UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

QUATRO JOGOS PARA NÚMEROS INTEIROS: UMA ANÁLISE

Volume da Academia

Patrícia Rosana Linardi

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós - Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos - Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
1998

Comissão Examinadora

____

____

____

____

____

____

Patrícia Rosana Linardi

Rio Claro, ____ de ________________________ de ______

Resultado: ____

ÍNDICE

Dedicado aos meus pais, que sempre me apoiaram, e a todos os educadores de Matemática.

AGRADECIMENTOS

Aos profissionais que acompanharam esta jornada, com muita dedicação e carinho:
Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino, meu orientador, Prof. Dr. Antônio Carlos Carrera de Souza e Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura.

A todos os integrantes do GPA - Grupo Pesquisa - Ação em Educação Matemática, pelo auxílio e colaboração nas mais diversas fases deste trabalho.

Ao componentes do grupo de orientação do Prof. Baldino, sempre dispostos a discutir as diversas idéias que emergiam.

Ao Programa de Pós - Graduação, onde fui muito bem recebida, pela valiosa contribuição.

À direção, funcionários e alunos da E.E. Prof. Délcio Báccaro, pela recepção e apoio no desenvolver desta pesquisa.

Aos companheiros do Programa de Pós - Graduação, pelos bons momentos e colaboração.

À Profa. Lúcia L. Ribeiro Penatti, pela revisão do texto.

A meus pais, companheiros de todas horas, ao Rafa e ao Jean, pela colaboração e compreensão.

Uma tese é uma tese

Sabe tese, de faculdade? Aquela que defendem? Com unhas e dentes? É dessa tese que eu estou falando. Você deve conhecer pelo menos uma pessoa que já defendeu uma tese. Ou esteja defendendo. Sim, uma tese é defendida. Ela é feita para ser atacada pela banca, que são aquelas pessoas que gostam de botar banca. As teses são todas maravilhosas. Em tese. Você acompanha uma pessoa meses, anos, séculos, defendendo uma tese. Palpitantes assuntos. Tem tese que não acaba nunca, que acompanha o elemento para a velhice. Tem até teses pós - morte.

O mais interessante na tese é que, quando nos contam, são maravilhosas, intrigantes. A gente fica curiosa, acompanha o sofrimento do autor, anos a fio. Aí ele publica, te dá uma cópia e é sempre - sempre - uma decepção. Em tese. Impossível ler uma tese de cabo a rabo. São chatíssimas. É uma pena que as teses sejam escritas apenas para o julgamento da banca circunspecta, sisuda e compenetrada em si mesma. E nós?

Sim, porque os assuntos, já disse, são maravilhosos, cativantes, as pessoas são inteligentíssimas. Temas do arco-da-velha. Mas toda tese fica no rodapé da história. Pra que tanto sic e tanto apud? Sic me lembra o *Pasquim* e apud não parece candidato do PFL para vereador? Apud Neto.

Escrever uma tese é quase um voto de pobreza que a pessoa se autodecreta. O mundo pára, o dinheiro entra apertado, os filhos são abandonados, o marido que se vire. Estou acabando a tese. Essa frase significa que a pessoa vai sair do mundo. Não por alguns dias, mas anos. Tem gente que nunca mais volta.

E, depois de terminada a tese, tem a revisão da tese, depois tem a defesa da tese. E, depois da defesa, tem a publicação. E, é claro, intelectual que se preze, logo em seguida embarca noutra tese. São os profissionais, em tese. O pior é quando convidam a gente para assistir à defesa. Meu Deus, que sono. Não em tese, na prática mesmo.

Orientados e orientandos (que nomes atuais!) são unânimes em afirmar que toda tese tem de ser - tem de ser! - daquele jeito. É pra não entender, mesmo. Tem de ser formatada assim. Que na Sorbonne é assim, que em Coimbra também. Na Sorbonne, desde 1257. Em Coimbra, mais moderna, desde 1290.

Em tese (e na prática) são 700 anos de muita tese e pouca prática. Acho que, nas teses, tinha de ter uma norma em que, além da tese, o elemento teria de fazer também uma tesão (tese grande). Ou seja, uma versão para nós, pobres teóricos ignorantes que não votamos no Apud Neto.

