Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 7.3.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖) The function defined for all x by $f(x) = e^{2x-2}$ has an inverse g. Find x such that $f(x) = 1$. Then use (7.3.2) to find $g'(1)$. Check your result by finding a formula for g.

Para $x = 1$ temos: $f(1) = e^{2.1-2} = e^0 = 1$. Portanto $f(x) = 1$ para $x = 1$.

Usando (7.3.2) ou seja, $g'(1) = \dfrac{1}{f'(1)}$ para achar $g'(1)$:

$f'(x) = 2.e^{2x-2}$

$f'(1) = 2.e^{2.1-2} = 2$

$g'(1) = \dfrac{1}{2}$

$\blacksquare$

Resolução (34‖ Questão: 7.3.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

The function f is defined, for $-2 \leq x \leq 2$, by the formula $f(x) = \frac{1}{3}x^3\sqrt{4-x^2}$

a) Find the intervals where f increases, and the intervals where f decreases, then sketch its graph.

Para encontrar esses intervalos primeiro precisamos derivar a função $f(x)$, para resolver essa derivada vamos usar a regra do produto e a regra da cadeia:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{3}x^3\sqrt{4-x^2}) = x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}x^3 2x\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{x^4}{3\sqrt{4-x^2}} = \frac{3x^2(4-x^2)-x^4}{3\sqrt{4-x^2}} = \frac{12x^2-4x^4}{3\sqrt{4-x^2}} = \frac{4x^2(3-x^2)}{3\sqrt{4-x^2}}$

Utilizando o auxílio de um diagrama de sinais encontramos:
A função é crescente no intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
A função é decrescente nos intervalos $(-2, -\sqrt{3}]$ e $[\sqrt{3}, 2)$

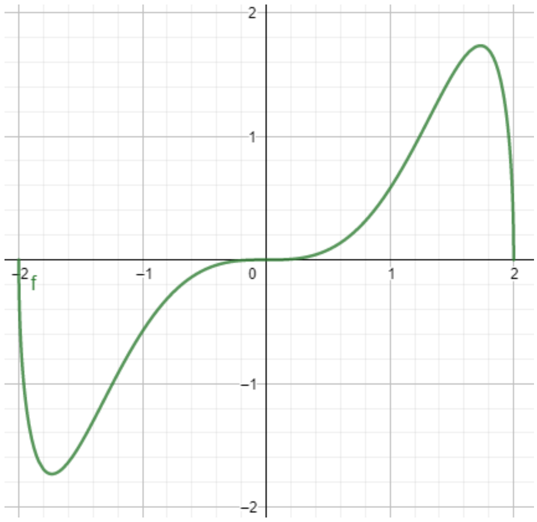
b) Explain why f has an inverse g on $[0, \sqrt{3}]$, and find $g'(\frac{1}{3}\sqrt{3})$.(Hint: $f(1) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$)

f é a função inversa de g no intervalo $[0, \sqrt{3}]$, pois neste intervalo a função f é estritamente crescente.

Segundo as definições do capítulo: Se x_0 é um ponto interior do intervalo I e $f'(x_0) \neq 0$, então g é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

$\therefore\ g'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{f'(1)}$, para $f'(1) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$

$g'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{f'(1)} \Longrightarrow g'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$



■

Resolução (‖ Questão: 7.3.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$‖)

Let f be defined by $f(x) = \ln(2 + e^{x-3})$, for all x.

a) Show that f is strictly increasing and find the range of f.

Estudemos o sinal da primeira derivada da função f.

$$f(x) = \ln(2 + e^{x-3}) \Rightarrow \tag{1}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-3}}{(2 + e^{x-3})} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Dado que e^{x-3}, é sempre positiva em seu domínio, então $f'(x)$ será sempre positiva. Por causa disso, f será estritamente crescente.

Sabemos que os valores que $f(x)$ pode assumir sempre constará no intervalo $(\ln 2, \infty)$ - representando a imagem da função $f(x)$

b) Find an expression for the inverse function, g, of f. Where is g defined?

