Capítulo 4

O Postulado das Paralelas e a Geometria Euclidiana

Nos três primeiros capítulos apresentamos resultados que independem da Geometria Euclidiana. São verdadeiros tanto para ela como para algumas das chamadas Geometrias Não-Euclidianas. Por Geometria Não-Euclidiana, entendemos um sistema geométrico construído sem a ajuda da hipótese euclidiana das paralelas e contendo uma suposição sobre as paralelas, que é incompatível com a de Euclides.

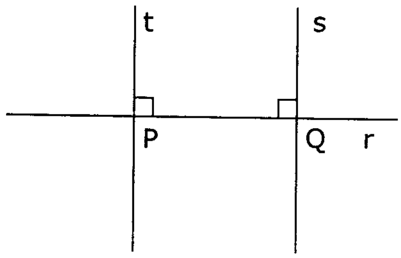
A Geometria Hiperbólica ou de Lobachevsky, por exemplo, admite a existência de pelo menos duas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto fora dela; e, na chamada Geometria Riemanniana, duas retas têm sempre um ponto comum. Estas duas geometrias não admitem o Postulado de Euclides, que afirma a existência e unicidade da paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela. Para uma leitura mais específica sobre Geometrias Não-Euclidianas, veja [13] ou [21].

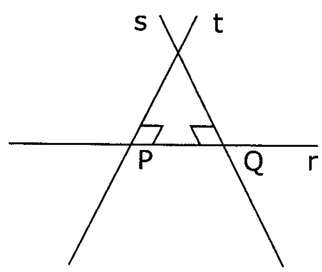
Neste capítulo, após alguns resultados, apresentamos o Postulado das Paralelas ou Postulado de Euclides, pois é o que caracteriza a Geometria Euclidiana, a qual passaremos a desenvolver.

Condições para o Paralelismo de Retas

4.1 Teorema. Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

Demonstração. Sejam s e t retas distintas perpendiculares a uma mesma reta r.



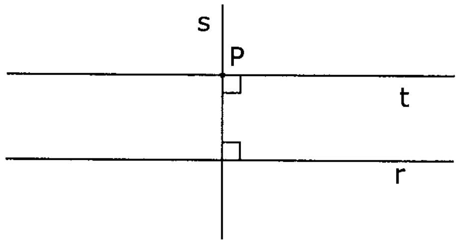


Se s e t não fossem paralelas, r, s e t determinariam um triângulo com dois ângulos retos, o que é absurdo, pois contradiz o Corolário 3.3.

Observação. Quando uma reta r for paralela a uma reta s, esse fato será denotado por $r \parallel s$

4.2 Teorema. Por um ponto não pertencente a uma reta passa, no mínimo, uma reta paralela à reta dada.

Demonstração. Consideremos a reta r e um ponto P não pertencente a ela.

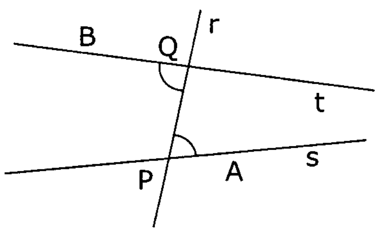


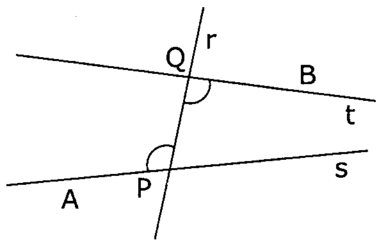
Seja s a reta passando por P e perpendicular a r, e seja t a reta passando por P e perpendicular à s. Pelo teorema anterior, temos $t \parallel r$.

4.3 Definição. Uma **transversal** a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.

Observação. Se s e t forem concorrentes, uma reta que cruza as duas retas no ponto comum não é uma transversal.

4.4 Definição. Seja r uma transversal às retas s e t, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t, tais que A e B estejam em lados opostos de r. Os ângulos APQ e BQP são chamados **ângulos alternos internos** formados por s, t e a transversal r.





4.5 Teorema. Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.

Demonstração. Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal nos pontos P e Q respectivamente. Sejam $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ os ângulos alternos internos congruentes.

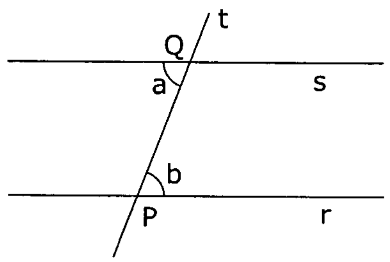


figura 1

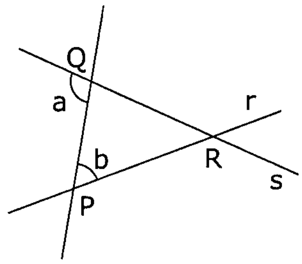


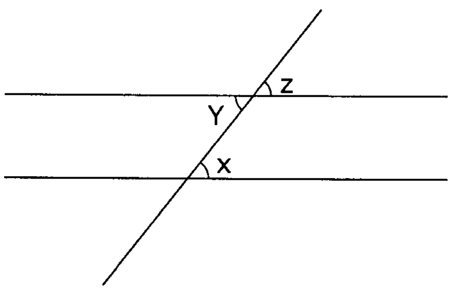
figura 2

Se r e s se interseccionam em algum ponto R, como na figura 2, elas formam um triângulo RQP do qual $\widehat{a}$ é um ângulo externo, sendo $\widehat{b}$ um ângulo interno não adjacente a ele.

