Método dos Elementos Finitos

FreeFem++

Formulação Fraca de Galerkin

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(w \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$w \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$w \nabla^2 u = \nabla \cdot \left(w \nabla u \right) - \nabla w \cdot \nabla u$$

Formulação Fraca de Galerkin

$$\nabla^2 u = f$$

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 u \, d\forall = \int_{\Omega} w \, f \, d\forall$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(w \nabla u \right) d\forall - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\forall = \int_{\Omega} w \, f \, d\forall$$

Formulação Fraca de Galerkin

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\forall + \int_{\partial\Omega} w \nabla u \cdot \vec{n} \; dS = \int_{\Omega} w \, f \, d\forall$$

$$\partial\Omega = \Gamma_D + \Gamma_N$$

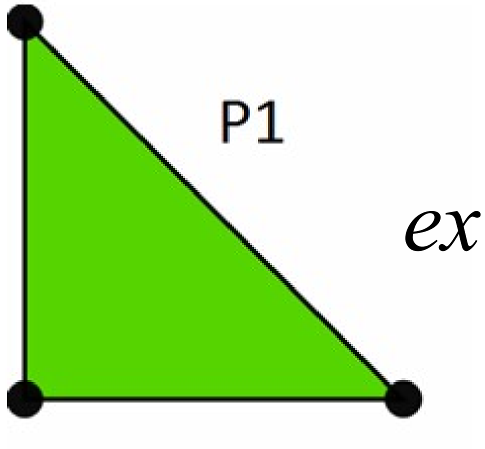
$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\forall + \int_{\Gamma_N} w \frac{\partial u}{\partial n} \; dS = \int_{\Omega} w \, f \, d\forall$$

$$w = 0 \;\text{ em }\; \Gamma_D$$

Formulação Fraca de Galerkin

$$u = \sum_{i} u_i \, w_i$$

$$w_i = w_i(\vec{x}) = \begin{cases} 1 \; se \; \vec{x} = \vec{x}_j \, , \, j = i \\ 0 \; se \; \vec{x} = \vec{x}_j \, , \, j \neq i \end{cases}$$



$$ex : w_1 = a_1 \, x + b_1 \, y + c_1$$

Formulação Fraca de Galerkin

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\forall + \int_{\Gamma_N} w \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \int_{\Omega} w \, f \, d\forall$$

$$-\sum_{i} u_i \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\forall + \int_{\Gamma_N} w_j \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \int_{\Omega} w_j \, f \, d\forall$$

Método das Características de Galerkin

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\nabla^2\vec{u}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\phi_P(t+\Delta t) - \phi_P(t)}{\Delta t} \cong \frac{\phi(\vec{x}, t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{\phi(\vec{x}-\vec{\upsilon}\Delta t, t)}{\Delta t}$$

Método das Projeções de Chorin (Fractional Step Method)

$$\frac{\vec{u}(\vec{x},t+\Delta t)}{\Delta t}-\frac{\vec{u}(\vec{x}-\vec{u}\Delta t,t)}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p(t+\Delta t)+\nu\nabla^2\vec{u}(t+\Delta t)$$

Método implícito de 1ª ordem

$$p(t+\Delta t)=p(t)+q$$

Onde *q* é uma correção de pressão.

Usando uma velocidade intermediária *u*, a equação fica:

$$\frac{\vec{u}(\vec{x},t+\Delta t)}{\Delta t}-\frac{\vec{u}}{\Delta t}+\frac{\vec{u}}{\Delta t}-\frac{\vec{u}(\vec{x}-\vec{u}\Delta t,t)}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p(t)-\frac{1}{\rho}\nabla q+\nu\nabla^2\vec{u}(t+\Delta t)$$

Método das Projeções de Chorin
(Fractional Step Method)

$$\frac{\vec{u}(\vec{x},t+\Delta t)}{\Delta t}-\frac{\vec{u}}{\Delta t}+\frac{\vec{u}}{\Delta t}-\frac{\vec{u}(\vec{x}-\vec{u}\Delta t,t)}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p(t)-\frac{1}{\rho}\nabla q+\nu\,\nabla^2\vec{u}(t+\Delta t)$$