Procuremos a inversa, chamando $f(x)$ de y.

$$y = \ln(2 + e^{x-3}) \iff \tag{4}$$
$$e^{y} = (2 + e^{x-3}) \iff \tag{5}$$
$$e^{x-3} = e^{y} - 2 \iff \tag{6}$$
$$\frac{e^{x}}{e^{3}} = e^{y} - 2 \iff \tag{7}$$
$$e^{x} = e^{3}(e^{y} - 2) \iff \tag{8}$$
$$\ln(e^{x}) = \ln[e^{3}(e^{y} - 2)] \iff \tag{9}$$
$$\ln(e^{x}) = \ln\big(e^{3}\big) + \ln(e^{y} - 2)] \iff \tag{10}$$
$$x = 3 + \ln(e^{y} - 2) \tag{11}$$

Substituindo os valores e nomeando a nossa função inversa de $g(x)$: $g(x) = 3 + \ln(e^{x} - 2)$

Para $g(x)$ ser definida, $(e^X - 2)$ precisa ser maior que 0. Resolvendo esta inequação

$$e^x - 2 > 0 \Rightarrow \tag{12}$$
$$x > \ln 2 \tag{13}$$

Portanto, $g(x)$ será definida desde que $x \in (\ln 2, \infty)$

c) Verify that $f'(3) = \dfrac{1}{g'(f(3))}$.

Dado que f e g são inversas, e que são ambas diferenciáveis podemos afirmar: $g(f(x)) = x$

Derivando implicitamente:

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \iff f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$, desde que $g'(f(x)) \neq 0$

Utilizando este fato, calcularemos $g'(x)$, $f(3)$ e $g'(f(3))$.

- $g(x) = 3 + \ln(e^x - 2) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{e^x - 2} \cdot e^x \iff g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 2}$
- $f(3) = \ln\left(2 + e^{3-3}\right) = \ln 3$
- $g'(f(3)) = g'(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} - 2} = \dfrac{3}{3-2} = 3$

$\therefore f'(3) = \dfrac{1}{g'(f(3))} = \dfrac{1}{3}$

■

Resolução (‖ Questão: 7.3.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$‖)

According to Exercise 5.3.2, during the period 1915–1929 the demand for sugar in the USA, as a function of the price P, was given by $D = 157.8/P^{0.3}$. Use (7.3.4) to find dP/dD.

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx}$ (7.3.4)

$\dfrac{dP}{dD} = \dfrac{1}{dD/dP} = \dfrac{1}{(-0,3)\cdot(157,8)\cdot P^{-1,3}} = -\dfrac{P^{1,3}}{47,34} = -0,021P^{1,3}$

■

Resolução (‖ Questão: 7.3.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Use a equação (7.3.4) para encontrar $\dfrac{dx}{dy}$.

Equação (7.3.4):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

a) $y = e^{-x-5}$

$$y = e^{-x-5}$$
$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x-5}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-e^{-x-5}} = -\frac{1}{e^{-(x+5)}} = -e^{x+5}$$

b) $y = \ln(e^{-x} + 3)$

$$\begin{aligned} y &= \ln\big(e^{-x} + 3\big) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 3} \\ \frac{dx}{dy} = \frac{e^{-x} + 3}{-e^{-x}} = -e^{x}\left(\frac{1}{e^{x}} + 3\right) = -e^{x}\frac{(1 + 3e^{x})}{e^{x}} &= -(1 + 3e^{x}) \end{aligned}$$

c) $xy^3 - x^3y = 2x$

Encontrando $\frac{dy}{dx}$ pela derivação implícita:

$$\begin{aligned} y^3 + 3y^2y'x - (3x^2y + y'x^3) &= 2 \\ y'(3y^2x - x^3) &= 2 - y^3 + 3x^2y \\ y' = \frac{2 - y(y^2 - 3x^2)}{x(3y^2 - x^2)} &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Encontrando $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{x(3y^2 - x^2)}{2 - y(y^2 - 3x^2)}$$

■