Pelo Teorema do Ângulo Externo temos $\widehat{a} > \widehat{b}$, o que contradiz nossa hipótese.

Logo r e s são paralelas.

4.6 Definição. Sejam $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se $\widehat{z}$ é tal que $\widehat{y}$ e $\widehat{z}$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\widehat{x}$ e $\widehat{z}$ são ditos **ângulos correspondentes**.



A demonstração do teorema seguinte é deixada como exercício.

4.7 Teorema. Se duas retas são cortadas por uma transversal, e se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas.

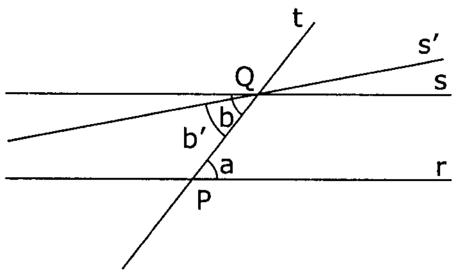
As recíprocas dos Teoremas 4.5 e 4.7 são verdadeiras, mas para demonstrá-las precisamos utilizar o Postulado das Paralelas, o que enunciamos a seguir. Este Postulado vai nos dar a unicidade da reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela, cuja existência já foi afirmada no Teorema 4.2. A partir daqui usaremos livremente o Postulado das Paralelas de Euclides, embora boa parte dos resultados possa ser demonstrada em outras "geometrias" também.

O Postulado das Paralelas

Postulado 13. (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta, passa no máximo uma reta paralela à reta dada.

4.8 Teorema. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Demonstração. Consideremos as retas paralelas r e s, e uma transversal t que as corta nos pontos P e Q respectivamente.



Suponhamos que os ângulos alternos internos a e b não sejam congruentes.

Seja s' uma reta que passa por Q formando com r e t os ângulos alternos internos a e b' congruentes.

Pelo Teorema 4.5, a reta s' é paralela a reta r. Disso e da hipótese temos, pois, passando por Q, duas retas s e s', ambas paralelas à reta r.

Isto contradiz o Postulado das Paralelas. Logo $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ são congruentes.

As demonstrações dos próximos resultados são simples, e são deixadas como exercício.

4.9 Teorema.

a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes.

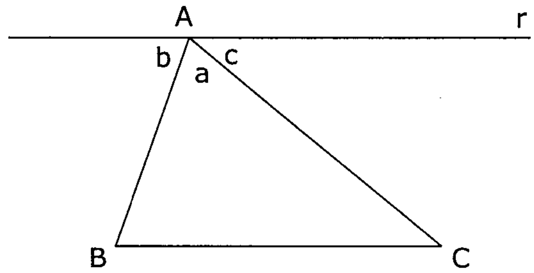
b) Duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

c) Se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.

Vejamos agora alguns resultados relacionados com triângulos.

4.10 Teorema. A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180.

Demonstração. Dado o $\triangle ABC$, seja r a reta paralela ao lado $\overline{BC}$ e passando pelo vértice A. Consideremos os ângulos a, b e c, como aparecem na figura.



Utilizando os Postulados da Adição de Ângulos e do Suplemento chegamos a:

$$m\hat{a} + m\hat{b} + m\hat{c} = 180.$$

Como $\overleftrightarrow{AB}$ é transversal a $\overleftrightarrow{BC}$ e a r, temos, pelo Teorema 4.8, que $\hat{b} \cong \widehat{ABC}$. Analogamente, mostramos que $\hat{c} \cong \widehat{ACB}$. Logo $m\widehat{BAC} + m\widehat{ABC} + m\widehat{BCA} = 180$.

Deste teorema, obtemos vários resultados importantes.

4.11 Corolário.

a) Seja dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então o terceiro par é também de ângulos correspondentes congruentes.

b) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

c) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.

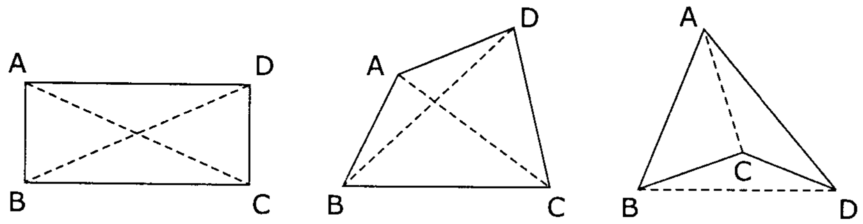
Quadriláteros

4.12 Definição. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Lados opostos de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam.

