Mecânica Quântica I - 4302403

Respostas da 8ª lista

2) Prob($S_{1z} \to -\hbar/2$) $= 1$.

3) Reescrevendo a hamiltoniana,

$$H|s\ m\rangle = \frac{A}{2}\left[s(s+1) - \frac{3}{2}\right]|s\ m\rangle.$$

Portanto os autoestados são $|00\rangle$, com energia $-3A/4$ não degenerada, e $|1m\rangle$, com energia $A/4$ triplamente degenerada ($m = -1, 0, 1$).

4) a) Mésons têm spin 0 ou 1.
b) Bárions têm spin 1/2 ou 3/2.

5) Considere a função de onda de um sistema de duas partículas idênticas dada por:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_b(\vec{r}_1)].$$

a) Se Ψ_a e Ψ_b são ortogonais e normalizadas, determine A para que Ψ tambem seja normalizada.
b) Se $\Psi_a = \Psi_b$, quem é A para o caso dos bósons?

6) a)
i) Bósons idênticos: $E_{mn} = \hbar\omega(m + n + 1)$.

$$\Psi^+_{mn}(x_1, x_2) = A\left[\psi_m(x_1)\psi_n(x_2) + \psi_m(x_2)\psi_n(x_1)\right], \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\delta_{mn}$$

ii) Férmions idênticos (sem spin): $E_{mn} = \hbar\omega(m + n + 1)$.

$$\Psi^-_{mn}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_m(x_1)\psi_n(x_2) - \psi_m(x_2)\psi_n(x_1)\right]$$

b) i) Bósons:
Estado fundamental:

$$\Psi^+_{00}(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right], E_{00} = \hbar\omega$$

Primeiro estado excitado:

$$\Psi^+_{01}(x_1, x_2) = \frac{m\omega}{\hbar\sqrt{\pi}}(x_1 + x_2)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right], E_{01} = 2\hbar\omega$$

ii) Férmions:
Estado fundamental:

$$\Psi^-_{01}(x_1, x_2) = \frac{m\omega}{\hbar\sqrt{\pi}}(x_1 - x_2)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right], E_{01} = 2\hbar\omega$$

Primeiro estado excitado:

$$\Psi_{02}^{+}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}(x_1^2 - x_2^2)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right], E_{02} = 3\hbar\omega$$

c) O estado fundamental tem energia $E_{00} = \hbar\omega$ não degenerada, que tem função de onda simétrica, portanto os férmions estão no singleto de spin (antissimétrico):

$$\Psi_{00,00} = \Psi_{00}^{+}(x_1,x_2)|00\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right]|00\rangle$$

e o primeiro estado excitado tem energia $E_{01} = 2\hbar\omega$ quadruplamente degenerada, com as possveis funções de onda:

$$\Psi_{01,00} = \Psi_{01}^{+}(x_1,x_2)|00\rangle = \frac{m\omega}{\hbar\sqrt{\pi}}(x_1+x_2)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right]|00\rangle,$$

$$\Psi_{01,1m} = \Psi_{01}^{-}(x_1,x_2)|1m\rangle = \frac{m\omega}{\hbar\sqrt{\pi}}(x_1-x_2)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right]|1m\rangle,$$

7) Resolvido nas notas de aula.

8) Os possíveis estados de três partículas são :

- Partículas idênticas: $\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$;
- Bósons: $\frac{1}{\sqrt{6}}[\Psi_+(x_1,x_2,x_3) + \Psi_-(x_1,x_2,x_3)]$;
- Férmions: $\frac{1}{\sqrt{6}}[\Psi_+(x_1,x_2,x_3) - \Psi_-(x_1,x_2,x_3)]$,

onde

$$\Psi_+(x_1,x_2,x_3) \equiv \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_c(x_1)\psi_a(x_2)\psi_b(x_3) + \psi_b(x_1)\psi_c(x_2)\psi_a(x_3),$$

$$\Psi_-(x_1,x_2,x_3) \equiv \psi_c(x_1)\psi_b(x_2)\psi_a(x_3) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_1)\psi_c(x_2)\psi_b(x_3).$$