Essa equação pode ser aproximada por:

$$\frac{\vec{u}}{\Delta t}-\frac{\vec{u}(\vec{x}-\vec{u}\Delta t,t)}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p(t)+\nu\,\nabla^2\vec{u}$$

$$\frac{\vec{u}(\vec{x},t+\Delta t)}{\Delta t}-\frac{\vec{u}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla q$$

Isso resulta:

$$\frac{\vec{u}(\vec{x},t+\Delta t)}{\Delta t}-\frac{\vec{u}(\vec{x}-\vec{u}\Delta t,t)}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p(t+\Delta t)+\nu\,\nabla^2\vec{u}$$

Método das Projeções de Chorin (Fractional Step Method)

Determinação da correção de pressão *q*:

$$\frac{\vec{u}\left(\vec{x},t+\Delta t\right)}{\Delta t}-\frac{\vec{u}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla q$$

Aplicando o operador divergente e lembrando que a velocidade final deve respeitar a continuidade:

$$\underbrace{\frac{\nabla\cdot\vec{u}\left(\vec{x},t+\Delta t\right)}{\Delta t}}_{0}-\frac{\nabla\cdot\vec{u}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\nabla q$$

Resulta:

$$\nabla^2 q=\frac{\rho}{\Delta t}\nabla\cdot\vec{u}$$

Método das Projeções de Chorin
(Fractional Step Method)

Passo 1: $$\frac{\vec{u}}{\Delta t} - \frac{\vec{u}\left(\vec{x} - \vec{u}\Delta t, t\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\left(t\right) + \nu\,\nabla^2\vec{u}$$

Passo 2: $$\nabla^2 q = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla\cdot\vec{u}$$

Passo 3: $$\vec{u}\left(\vec{x}, t + \Delta t\right) = \vec{u} - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla q$$

Equação de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u}$$

Resulta:
$$\frac{u - u\left(\vec{x} - \vec{u}\left(\vec{x},t\right).\Delta t, t\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$

Ordenando os termos:
$$-\nu\nabla^2 u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u}{\Delta t} + \frac{u\left(\vec{x} - \vec{u}(\vec{x},t).\Delta t, t\right)}{\Delta t}$$

Multiplicando por *w* e integrando no volume:

$$\int_\Omega\left(\frac{u}{\Delta t}w + \nu\nabla w.\nabla u\right)d\Omega - \int_\Omega\left(\frac{u\left(\vec{x} - \vec{u}\Delta t, t\right)}{\Delta t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)w\,d\Omega = 0$$

Equação de Navier-Stokes

$$\int_{\Omega}\left(\frac{u}{\Delta t}w+\nu\,\nabla w.\nabla u\right)d\Omega-\int_{\Omega}\left(\frac{u(\vec{x}-\vec{u}(\vec{x},t).\Delta t,t)}{\Delta t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)w\,d\Omega\ =0$$

```
solve pb4u(u,w,init=n,solver=GMRES,eps=1.e-6)
      =int2d(Th)(u*w/dt +nu*(dx(u)*dx(w)+dy(u)*dy(w)))
      -int2d(Th)((convect([uold,vold],-dt,uold)/dt-(1.0/rho)*dx(p))*w)
      + on(1,u = 0) + on(2,u = uinf);
```

Instrução equivalente no FreeFem++.

Equação de Correção de Pressão

$$\frac{\vec{u}(\vec{x},t+\Delta t)-\vec{u}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\nabla q$$

Onde *q* é a correção de pressão.

Fazendo a divergência da equação acima:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 q=-\frac{1}{\Delta t}\nabla.\vec{u}$$

Multiplicando por uma função *w*1 e integrando no volume:

$$\int_\Omega (\nabla q.\nabla w_1)\,d\Omega+\int_\Omega\left(w_1\frac{\rho}{\Delta t}\nabla.\vec{u}\right)d\Omega=0$$