Ou seja, o elemento (ou a elementa) passa a vida a estudar um assunto que nos interessa e nada. Pra que? Pra virar mestre, doutor? E daí? Se ele estudou tanto aquilo, acho impossível que ele não queira que a gente saiba a que conclusões chegou. Mas jamais saberemos onde fica o bicho da goiaba quando não é tempo de goiaba. No bolso do Apud Neto?

Tem gente que vai para os Estados Unidos, para a Europa, para terminar a tese. Vão lá nas fontes. Descobrem maravilhas. E a gente não fica sabendo de nada. Só aqueles sisudos da banca. E o cara dá logo um dez com louvor. Louvor para quem? Que exaltação, que encômio é isso?

E tem mais: as bolsas para os que defendem as teses são uma pobreza. Tem viagens, compra de livros caros, horas na Internet da vida, separações, pensão para os filhos que a mulher levou embora. É, defender uma tese é mesmo um voto de pobreza, já diria São Francisco de Assis. Em tese.

Tenho um casal de amigos que há uns dez anos prepara suas teses. Cada um, uma. Dia desses a filha, de 10 anos, no café da manhã, ameaçou:

- Não vou mais estudar! Não vou mais na escola.

Os dois pararam - momentaneamente - de pensar nas teses.

- O quê? Pirou?

- Quero estudar mais, não. Olha vocês dois. Não fazem mais nada na vida. É só a tese, a tese, a tese. Não pode comprar bicicleta por causa da tese. A gente não pode ir para a praia por causa da tese. Tudo é pra quando acabar a tese. Até trocar o pano do sofá. Se eu estudar vou acabar numa tese. Quero estudar mais, não. Não me deixam nem mexer mais no computador. Vocês acham mesmo que eu vou deletar a tese de vocês?

Pensando bem, até que não é uma má idéia!

Quando é que alguém vai ter a prática idéia de escrever uma tese sobre a tese? Ou uma outra sobre a vida nos rodapés da história?

Acho que seria uma tesão.

Mario Prata In: “O Estado de São Paulo” 07/10/98

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

QUATRO JOGOS PARA NÚMEROS INTEIROS: UMA ANÁLISE

Volume do Professor

Patrícia Rosana Linardi

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós - Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos - Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

1998

ÍNDICE

RESUMO

A procura de uma explicação satisfatória sobre a abordagem dos números inteiros no ensino fundamental, tanto aos alunos quanto ao profissional de ensino, gerou a busca de um método que apresentasse resultados mais concretos na produção de significados. Este trabalho é o fruto desse anseio. Apresenta-se aqui uma pesquisa que elucidam alguns dados que versam sobre o ensino dos números inteiros. O objetivo principal é apresentar um método alternativo de ensino para este tema, através da aplicação de jogos que foram desenvolvidos, para resolver em ação os quatro problemas didáticos: *Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes?* O resultado esperado é que os alunos forneçam sua própria explicação para um fato que eles devam achar óbvio. São apresentados os resultados obtidos na aplicação efetuada aos alunos de uma 5ª série da Rede Pública Estadual do Município de Rio Claro - SP. Da maneira como foram aplicados, concluiu-se pela eficácia didático - pedagógica dos quatro jogos utilizados: Jogo das Borboletas, Jogo das Perdas e Ganhos, Jogo das Apostas e Jogo das Araras.

ABSTRACT

The search for a satisfactory explanation about teaching integers at the elementary school level, acceptable both for pupils and educators, has lead to the search for a method that provides more significant results in producing meanings. This paper describes the outcome of a survey of data and practical teaching of integers. The main objective is to present an alternative method for teaching this subject, through the application of games developed to solve in action the four didactic questions: *How can the lesser be subtracted from the greater? How can a negative be subtracted? Why do a minus plus a minus result in a plus? What does times minus mean?* The expected result is that pupils can provide their own explanations on a fact that they should deem obvious. The results presented were obtained with pupils of the 5th grade classroom of a public school in the city of Rio Claro, São Paulo, Brazil. Their application demonstrated the effectiveness of the following four games: the Butterfly Game, the Gains and Losses Game, the Wager Game and the Macaw Game.