Dois lados são *consecutivos* se têm um vértice comum.

Uma *diagonal* é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

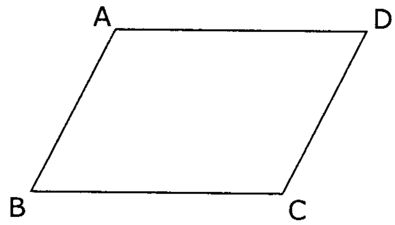


Num quadrilátero $ABCD$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados opostos, também o são os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.

Os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ ou $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, por exemplo, são lados consecutivos, e $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais.

Consideremos um quadrilátero convexo. Nele, dois ângulos são *opostos* se não têm um lado comum; caso contrário são chamados ângulos *consecutivos.*

4.13 Definição. Um **paralelogramo** é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.



Temos os seguintes resultados que mostram **propriedades dos paralelogramos**, cujas demonstrações deixamos como exercício.

4.14 Teorema. Em um paralelogramo valem as seguintes propriedades:

a) Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $ABCD$ é um paralelogramo, então $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ e $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

b) Dois lados opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

c) Dois ângulos opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

d) Dois ângulos consecutivos quaisquer em um paralelogramo são suplementares.

4.15 Corolário. Se r e s são retas paralelas e se P e Q são dois pontos quaisquer em r, então as distâncias de P e Q a s são iguais.

Essa propriedade das retas paralelas pode ser expressa da seguinte forma: "Duas retas paralelas eqüidistam em toda a sua extensão".

4.16 Definição. A distância entre duas retas paralelas é a distância de qualquer ponto de uma delas à outra.

No próximo teorema veremos **condições para que um quadrilátero seja um paralelogramo.**

4.17 Teorema.

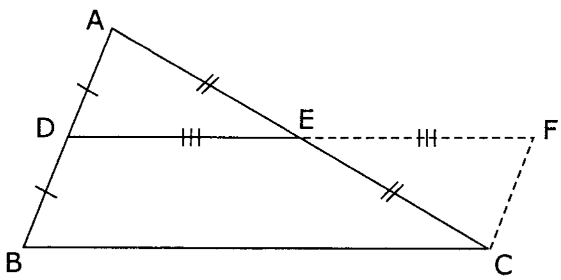
a) Dado um quadrilátero em que ambos os pares de lados opostos são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

b) Se dois lados de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

c) Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam, então o quadrilátero é um paralelogramo.

4.18 Teorema. O segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC com D e E sendo os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



Vamos mostrar que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ e que $DE = \frac{1}{2}BC$. Seja F o ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{ED}$ tal que $EF = DE$. Pelo Postulado L.A.L., temos $\triangle EFC \cong \triangle EDA$. Portanto $D\hat{A}E \cong F\hat{C}E$.

Pelo Teorema 4.5 obtemos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$. Como por hipótese $AD = DB$, e da congruência dos triângulos EFC e EDA, vale $DA = FC$, então $BD = FC$. Logo $BDFC$ é um paralelogramo, e daí $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

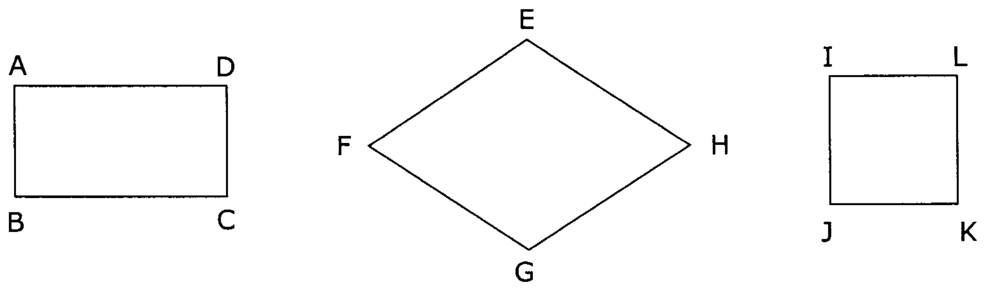
Utilizando o Teorema 4.14b, concluímos que $DE = \frac{1}{2}BC$.

4.19 Definições. a) Um **losango** é um paralelogramo cujos lados são congruentes.

b) Um **retângulo** é um paralelogramo cujos ângulos são retos.

c) Um **quadrado** é um retângulo cujos lados são congruentes.

Na figura temos o retângulo $ABCD$, o losango $EFGH$ e o quadrado $IJKL$.



Deixamos como exercício as demonstrações dos resultados que seguem.

4.20 Teorema.

a) Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem quatro ângulos retos, e o paralelogramo é um retângulo.