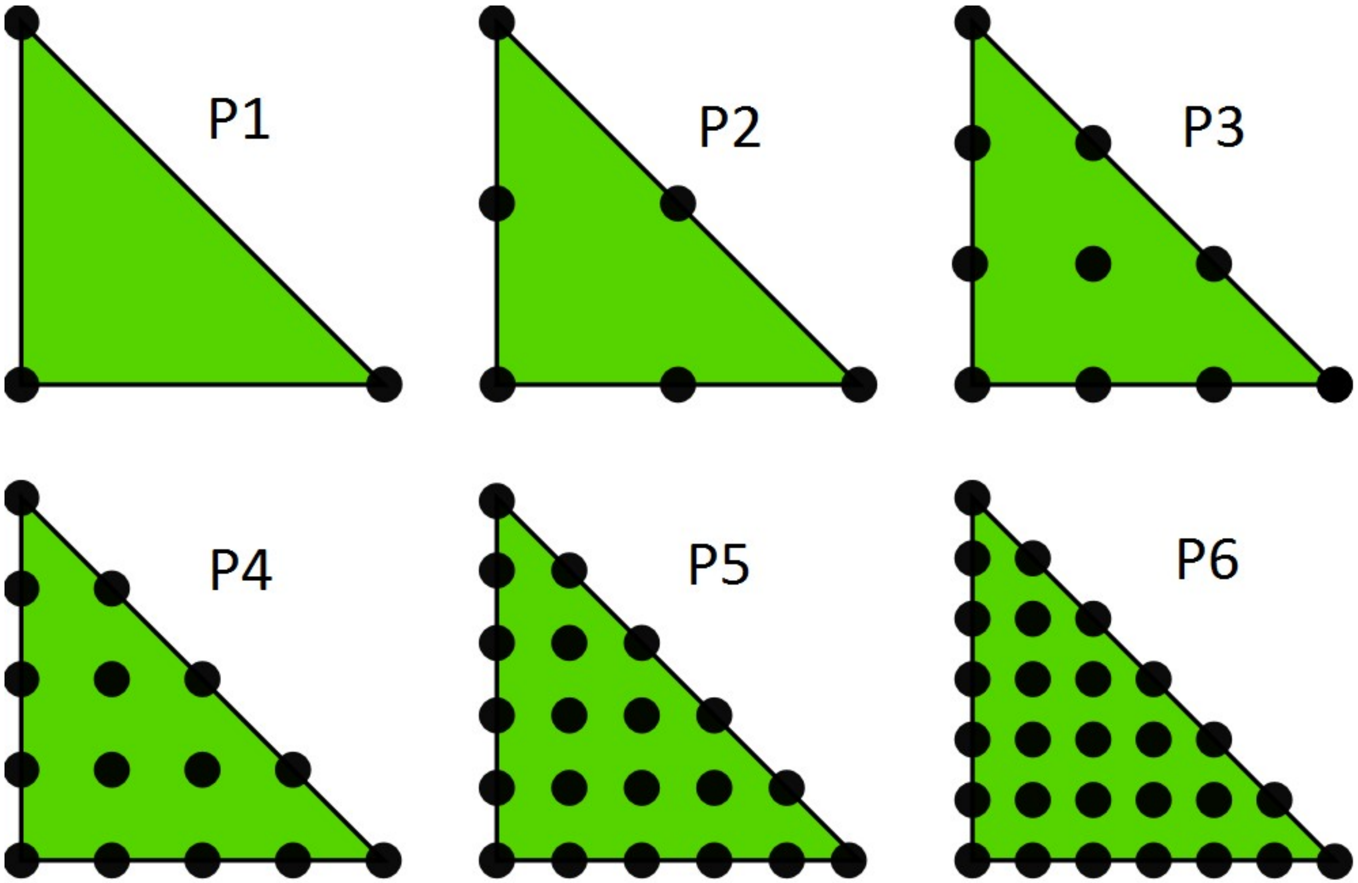
Equação de Correção de Pressão

$$\int_{\Omega} (\nabla q.\nabla w_1) d\Omega + \int_{\Omega} \left(w_1 \frac{\rho}{\Delta t} \nabla.\vec{u} \right) d\Omega = 0$$

```
solve pb4p(q,w1,solver=GMRES,init=n,eps=1.e-6)
      = int2d(Th)(dx(q)*dx(w1)+dy(q)*dy(w1))
      + int2d(Th)((dx(u)+ dy(v))*w1*rho/dt)+ on(3,q=0);
```

Instrução equivalente no FreeFem++.