INTRODUÇÃO

A abordagem dos números inteiros no ensino fundamental tem apresentado diversos problemas já há um bom tempo. A experiência advinda das aulas ministradas na Rede Pública Estadual promoveu um interesse crescente, na procura de uma explicação que fosse satisfatória tanto aos alunos quanto ao profissional de ensino. A idéia de se buscar um método que apresentasse resultados mais concretos na produção de significados acabou sendo revertida no trabalho agora apresentado.

Buscou-se uma pesquisa para levantar alguns dados que versassem sobre o ensino dos números inteiros, bem como um painel das diversas abordagens que este tema já proporcionou. O ponto principal deste trabalho, entretanto, é apresentar um método alternativo de ensino para este tema, através da aplicação de jogos que foram desenvolvidos, para resolver em ação os quatro problemas didáticos: *Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes?* Através da aplicação destes jogos, pretende-se transferir ao estudante a responsabilidade da situação de aprendizagem e também responder as questões do problema didático. O professor é que perguntará: por que menos por menos dá mais? Espera-se que o aluno responda: É claro, porque... Assim, o objetivo esperado é que os alunos forneçam sua própria explicação para um fato que eles devam achar óbvio.

Participações no GPA - Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática no Departamento de Matemática do IGCE - Rio Claro forneceram subsídios para o aprimoramento das diferentes ferramentas pedagógicas (os jogos) e das técnicas de aplicação em sala de aula, bem como da coleta de dados de aproveitamento dos discentes. Foi realizada uma intervenção em três classes da Rede Pública Estadual do Município de Rio Claro - SP (uma 5ª, uma

6ª e uma 7ª série), sendo aqui relatados os resultados obtidos da aplicação efetuada aos alunos de 5ª série. Coletas sistemáticas do comportamento dos alunos e das suas impressões em relação à aplicação do método também foram cuidadosamente registradas e analisadas.

A conjunção dos dados coletados, das discussões em conjunto no GPA e a análise do material disponível gerou o presente trabalho, que traz os resultados obtidos na aplicação deste método alternativo de abordagem dos números inteiros. Optou-se por dividir a apresentação em dois volumes, sendo que, no presente, denominado Volume da Academia, são apresentados tópicos referentes aos pressupostos teóricos e os resultados obtidos em sala de aula, além da trajetória pessoal e o relato de uma das intervenções de pesquisa. Todo material didático utilizado em sala de aula está presente no segundo volume, o Volume do Professor.

TRAJETÓRIA PESSOAL

O início deste tópico é difícil. Difícil porque traz reminiscências de períodos não tão remotos, mas que já soam como ecos, que repercutem no nosso trabalho desenvolvido até hoje. A gênese pretérita deste trabalho está em algum ponto do ano de 1989, quando optamos por ser matemática, fato que se deu em 1990 quando ingressamos no Curso de Graduação em Matemática oferecido pela Universidade Estadual Paulista (UNESP) - "Câmpus" de Rio Claro. Durante os primeiros dois anos a grade curricular do curso era o mesmo para todos os ingressantes, ou seja, não havia opção por Licenciatura ou Bacharelado, decisão que deveria ser tomada apenas no início do terceiro ano.

Ao atingir o final do 4º semestre, a escolha deveria ser efetuada, mais precisamente no início de 1992. Como uma opção lógica, "decidimos" fazer Bacharelado em Matemática, visto que jamais havíamos pensado cursar a Licenciatura. Nessa época, nós e algumas amigas de curso, pensávamos que jamais iríamos ser professoras, e que "bons alunos" deveriam fazer Bacharelado.

O Bacharelado acenava como uma oportunidade de desenvolvermos trabalhos em empresas privadas, em projetos de pesquisa diversos (em instituições públicas e privadas) e com um "status" inexistente no curso de Licenciatura. Na verdade, a possibilidade de nos tornar professora (principalmente da rede pública), era terrivelmente aterradora. Nunca, sob hipótese alguma, desejaríamos "virar professora" - palavra à qual associávamos baixos salários e condições precárias de trabalho.

