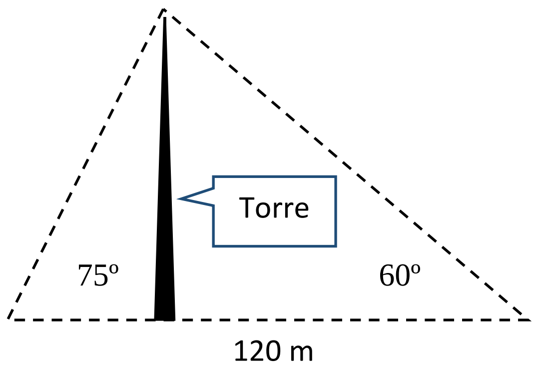


Figura 8. Ilustração de um triângulo escaleno, em que os elementos da Lei dos Senos estão identificados.

Questão 18. A fim de determinar a altura de uma torre que fica dentro de um quarteirão cujo interior é inacessível, mas fica em uma região completamente plana e horizontal, mede-se a largura do quarteirão (120 m) e dois ângulos de visada do topo da torre; os dados obtidos estão na figura abaixo, que está fora de escala.



Determine:

a) o terceiro ângulo do triângulo.
b) um dos lados desconhecidos do triângulo (em linha tracejada) com a lei dos senos.
c) a altura da torre, com o resultado do item anterior e o ângulo adequado para usar a relação (VII.14).

Questão 19. Prova da lei dos senos. Na Figura **8**, desenhe a altura em relação ao lado *b*; essa altura é o cateto comum a dois triângulos retângulos de hipotenusas *a* e *c* e ângulos γ e α. Use a relação (VII.14) para os senos de γ e α e elimine o cateto comum, a fim de mostrar que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Convença-se que pode completar a demonstração, usando qualquer uma das outras duas alturas.

K. A lei dos cossenos.

Outra relação importante é a chamada lei dos cossenos. No triângulo da **Figura** pode-se determinar *c* a partir dos outros lados e o ângulo formado por eles,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad \text{(VII.27)}$$

Note que, quando $\gamma = 90^o$, a expressão acima recai no teorema de Pitágoras.

A demonstração é uma aplicação do que vimos até agora. Primeiro, no lado esquerdo da **Figura 9**, estão marcados dois pontos A e B de coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B). A distância entre A e B pode ser calculada como o tamanho da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $x_B - x_A, y_B - y_A$, portanto

$$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

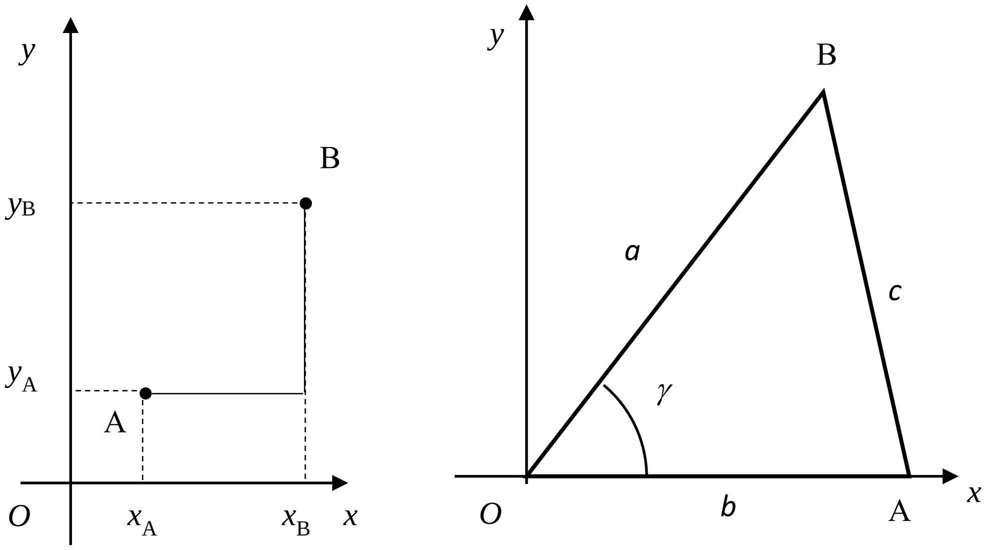


Figura 9. Ilustração de um triângulo e do sistema de coordenadas cartesianas usadas para provar a lei dos cossenos.

Essa fórmula será usada no cálculo do lado c. Para isso, no lado direito da Figura **9**, o sistema cartesiano foi escolhido com origem no vértice do ângulo formado pelos lados a e b. As coordenadas do ponto B são $(a\cos\gamma\,,\ a\,\mathrm{sen}\,\gamma)$ e do ponto A, $(b, 0)$. Assim, o quadrado da distância entre A e B é

$$c^2 = (a\cos\gamma - b)^2 + (a\,\mathrm{sen}\,\gamma - 0)^2 = a^2\cos^2\gamma - 2\,ab\cos\gamma + b^2 + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\gamma$$

que se reduz à (VII.27) após fatorar a^2 e substituir a relação fundamental (VII.5).

L. As funções trigonométricas na geometria plana

Na **Figura 10** abaixo, representamos um pássaro que se desloca do Sul para o Norte, em um dia em que o vento sopra exatamente do Leste para o Oeste. Como o pássaro voa em relação ao ar, que o carrega para o lado (o vento é o movimento do ar), ele precisa voar numa direção inclinada ao eixo Sul-Norte. Assim, no referencial preso ao ar (é preciso um físico para prender um referencial no ar em movimento), o pássaro orienta seu voo no ângulo α da figura.

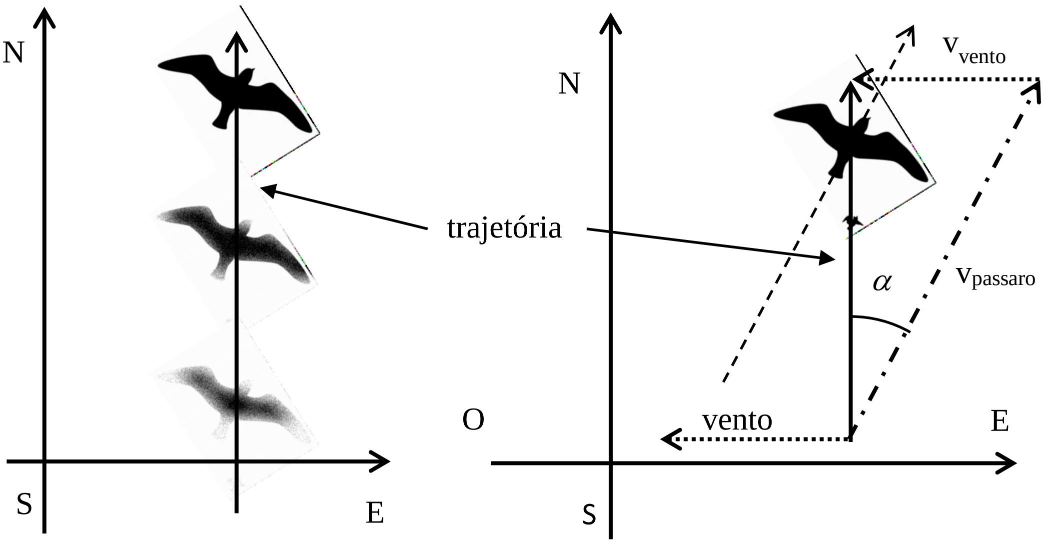


Figura 10. Movimento de um pássaro visto em um referencial preso a Terra, em um dia em que o vento sopra do Leste para o Oeste. O diagrama da esquerda esboça o movimento e o da direita, exibe o diagrama de velocidades que explica por que o pássaro voa com o bico inclinado em relação à sua trajetória vista da terra. A linha tracejada fina que atravessa o desenho do pássaro mostra onde estão os pontos que ele ocupou ou ocupará *no referencial preso ao ar*.

Assim, considerando que a soma das velocidades do vento com a do pássaro em relação ao ar dá um vetor exatamente na direçao Sul-Norte, podemos calcular

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v_{vento}}{v_{passaro(ar)}}$$

Note que, em relação ao solo, a velocidade é uma combinação dos movimentos, mas é o pássaro quem determina sua velocidade em relação ao ar, de modo que no lado direito da equação acima é essa velocidade que é conhecida pelo pássaro, que tem que se ajeitar para voar formando esse ângulo α com a direção Sul-Norte de forma que siga do Sul para o Norte.