Elementos Triangulares (2D)

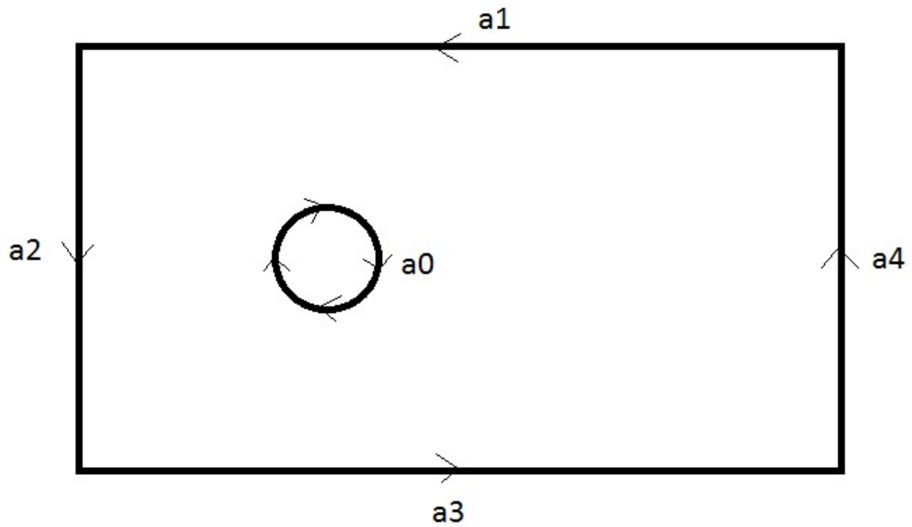


Fonte: http://hplgit.github.io/INF5620/doc/pub/._main_fem009.html

Geração de Malha no FreeFem++

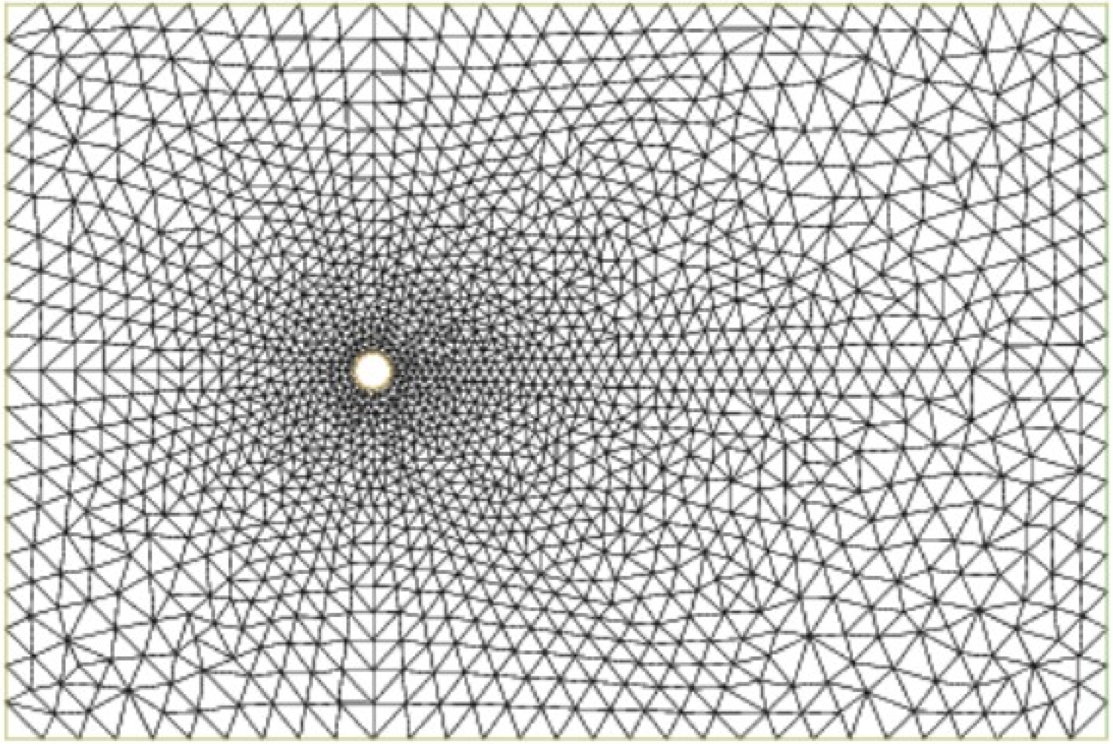
O domínio de solução é considerado sempre do lado esquerdo das fronteiras.

