Mecânica Quântica I - 4302403

Respostas da 9ª lista

1) a) $E_n^1 = 2\alpha/a$ para n ímpar. As funções de onda com n par valem zero no centro do poço, portanto ignoram a perturbação.
b) Os três primeiros termos não nulos da expansão de primeira ordem de ψ_1 têm $n = 3, 5$ e 7:

$$\psi_1^1(x) \approx \frac{m\alpha}{\hbar^2\pi^2}\sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) + \frac{1}{6}\sin\left(\frac{7\pi x}{a}\right)\right]$$

2) a) Como $k \to (1+\epsilon)k$, temos $\omega \to \sqrt{1+\epsilon}\omega$, ento

$$E_n \to \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\sqrt{1+\epsilon} \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\left[1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \mathcal{O}(\epsilon^\ni)\right]$$

b) A perturbação é a nova hamiltoniana subtraída da antiga: $H' = \frac{1}{2}k'x^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{\epsilon}{2}kx^2$, logo $H' = \epsilon V(x)$, que dá a correção de primeira ordem para a energia

$$E_n^1 = \epsilon\langle V\rangle = \frac{\epsilon}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

que é exatamente o primeiro termo na expansão de Taylor em a).

3) a) Sistema sem perturbação:

- Estado fundamental:

$$\psi_1^0(x_1, x_2) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2};$$

- Primeiro estado excitado:

$$\psi_2^0(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)\right], \quad E_2 = \frac{5}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}.$$

b) $E_1^1 = -\frac{3}{2}V_0$ e $E_2^1 = -2V_0$.

4) Como x é proporcional a $(a + a^\dagger) \Rightarrow E_n^1 = 0$.

5) a) Definindo $H_0|\pm\rangle^0 = \pm E_0|\pm\rangle^0$,

$$E_+^1 =^0 \langle +|H'|+\rangle^0 = \alpha\lambda, \quad E_-^1 =^0 \langle -|H'|-\rangle^0 = \beta\lambda.$$

b) As correções para os autoestados são

$$|+\rangle^1 = \frac{\lambda\mu^*}{2E_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle^1 = -\frac{\lambda\mu}{2E_0}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$