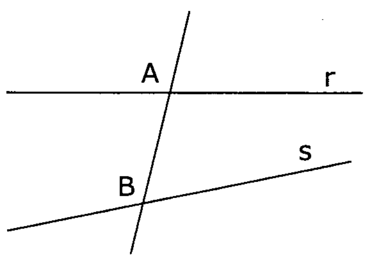
b) Em um losango, as diagonais são perpendiculares e se bisseccionam.

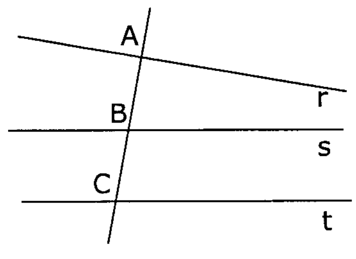
c) Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade e o Teorema de Tales

4.21 Definição. Se uma tranversal intersecciona duas retas r e s, respectivamente, nos pontos A e B, dizemos que r e s determinam o segmento AB sobre a transversal.

Se uma transversal intersecciona três retas r, s e t nos pontos A, B e C, respectivamente, e se $AB = BC$, então dizemos que as três retas determinam segmentos congruentes sobre a transversal.

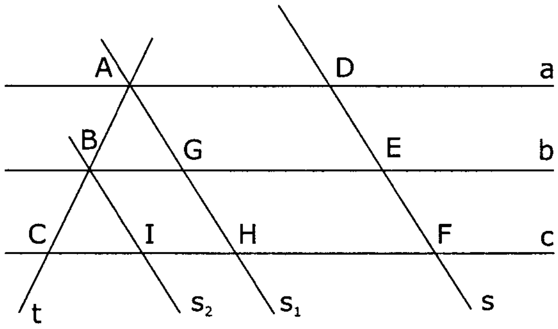




4.22 Teorema. Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Demonstração. Consideremos uma transversal t interseccionando as retas paralelas a, b e c nos pontos A, B e C, respectivamente, com $AB = BC$. Seja s uma outra transversal interseccionando estas retas nos pontos D, E e F, respectivamente. Vamos mostrar que $DE = EF$.

Demonstraremos primeiro o teorema no caso em que s e t não são paralelas e $A \neq D$, como na figura abaixo.



Seja s_1 a reta paralela a s que passa por A, e que intersecciona b e c em G e H, respectivamente; e seja s_2 a reta paralela a s que passa por B, e que intersecciona a reta c em I. Temos assim formados os paralelogramos $AGED$ e $BIFE$, e disso decorre

$$\overline{AG} \cong \overline{DE} \text{ e } \overline{BI} \cong \overline{EF} \qquad (*).$$

Agora, pelo teorema A.L.A. temos que $\triangle ABG \cong \triangle BCI$ pois $AB = BC$, por hipótese; e $\widehat{ABG} \cong \widehat{BCI}$ e $\widehat{BAG} \cong \widehat{CBI}$, ambos pelo Teorema 4.9a. Portanto $AG = BI$

Substituindo em (*) obtemos $DE = EF$.

Vamos considerar o caso em que as transversais se interseccionam em um ponto A da reta a. Seja s_1 a reta que passa por B, paralela a s e que intersecciona c em I (veja figura 1 abaixo). Temos que $\triangle ABE \cong \triangle BCI$ (pelo Teorema A.L.A.) e portanto $AE = BI$. Como $BIFE$ é um paralelogramo, temos $BI = EF$. Portanto $AE = EF$, isto é, $DE = EF$.

No caso em que as duas transversais s e t são paralelas, como na figura 2, o resultado decorre imediatamente das propriedades dos paralelogramos.

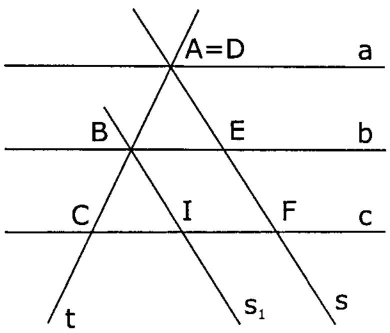


figura 1

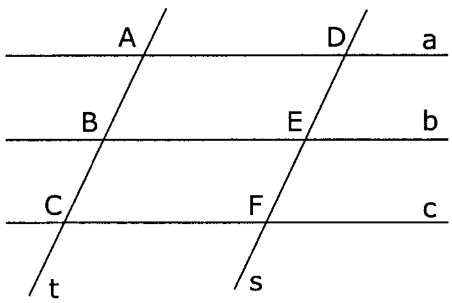


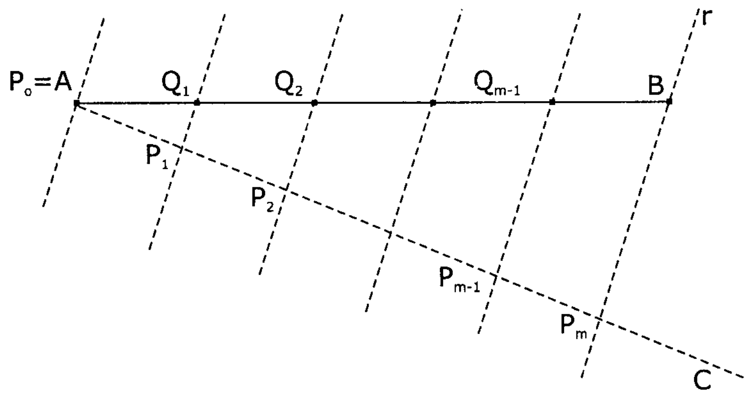
figura 2

Este teorema pode ser generalizado como no corolário a seguir, cuja demonstração deixamos como exercício.