fronteira "1", parede: a0
fronteira "2", corrente livre: a1+a2+a3
fronteira "3", saída: a4



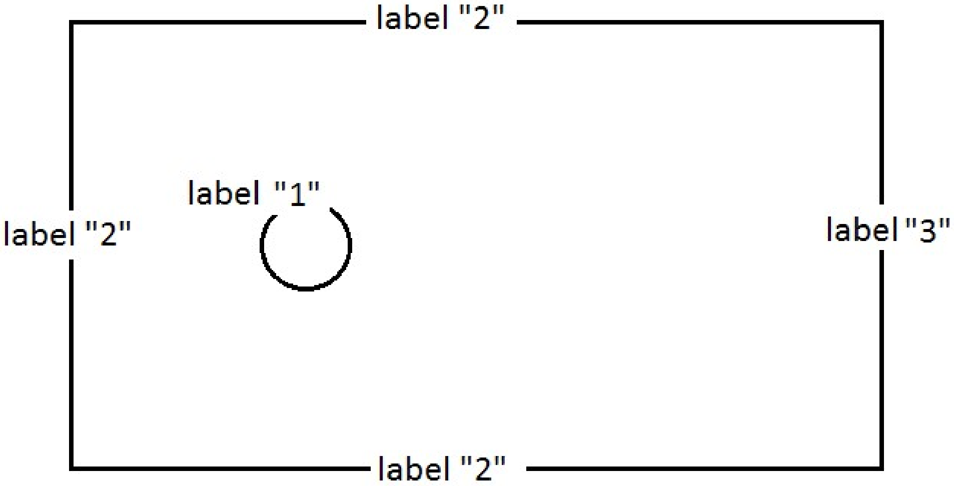

```
border a0(t=2*pi,0) {x=0.5*cos(t); y=0.5*sin(t); label=1;}
border a1(t=20,-10) {x=t; y=10; label=2;}
border a2(t=10,-10) {x=-10; y=t; label=2;}
border a3(t=-10,20) {x=t; y=-10; label=2;}
border a4(t=-10,10) {x=20; y=t; label=3;}

// Ndelta controls the wall resolution
//int Ndelta=32;
int Ndelta=64;
//int Ndelta=16;
mesh Th= buildmesh(a0(Ndelta)+a1(30)+a2(20)+a3(30)+a4(20));
```

Malha Gerada



```
border a0(t=2*pi,0) {x=0.5*cos(t); y=0.5*sin(t); label=1;}
border a1(t=20,-10) {x=t; y=10; label=2;}
border a2(t=10,-10) {x=-10; y=t; label=2;}
border a3(t=-10,20) {x=t; y=-10; label=2;}
border a4(t=-10,10) {x=20; y=t; label=3;}

// Ndelta controls the wall resolution
//int Ndelta=32;
int Ndelta=64;
//int Ndelta=16;
mesh Th= buildmesh(a0(Ndelta)+a1(30)+a2(20)+a3(30)+a4(20));
```