Fomos muito bem aceitas no curso de Bacharelado, uma vez que estudar e "tirar nota" era o de que mais gostávamos e que sabíamos fazer. Tivemos um ótimo desempenho escolar, se levarmos em conta que ótimo desempenho sejam: boas notas, participação em projetos de iniciação científica, ótimo relacionamento com os professores, propostas de mestrado em Matemática Aplicada e outros. Dentro deste nicho, ficamos encantadas com o que o curso nos oferecia: notas altas, “paparicos”, bolsas de estudo, congressos, desenvolvimento de projetos...

Durante o curso, tínhamos ilusão de desenvolver nosso trabalho com Matemática Aplicada em outros lugares que não a Universidade, e éramos encorajadas a pensar e acreditar nisso. Realizamos estágios de iniciação científica nessa área com auxílio de professores da UNICAMP. No último ano de curso, quando a fantasia de estudante universitário começa a desvanecer, e a preocupação com o futuro da carreira começa a falar mais alto, passamos a questionar os docentes do grupo da Matemática Aplicada sobre o mercado de trabalho. Foram categóricos em nos dizer que o nosso futuro seria a carreira universitária. Peregrinamos em outras plagas, como departamentos de engenharia da USP, para que pudéssemos realizar um mestrado e/ou doutorado nessas áreas, e após esta etapa, ter acesso ao mercado de trabalho, que não a Universidade, mas todos repetiam o mesmo veredito.

Como encarar a realidade, abrindo mão de um sonho é sempre difícil, somente no último ano de curso percebemos que, se fizéssemos mestrado em áreas como Matemática Aplicada, Engenharia ou mesmo Matemática Pura, nossa realidade futura seria a Universidade. Chegamos a cogitar em fazer outro curso, mas logo desistimos da idéia, uma vez que gostávamos de Matemática e nunca havíamos nos arrependido de ingressar e freqüentar o curso, apenas estávamos muito preocupadas e inseguras, pois até então, nunca havia passado pela nossa cabeça a idéia de dar aula.

Ao concluir o curso de Bacharelado estávamos muito indecisas na escolha de que área seguir no mestrado. Assim, resolvemos nos inscrever em algumas disciplinas da Licenciatura, e também na rede pública de ensino, a fim de ministrar algumas aulas.

Em 1994, iniciamos na Rede Pública Estadual com 17 aulas semanais, ministradas na Escola Estadual de Primeiro Grau "Professor Délcio Báccaro", no município de Rio Claro - SP para uma 5ª, uma 6ª e uma 7ª série do curso noturno.[1]

As salas de aula tinham, em média, 36 alunos, muito agitados e agressivos, com faixa etária bastante variada. Sempre procuramos desempenhar nosso papel da melhor forma; todos os dias preparávamos "muito bem" as aulas antes de ministrá-las, e as expúnhamos com a maior perfeição possível, mas logo pudemos perceber quão árdua seria esta nossa nova empreitada: muitos alunos não prestavam atenção a uma só palavra dita, e os que pareciam prestar, diziam não entender o nosso discurso e apresentavam o não entendimento como justificativa para não realizar os exercícios propostos.

Não conseguíamos compreender o que estávamos fazendo de errado; passamos então a utilizar de autoridade para que fizessem os exercícios, mas mesmo assim, a maioria apresentava muita dificuldade com conceitos não aprendidos anteriormente. Um dos conceitos nos quais mais tinham dificuldade era o de números inteiros. Percebia-se que eles haviam decorado o algorítimo (menos por menos dá mais,...), e o utilizavam para qualquer operação.

Uma característica marcante dos alunos dessa unidade escolar era o alto índice de desestruturação familiar. Muitos eram oriundos de famílias carentes, com problemas sociais diversos, que variavam desde pais alcoólatras a envolvimento com drogas. Esse panorama repercutia no baixo interesse dos alunos ao papel da escola, que passava a ser vista apenas como um "ponto de encontro", ou seja, todos os alunos gostavam de freqüentá-la, porém, apenas seu espaço físico: era o local onde se encontravam com os amigos, com suas paqueras, já que não dispunham de outra opção de "lazer". Esta característica proporcionava uma constante presença na escola de indivíduos estranhos ao seu corpo discente, atraindo os amigos dos alunos e fazendo com que a evasão

[1] Escola onde foi realizada, três anos depois, a intervenção desta pesquisa.

das salas de aula fosse marcante - afinal de contas, todos se divertiam em "matar aula". Assim, a escola era alvo constante de atos de vandalismo e de furtos, bem como de incursão de "gangues".

Esses fatos acabavam tendo uma repercussão ainda maior, ocasionando faltas constantes e rotatividade alta do corpo docente e mesmo do corpo discente mais interessado. A falta dos professores acabava gerando outro problema: a "aula paralela", que consistia em um artifício adotado pela escola: na ausência de um professor, outro adiantava sua aula na respectiva série, ao mesmo tempo em que continuava ministrando aula para a sala de seu horário. Assim, uma "ginástica" deveria ser feita: ministrar aula para duas classes simultaneamente. Uma das soluções mais comuns, utilizada pelos docentes, consistia em deixar um aluno responsável para passar exercícios na lousa, enquanto o professor assumia a outra sala. Nem é preciso mencionar que os resultados sempre eram desastrosos, ampliando a desatenção e o mau aproveitamento dos alunos.

A figura do professor frente ao aluno se tornava como a de um algoz, alguém que estava ali apenas para reprimir. Muitos alunos freqüentavam as aulas durante certo período e depois "desapareciam", retornando após um ou dois meses de completa ausência. Outros faltavam durante uma semana, e retornavam em outra. Esta característica era comum a todas as séries, principalmente no período noturno.

Tais problemas levaram-nos a refletir profundamente sobre nosso papel na escola. Qual seria nossa real função dentro de um contexto tão caótico? Ao mesmo tempo em que buscávamos cumprir nossa tarefa de maneira satisfatória, sentíamos que os resultados eram desanimadores.

Nesse ano, antes de se iniciarem as aulas na Universidade, encontramos em um restaurante o professor Roberto R. Baldino, que havia sido nosso professor na graduação, e aproveitamos a oportunidade para expor a ele o que estávamos vivendo em sala de aula. Após conversarmos, surgiu seu convite para que participássemos de um grupo de pesquisa (GPA - Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática), que se reunia aos sábados no Departamento de Matemática da UNESP - Rio Claro, formado por professores que tinham as mesmas preocupações, frustrações e ansiedades e que tentavam discutir as rotinas e fracassos na sala de aula de Matemática, além de procurarem propor algo que viabilizasse a mudança desse quadro. A fim de melhor abordar os questionamentos de cada frente distinta, o GPA era dividido em vários subgrupos, cada qual com sua temática específica, porém sempre seguindo a questão central: o fracasso do ensino de Matemática e as rotinas que o sustentam. Uma das questões que estavam sendo abordadas por um dos grupos do GPA era a dos números inteiros - o GPA - Números Inteiros. Atualmente, o GPA continua em plena atividade, gerando amplas discussões e procurando soluções, permanecendo com a mesma filosofia e estrutura.[2]

Como conseqüência desse providencial encontro, no mês de março de 1994 ingressamos no curso de Licenciatura em Matemática e no Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática (GPA) - Subgrupo Números Inteiros.

O GPA - Números Inteiros tinha como coordenadores dois docentes da UNESP - Rio Claro, Professor Roberto Ribeiro Baldino e Professor Antônio Carlos Carrera de Souza (atribuição que desempenham até o momento), e era composto por professores da rede pública e particular, por alunos da Licenciatura em Pedagogia e em Matemática e por alunos da pós - graduação em Educação Matemática.