4.23 Corolário. Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

Uma aplicação do teorema anterior é a divisão de um segmento em m partes congruentes. (Veja capítulo sobre Construções Geométricas Elementares.)

De fato, se queremos dividir o segmento AB em m partes congruentes, primeiramente traçamos uma semi-reta AC tal que $\overleftrightarrow{AC}$ seja distinta de $\overleftrightarrow{AB}$. Tomemos P_0, $P_1, \ldots, P_m$, pontos na semi-reta AC tais que $P_0 = A$ e $\overline{P_0P_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \ldots \cong \overline{P_{m-1}P_m}$ (o Teorema da Localização de Pontos nos garante tal fato).



Seja r a reta P_mB.

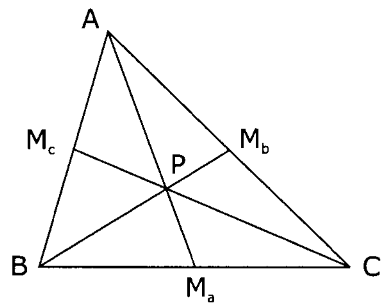
Pelos pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$, traçamos retas paralelas a r obtendo os pontos Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{m-1}$ no segmento AB.

Pelo corolário anterior, temos que $\overline{AQ_1} \cong \overline{Q_1Q_2} \cong \ldots \cong \overline{Q_{m-1}B}$ e os pontos obtidos dividiram $\overline{AB}$ em m partes congruentes.

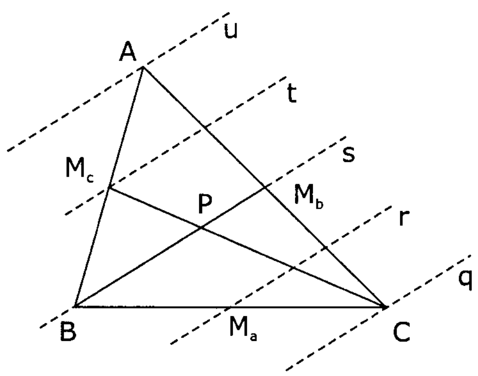
Uma outra aplicação interessante é o seguinte resultado.

4.24 Teorema. As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto.

Demonstração. Consideremos, no triângulo ABC, os pontos M_a, M_b e M_c como pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Vamos demonstrar que existe um ponto P que está em $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ e $\overline{CM_c}$, respectivamente, e AP $= \frac{2}{3}AM_a$, $BP = \frac{2}{3}BM_b$ e CP $= \frac{2}{3}CM_c$.



Sejam r, s e t com $s = \overleftrightarrow{BM_b}$ retas paralelas que dividem o lado $\overline{AC}$ em quatro segmentos congruentes. Consideremos as retas u e q, ambas paralelas a r, s e t, passando por A e C, respectivamente.



A reta t divide o segmento AB em dois segmentos congruentes, e, portanto, o ponto M_c está na reta t; além disso, as retas t, s, r e q dividem a mediana CM_c em três segmentos congruentes, e portanto, se P é o ponto de intersecção das medianas $\overline{BM_b}$ e $\overline{CM_c}$, temos $CP = \frac{2}{3}CM_c$.

Do mesmo modo, com retas paralelas a $\overleftrightarrow{AM_a}$ mostramos que se P' é a intersecção das medianas $\overline{CM_c}$ e $\overline{AM_a}$, então $CP' = \frac{2}{3}CM_c$.

Portanto, pelo Teorema da Localização de Pontos obtemos $P' = P$, e assim as três medianas são concorrentes.

Como sabemos agora que a mediana $\overline{AM_a}$ passa por P, podemos concluir que $AP = \frac{2}{3}AM_a$ e $BP = \frac{2}{3}BM_b$.

4.25 Definição. O **centróide** ou **baricentro** de um triângulo é o ponto em que as medianas são concorrentes.

Antes de enunciarmos o próximo teorema, vejamos uma propriedade a respeito da razão entre os comprimentos de dois segmentos.

4.26 Lema. Dados dois segmentos AB e CD, temos $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{n}{m}$ onde n e m são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento c tal que $AB = n\text{c}$ e $CD = m\text{c}$.

Demonstração. Sejam dados os segmentos AB e CD e os números positivos n e m tais que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{n}{m}$. Sejam $P_0 = A$, $P_1, \ldots, P_n = B$, n pontos em $\overline{AB}$, tais que $\overline{P_0P_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \ldots \cong \overline{P_{n-1}P_n}$. Seja c o comprimento de tais segmentos.

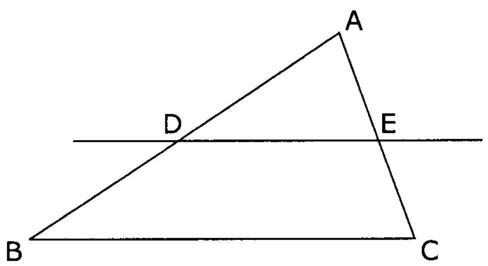
Então $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{nc}{mc}$. Como, por construção, $AB = nc$, segue que $CD = mc$.

A recíproca é imediata.

Observação. Observamos que quando $\dfrac{AB}{CD}$ é um número irracional a situação acima não ocorre.

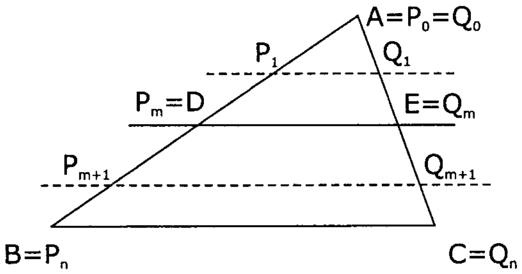
4.27 Teorema. **(Teorema Fundamental da Proporcionalidade)** Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC como na figura. Seja r uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ a qual intersecciona os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, nos pontos D e E. Vamos mostrar que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.



Vamos iniciar considerando o caso em que $\dfrac{AB}{AD}$ é um número racional, isto é, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{n}{m}$ com m e n números inteiros positivos. Pelo lema anterior, existe um segmento de comprimento c tal que $AD = mc$ e $AB = nc$, e ainda com $m < n$ pois $AD < AB$. Consideremos então em $\overrightarrow{AB}$ os pontos $P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots, P_n$, com $P_0 = A$, $P_m = D$ e

$P_n = B$ tais que $P_iP_{i+1} = \text{c}$, com $i = 0, \ldots, m, \ldots, n-1$.



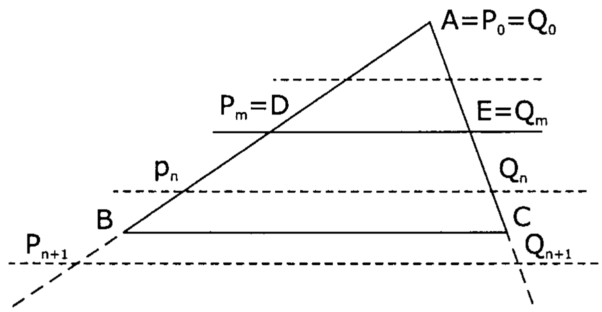
Agora tracemos paralelas à $\overleftrightarrow{BC}$ por $P_1, \ldots, P_{n-1}$. Estas retas cortam o segmento AC em pontos que denotamos por $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$. Pelo Corolário 4.23, existe um número real positivo d tal que $Q_iQ_{i+1} = \text{d}$ para $i = 0, \ldots, n-1$ com $Q_0 = A, Q_m = E$ e $Q_n = C$. Portanto $AC = n\text{d}$ e $AE = m\text{d}$. Assim, pelo lema anterior temos

$$\frac{AC}{AE} = \frac{nd}{md} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc} = \frac{AB}{AD}.$$

Agora vamos considerar o caso em que $\dfrac{AB}{AD}$ é um número irracional.

Seja m um número inteiro positivo.

Consideremos na semi-reta AB pontos $P_0 = A, P_1, \ldots, P_m = D, \ldots, P_n, P_{n+1}$ tais que $P_iP_{i+1} = \text{c}$, $i = 0, 1, \ldots, m, m+1, \ldots, n$, e daí $AD = m\text{c}$ para algum c, e, ainda, $n\text{c} < AB < (n+1)\text{c}$.



Então temos $$\frac{n}{m} < \frac{AB}{AD} < \frac{n+1}{m} \quad \text{(a)}.$$

Tracemos paralelas à $\overleftrightarrow{BC}$ por $P_1, \ldots, P_{n+1}$.

Estas retas cortam a semi-reta AC em pontos $Q_0 = A, Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ e, pelo teorema anterior, temos que existe um número real positivo d tal que Q_iQ_{i+1} =d,

$i = 0, \ldots, n$ com $Q_0 = A, AE = m$d e nd $< AC < (n+1)$d. Portanto obtemos

$$\frac{n}{m} < \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m} \quad \text{(b)}.$$

De (a) e (b) obtemos

$$\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

Como esta desigualdade vale para qualquer número inteiro positivo m, temos

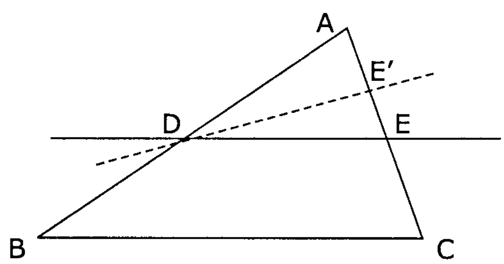
$$\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} = 0 \text{ ou seja } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

No Capítulo 11 apresentaremos uma outra demonstração deste teorema, a qual envolve equivalência de áreas.

Temos a recíproca deste teorema.

4.28 Teorema. Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Consideremos a reta DE onde D é um ponto entre A e B, e E é um ponto entre A e C com $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.



Seja $\overleftrightarrow{DE'}$ a reta passando por D, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$ e interseccionando $\overleftrightarrow{AC}$ no ponto E'. Pelo teorema anterior temos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE'}$$

e, portanto, $AE' = AC\dfrac{AD}{AB}$.

Mas, por hipótese temos $AE = AC\dfrac{AD}{AB}$.

Portanto $AE' = AE$. Logo $E = E'$, e $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.

Como conseqüência do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos o Teorema de Tales.

4.29 Teorema. **(Teorema de Tales)** Se duas retas são transversais a um conjunto de retas paralelas, então à razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra.

A demonstração deste teorema segue essencialmente a do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, com a utilização de propriedades das proporções entre números reais.

Uma aplicação importante do Teorema Fundamental da Proporcionalidade é o Teorema da Bissetriz, cuja demonstração está proposta entre os exercícios que seguem. Como conseqüência, temos a divisão harmônica de um segmento, o que será feito no capítulo referente aos lugares geométricos.

Nota Histórica.

Por mais de dois mil anos, geômetras ocuparam-se com tentativas de provar o postulado das paralelas como um teorema a partir dos postulados anteriores. Isso resultou em desenvolvimentos da geometria moderna.

A primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas foi publicada em 1773, de autoria do jesuíta italiano Girolano Saccheri (1667-1733). Em seu trabalho, Saccheri aceitou as vinte e oito proposições dos "Elementos" de Euclides que não necessitavam do postulado das paralelas para suas demonstrações, e estudou o quadrilátero $ABCD$, no qual os ângulos A e B são retos e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. Ele mostrou que os ângulos D e C são congruentes (veja exercício 2.22) e, então, que há três possibilidades: os ângulos D e C são ambos agudos, ambos retos ou ambos obtusos.

Seu plano de trabalho consistia em mostrar que a hipótese dos ângulos agudos e a hipótese dos ângulos obtusos levariam a uma contradição; então, valeria a hipótese dos ângulos retos, a qual Saccheri mostrou implicar o postulado das paralelas.

No caso dos ângulos obtusos, Saccheri teve pouca dificuldade para chegar a uma contradição, o que não ocorreu no caso dos ângulos agudos. Saccheri acreditou, erroneamente, ter chegado a uma contradição no caso da hipótese dos ângulos agudos; com isto, acabou encontrando diversos resultados da Geometria Não-Euclidiana. Após obter méritos destes teoremas, agora clássicos da Geometria Não-Euclidiana, Saccheri forçou uma contradição no desenvolvimento de suas idéias, utilizando de noções sobre elementos infinitos.

Entretanto, o verdadeiro desenvolvimento da Geometria Não-Euclidiana não se baseou no trabalho de Saccheri e só ocorreu por volta do início do século XIX com Lobachevsky, Bolyai e Gauss, que trabalharam quase simultaneamente.

O estudo das Geometrias Não-Euclidianas teve um significado especial ao mostrar por que falharam as tentativas de provar o postulado das paralelas de Euclides. O desenvolvimento bem-sucedido de uma geometria consistente usando os quatro primeiros postulados de Euclides e substituindo o quinto por outro incompatível com ele, prova que o quinto postulado é, de fato, independente dos anteriores; assim, não poderia ser provado. Todo este trabalho foi importante para o desenvolvimento da matemática.

Exercícios

4.1. a) Mostre que, se duas retas cortadas por uma transversal formam um par de ângulos alternos internos congruentes, então formam também o outro par de ângulos alternos internos congruentes.

b) Mostre o mesmo resultado para os pares de ângulos correspondentes.

4.2. Mostre que uma reta paralela à base de um triângulo isósceles e que intersecciona os outros dois lados do triângulo, forma outro triângulo isósceles.

4.3. Mostre que se r e s são duas retas paralelas, e m é uma terceira reta que intersecciona r em um ponto P, então m também intersecciona s.

4.4. Mostre que:

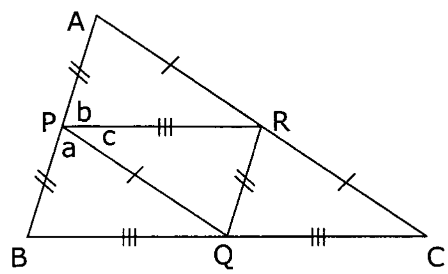
a) **a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é** $(n-2).180$.

b) **a medida de cada um dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é** $\frac{(n-2).180}{n}$.