Condições de Contorno



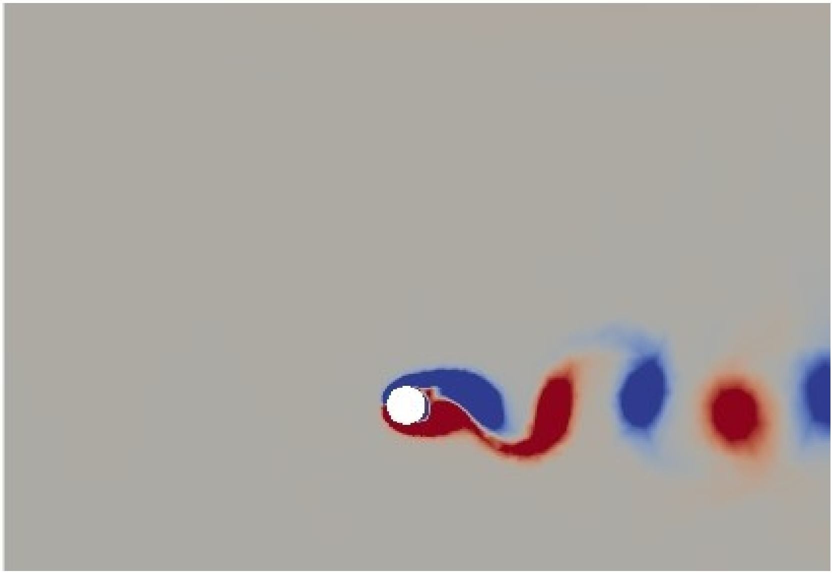
label "1": $u = 0 \quad \upsilon = 0 \quad \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0$

label "2": $u = U_\infty \quad \upsilon = 0 \quad \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0$

label "3": $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \dfrac{\partial \upsilon}{\partial n} = 0 \quad p = 0$

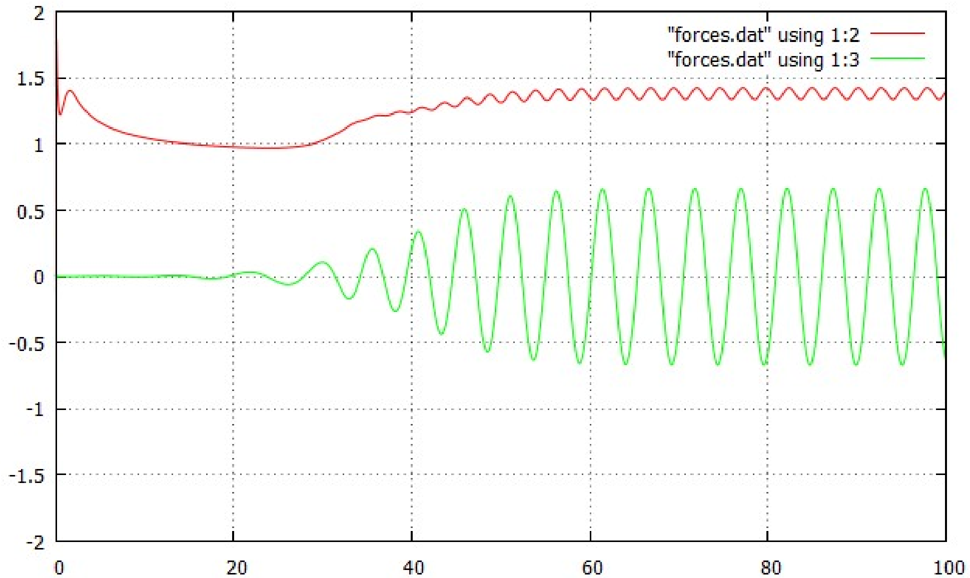
```
solve pb4u(u,w,init=n,solver=GMRES,eps=1.e-6)
     =int2d(Th)(u*w/dt +nu*(dx(u)*dx(w)+dy(u)*dy(w)))
     -int2d(Th)((convect([uold,vold],-dt,uold)/dt-(1.0/rho)*dx(p))*w)
     + on(1,u = 0) + on(2,u = uinf);

solve pb4v(v,w,init=n,solver=GMRES,eps=1.e-6)
     = int2d(Th)(v*w/dt +nu*(dx(v)*dx(w)+dy(v)*dy(w)))
     -int2d(Th)((convect([uold,vold],-dt,vold)/dt-(1.0/rho)*dy(p))*w)
     + on(1,v = 0) + on(2,v = 0);

solve pb4p(q,w1,solver=GMRES,init=n,eps=1.e-6)
     = int2d(Th)(dx(q)*dx(w1)+dy(q)*dy(w1))
     + int2d(Th)((dx(u)+ dy(v))*w1*rho/dt)+ on(3,q=0);
```

Resultados



Visualização da vorticidade na esteira.

Coeficientes de arrasto (vermelho) e sustentação (verde).



Para maiores detalhes, ver o manual do FREEFEM++, disponível para download em:

http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf