

**MAT230 – 2/2019**

**Notas de Aula**

**História do 5º Postulado de  
Euclides**

**Profa. Ana Paula Jahn**

**IME-USP**

# Livro de Malba Tahan

*O escândalo da Geometria*

**1947:** talvez um dos primeiros livros sobre Geometrias Não-euclidianas no Brasil

**Título:** provavelmente devido à D'Alembert

**Finalidade:** obra elementar de divulgação (p.65)

**Estrutura:** texto dividido em tópicos

**Índice geral:** no final do livro, com a lista de tópicos (54 no total)

*“La definition et les propriétés de la ligne droit, ainsi que des lignes parallèles son l’écueil et, pour ainsi dire, le scandale des Elements de Géométrie”.*

**D’ALEMBERT**

*A definição e as propriedades da linha reta e das paralelas são o escolho\* e, por assim dizer, o escândalo dos Elementos de Geometria.*

**D’ALEMBERT**

\*escolho = obstáculo, empecilho, entrave, inconveniente, embaraço, espinho, perigo

# Postulados de Euclides

- 1º postulado: Fiquem postulados traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- 2º postulado: Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- 3º postulado: E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- 4º postulado: E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

(EUCLIDES, 2009)



# O 5º Postulado

- 5º Postulado: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, se encontrarão no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(EUCLIDES, 2009)

# O 5º Postulado

- **Postulado de Playfair:** Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.
- **Definição:** Duas retas coplanares são ditas paralelas se a sua interseção for vazia.

- Por cerca de 2000 anos, a **Geometria de Euclides** foi considerada como a **única geometria possível**.
- A obra *Os Elementos* de Euclides era **inquestionável**.
- Pela forma como era apresentado o 5º postulado, os matemáticos pensavam que ele fosse uma consequência dos demais, isto é, um teorema.
- Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes, ou então de substituí-lo por outro mais simples.

- Matemáticos como **John Wallis** (1616-1703), **Saccheri** (1667-1733), **Lambert** (1728-1777), **John Playfair** (1748-1819) e **Legendre** (1752-1833) não resolveram esta questão, mas dos seus trabalhos resultou um conjunto de **proposições equivalentes** ao 5º Postulado (presumindo a veracidade dos outros postulados da Geometria Euclidiana).
- Os trabalhos independentes de **János Bolyai** (1802-1860) e **Lobatschewski** (1792-1856) provaram que o 5º postulado não é uma consequência lógica dos quatro anteriores.



- **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) escreveu a **Bolyai** dizendo que já tinha chegado aos mesmos resultados, mas não os tinha publicado.
- Os trabalhos de **Lobatschewski** e **Bolyai** não foram devidamente reconhecidos na altura e só em 1870, cerca de quatro décadas depois das primeiras publicações, quando se tornaram conhecidas as notas e a correspondência de Gauss acerca do assunto, e depois da sua morte, é que a descoberta das **geometrias não Euclidianas** mereceu a devida atenção.

- A **Geometria Hiperbólica** obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo seguinte axioma:
- *Axioma Hiperbólico: Dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.*
- Apesar do valor inegável dos trabalhos de Lobatschewski e János Bolyai, eles **não demonstraram a consistência da Geometria Hiperbólica**, ou seja, que o sistema axiomático não conduz a nenhuma contradição.

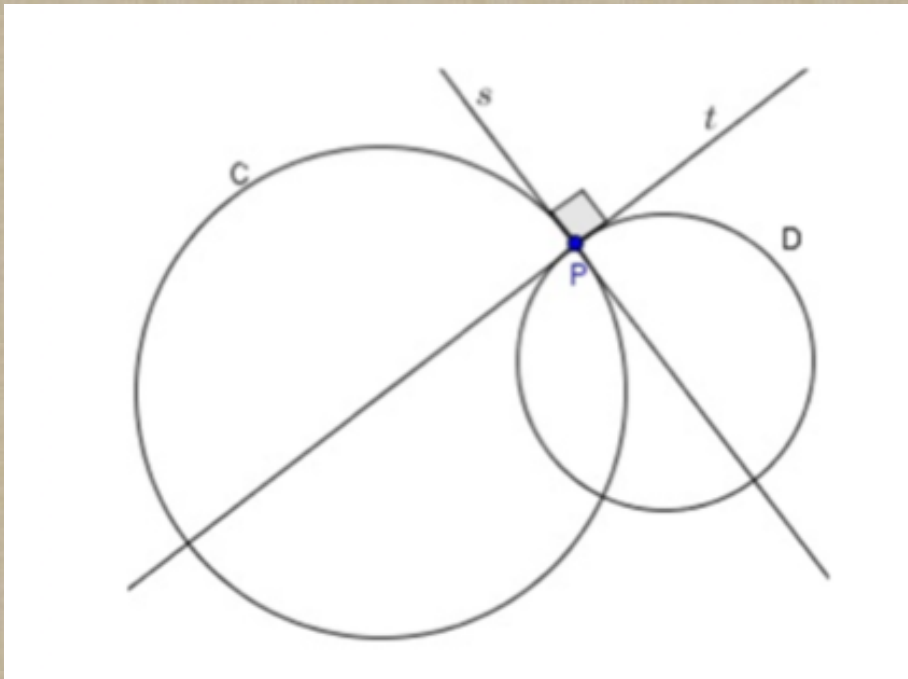
- A consistência das *Geometrias não Euclidianas* prova-se com a **existência de modelos**, que se obtêm a partir da atribuição de **interpretações** aos chamados termos primitivos (pontos, retas...) de modo a transformar os axiomas em afirmações verdadeiras à luz dessas interpretações.
- Em 1868, Eugenio **Beltrami** (1835-1900) apresentou o **primeiro modelo para a Geometria Hiperbólica**.