4.5. Demonstre que a bissetriz de um ângulo externo no vértice oposto à base de um triângulo isósceles é paralela à base.

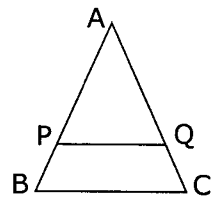
4.6. Considere o exercício 2.22 e responda: podemos também mostrar agora que os ângulos C e D são retos?

4.7. Na figura ao lado temos $AR = RC = PQ$, $AP = PB = RQ$ e $BQ = QC = PR$. Mostre que $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180$, sem utilizar o Postulado 13. (Sugestão. Mostre que $m\widehat{a} = m\widehat{A}$, $m\widehat{b} = m\widehat{B}$ e $m\widehat{c} = m\widehat{C}$.)



4.8. Demonstre o Corolário 4.23.

4.9. Sejam $AB = AC$ e $AP = AQ$ como na figura ao lado. Mostre que a reta PQ é paralela à reta BC.



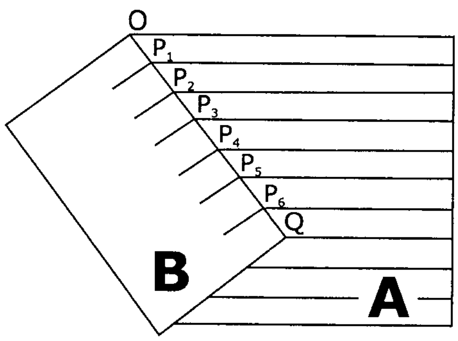
4.10. Mostre que, se por um ponto na base de um triângulo isósceles traçamos retas paralelas aos lados congruentes, então se forma um paralelogramo cujo perímetro é igual à soma dos comprimentos dos lados congruentes.

4.11. Mostre que a soma dos comprimentos dos segmentos, traçados desde um ponto qualquer na base de um triângulo isósceles até os outros dois lados e respectivamente perpendicualares a eles, é igual à altura correspondente a qualquer destes lados.

4.12. Mostre que as diagonais de um quadrilátero cortam-se em seus pontos médios se, e somente se, o quadrilátero for um paralelogramo.

4.13. Um **trapézio** é um quadrilátero em que dois lados são paralelos. Os lados paralelos são chamados *bases* do trapézio e os outros dois são chamados *laterais*. Um **trapézio** é **isósceles** se suas laterais são congruentes. Mostre que, no trapézio isósceles $ABCD$ com *bases* $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tem-se $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{D}$.

4.14. O procedimento ilustrado na figura pode ser feito para dividir uma folha de papel $\boldsymbol{B}$ em colunas de larguras iguais. Se $\boldsymbol{A}$ é uma folha de papel com pautas e $\boldsymbol{B}$ é uma segunda folha colocada sobre ela na forma indicada, explique por que $OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5 = P_5P_6 = P_6Q$.



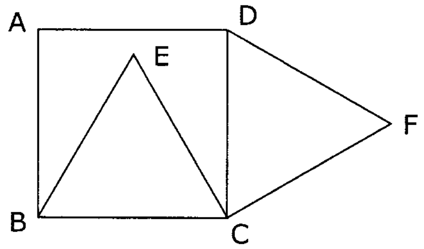
4.15. Seja $ABCD$ um paralelogramo e sejam M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Mostre que a reta MD é paralela à reta BN.

4.16. Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

4.17. Descreva um procedimento para calcular a altura de uma árvore sem medi-la.

4.18. Sejam P e Q pontos não pertencentes a uma reta r, ambos num mesmo lado de r. Suponha que as distâncias de P e Q à r sejam iguais. Mostre que $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela à reta r.

4.19. Considere os triângulos equiláteros EBC e FDC, e o quadrado $ABCD$ como na figura. Mostre que os pontos A, E e F são colineares.



4.20. Prove o **Teorema das Bissetrizes** : a) *A bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados*, isto é, se ABC é um triângulo e $\overrightarrow{AD}$ é a bissetriz do $\widehat{A}$ com D pertencente ao lado BC, então $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$. (Sugestão. Trace pelo ponto B uma reta paralela ao segmento AD, a qual encontrará a semi-reta CA no ponto E. Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.)

b) *A reta que contém a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo escaleno referente a um dos vértices do triângulo encontra a reta suporte do lado oposto em um ponto que forma, com os outros dois vértices, segmentos proporcionais aos outros dois lados do triângulo*, isto é, se no triângulo ABC, $\overrightarrow{AM}$ é bissetriz externa referente ao vértice A com M em $\overleftrightarrow{BC}$, então $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{MC}{AC}$. (Sugestão análoga à da parte **a**.)

4.21. Utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e propriedades das proporções entre números reais, demonstre o Teorema de Tales para um conjunto de quatro retas paralelas.