Capítulo 4 - O Postulado das Paralelas e a Geometria Euclidiana

4.1 Teorema. Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

4.2 Teorema. Por um ponto não pertencente a uma reta passa, no mínimo, uma reta paralela à reta dada.

4.3 Definição. Uma transversal a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.

4.4 Definição. Seja r uma transversal às retas s e t, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t, tais que A e B estejam em lados opostos de r. Os ângulos $\widehat{APQ}$ e $\widehat{BQP}$ são chamados ângulos alternos internos formados por s, t e a transversal r.

4.5 Teorema. Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.

4.6 Definição. Sejam $\hat{x}$ e $\hat{y}$ ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se $\hat{z}$ é tal que $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são ditos ângulos correspondentes.

4.7 Teorema. Se duas retas são cortadas por uma transversal, e se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas.

Postulado 13. (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

4.8 Teorema. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

4.9 Teorema.

a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes.

b) Duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

c) Se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular a outra.

4.10 Teorema. A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180.

4.11 Corolário.

a) Seja dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então o terceiro par é também de ângulos correspondentes congruentes.

b) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

c) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.

4.12 definição. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Uma diagonal é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

4.13 Definição. Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

4.14 Teorema. Em um paralelogramo valem as seguintes propriedades:

a) Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $ABCD$ é um paralelogramo, então $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ e $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

b) Dois lados opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

c) Dois ângulos opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

d) Dois ângulos consecutivos quaisquer em um paralelogramo são suplementares.

4.15 Corolário. Se r e s são retas paralelas e se P e Q são dois pontos quaisquer em r, então as distâncias de P e Q a s são iguais.

4.16 Definição. A distância entre duas retas paralelas é a distância de qualquer ponto de uma delas à outra.

4.17 Teorema.
a) Dado um quadrilátero em que ambos os pares de lados opostos são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.
b) Se dois lados de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.
c) Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam, então o quadrilátero é um paralelogramo.
4.18 Teorema. O segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.
4.19 Definições.
a) Um losango é um paralelogramo cujos lados são congruentes.
b) Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são retos.
c) Um quadrado é um retângulo cujos lados são congruentes.
4.20 Teorema.
a) Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem quatro ângulos retos, e o paralelogramo é um retângulo.
b) Em um losango, as diagonais são perpendiculares e se bisseccionam.
c) Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.
4.21 Definição. Se uma transversal intersecciona duas retas, respectivamente, nos pontos A e B, dizemos que r e s determinam o segmento $\overline{AB}$ sobre a transversal.
4.22 Teorema. Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.
4.23 Corolário. Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.
4.24 Teorema. As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto.
4.25 Definição. O centróide ou baricentro de um triângulo é o ponto em que as medianas são concorrentes.
4.26 Lema. Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, temos $AB/CD = n/m$ onde n e m são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento c tal que $AB = nc$ e $CD = mc$.
4.27 Teorema. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.
4.28 Teorema. Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.
4.29 Teorema. (Teorema de Tales) Se duas retas são transversais a um conjunto de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra.

Capítulo 5 - Semelhança

5.1 Definição. Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.

Notação. Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF com a correspondência $A \leftrightarrow D,\ B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$.

5.2 Teorema. (O Teorema de Semelhança A.A.A.) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D},\ \widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

5.3 Corolário. (Caso A.A.) Seja S uma correspondência entre os vértices de dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência S é uma semelhança.

5.4 Teorema. (Caso de Semelhança L.A.L.) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e $AB/DE = AC/DF$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

5.5 Teorema. (Caso de Semelhança L.L.L.) Se dois triângulos ABC e DEF são tais que seus lados satisfazem a relação $AB/DE = AC/DF = BC/EF$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

5.6 Teorema. A altura correspondente à hipotenusa de qualquer triângulo retângulo divide-o em dois triângulos que são semelhantes um ao outro e também semelhantes ao triângulo original.

5.7 Corolário. Em um triângulo retângulo,

(a) a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos em que é dividida a hipotenusa e

(b) cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento da hipotenusa que é a projeção deste cateto sobre ela.

5.8 Teorema. (Teorema de Pitágoras) Num triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

5.9 Proposição. (Recíproca do Teorema de Pitágoras) Se o quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, tendo o ângulo reto oposto ao primeiro lado.