- A existência desse modelo revelou que se a **Geometria Hiperbólica** contém alguma contradição então essa contradição poderia ser transposta para a **Geometria Euclidiana**. Admitindo então que a Geometria Euclidiana é consistente, deduz-se assim que a Geometria Hiperbólica também o é.
- Em 1882, Henri **Poincaré** (1854-1912) apresentou um segundo modelo da **Geometria Hiperbólica**: o modelo de Poincaré num semi-plano.

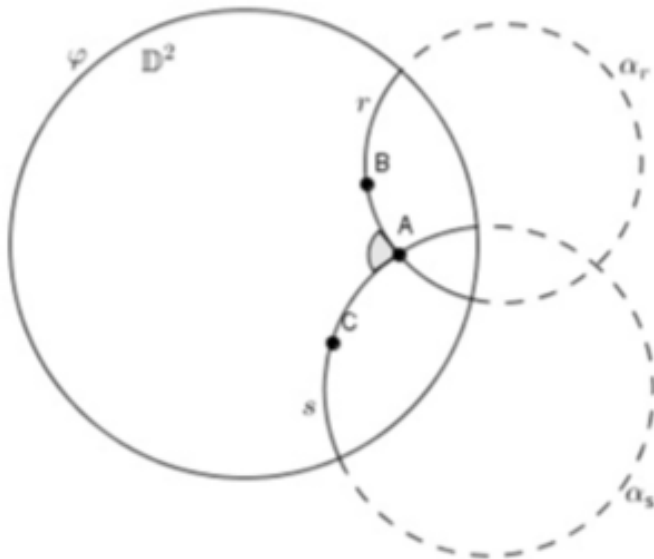
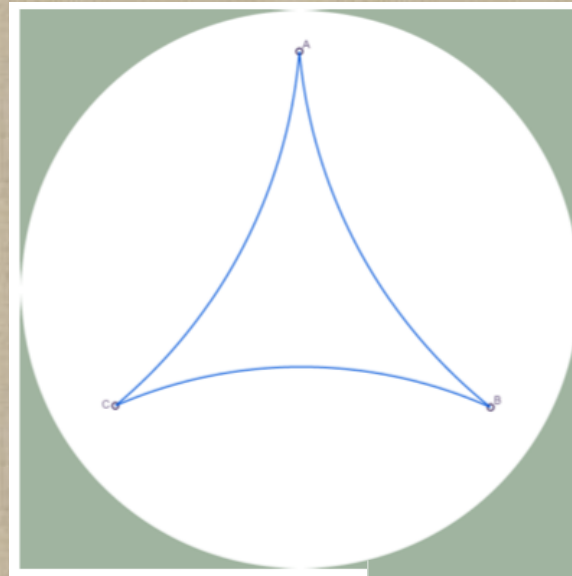
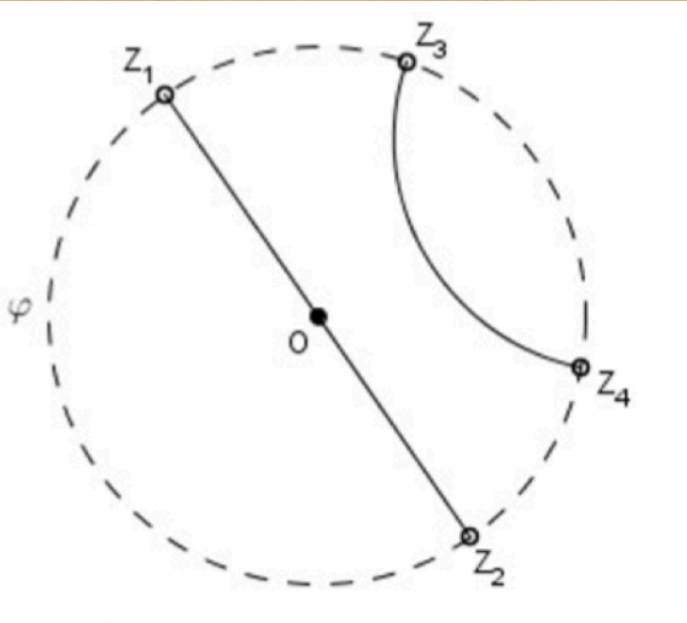


# Modelo de Disco de Poincaré

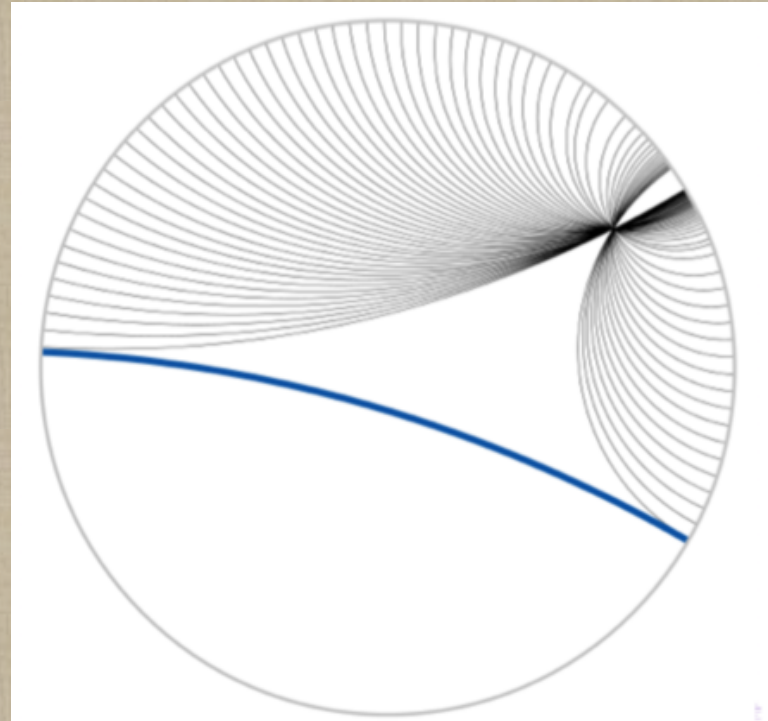
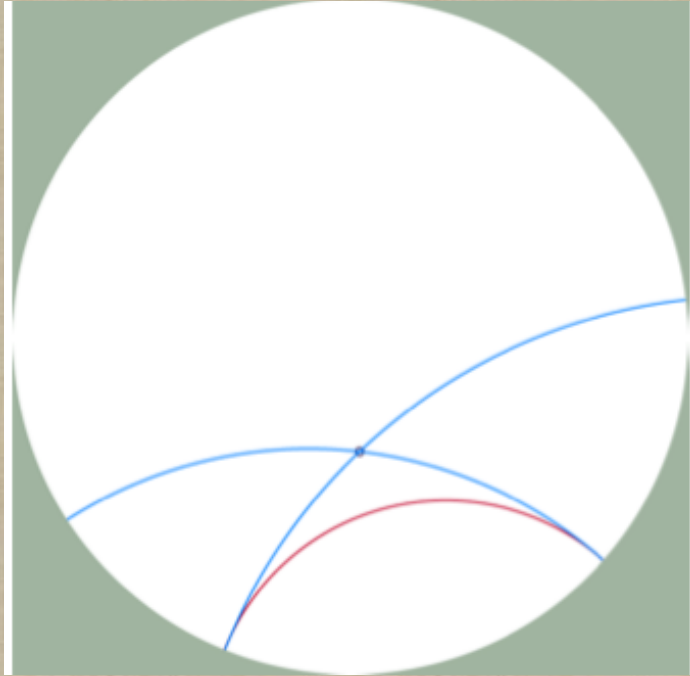
- Plano-h: interior de um círculo  $C$
- Reta-h: Arcos de circunferências ortogonais à  $C$



# Modelo de Disco de Poincaré



# Modelo de Disco de Poincaré



- A descoberta das *Geometrias não Euclidianas* teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da Matemática.
- A partir dessa altura, surgiram vários **sistemas axiomáticos**, sendo o mais famoso o de **David Hilbert** (1862-1943), *Fundamentos da Geometria*, cuja estrutura tem marcadamente a influência de Euclides.



# Equivalências do V Postulado

- Afirmer que uma determinada proposição  $P$  é um substituto do 5º postulado é o mesmo que dizer que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais a proposição  $P$  coincide com a **Geometria de Euclides**.
- A maneira de provar que um proposição  $P$  é um substituto para o 5º postulado é a seguinte:  
Primeiramente, devemos demonstrar que  $P$  é uma proposição da Geometria Euclideana.  
Depois, devemos demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais  $P$ , pode-se provar o 5º postulado como uma proposição.

# Equivalências do V Postulado

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Existe um par de retas equidistantes.
- Todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.
- Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

# Equivalências do V Postulado

- Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.
- Quaisquer duas retas paralelas possuem uma perpendicular em comum
- Teorema de Pitágoras

# Referências

- Barbosa, J. L. **Geometria Hiperbólica** (5.<sup>a</sup> ed.). Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- Mello e Souza. **O Escândalo da Geometria** (1a. Ed.). Rio de Janeiro: Editora Aurora, 1947.
- Euclides. **Os Elementos**. Tradução e introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.