Nas reuniões do grupo todos os membros expunham suas frustrações, suas preocupações com o ensino e, em particular, com o ensino dos números inteiros que, há mais de dois séculos, apresenta dificuldades cada vez mais acentuadas, no decorrer do tempo. O grupo era aberto a todos que tivessem interesse em sanar dúvidas ou dificuldades relacionadas ao ensino da Matemática. O participante convidado a integrar as fileiras do GPA discute os

[2] Informações adicionais sobre o GPA podem ser obtidas em Souza & Baldino (1995) - Grupo de Pesquisa-

seus diversos questionamentos e, a partir disso, surgem possíveis soluções que são aplicadas pelo docente e encaminhadas ao grupo em forma de informação de retorno das conseqüências de sua aplicação.

Constantemente eram abordados episódios ocorridos em sala de aula. A narrativa destes episódios acabaram gerando um artigo (GPA, 1998), nos quais são discutidos todos os elementos que vão desde descrições de fatos ocorridos em sala de aula até problemas estruturais da própria escola.

Com o avanço da participação no GPA, das aulas do curso de licenciatura e com o decorrer das aulas ministradas na rede pública, passamos a nos interessar cada vez mais pela ampla problemática que envolve o ensino atual, e também em estudar uma forma pela qual fosse possível provocar uma mudança, ainda que modesta, e que gerasse frutos benéficos à educação.

O início do ano de 1995 foi marcado pela busca de novas classes, visto que, na qualidade de PII ACT do Estado (Admitida sob Caráter Temporário - Professor II - Professor não habilitado), ao final do ano letivo de 1994, perdemos o direito de escolher aulas na própria unidade de ensino. Este mecanismo vigorou até o ano de 1997. Assim, dirigimo-nos à Delegacia de Ensino, na qual os docentes são classificados de acordo com os pontos acumulados no decorrer da carreira. Vale salientar que a atribuição de aulas se deu de maneira desorganizada, bastante cansativa, com muitos professores esperando a sua vez. Não raramente havia discussões, os professores competindo entre si pelas escolas consideradas melhores - critério que levava em consideração a localização e o corpo administrativo. Assim, as classes a nós atribuídas foram duas 5ªs séries do primeiro grau no período da tarde. Posteriormente, depois da primeira semana de aula, foi-nos oferecida uma sala de 1º colegial do segundo grau no período noturno. A escola agora, na qual passamos a executar nosso trabalho, foi a E.E.P.S.G. "Prof. João Batista Leme" - nome anterior à reorganização de ensino, perpetrada em 1996.

Esta unidade de ensino possuía uma estrutura funcional muito superior à escola anterior, sem alunos circulando nos corredores, sem a utilização do recurso de "aulas paralelas", sem a presença de pessoas estranhas ao corpo discente, sem ocorrência de atos de vandalismo. Vale salientar que esta unidade possui uma área muito maior em relação à anterior, com muitos funcionários e bem mais alunos, oferecendo aulas a alunos de bairros mais centrais.

Apesar da estrutura oferecida pela escola, os alunos apresentavam os mesmos problemas dos outros da outra unidade: dificuldade de compreensão, agressividade e desinteresse. Os alunos do 1º colegial exibiam dificuldades na compreensão dos conceitos de números inteiros e sempre se referiam a si próprios como "incapazes" de aprender e como "burros". Apesar dos obstáculos de aprendizagem, mostravam-se parcialmente interessados, mas tinham a escola em baixo conceito. Ao assumirmos estas classes, continuamos com a preocupação de entender a problemática do ensino e buscar uma mudança em nossa metodologia na prática de ensino, até então bastante tradicional. Neste momento tivemos a oportunidade de realizar nossas primeiras intervenções, utilizando materiais didático - pedagógicos trabalhados em grupo e que produziram modificações em nossas salas de aulas; também as discutíamos com os demais alunos e professores da disciplina Prática de Ensino que cursávamos no momento e do GPA.

Nesse mesmo ano, passamos a freqüentar o grupo de orientação do Prof. Dr. Roberto R. Baldino, visando a tomar contato com a metodologia e estrutura de trabalho do programa de Pós - Graduação em Educação Matemática, abordar e discutir questões relativas a ensino - aprendizagem da Matemática, principalmente questões relativas ao ensino dos números inteiros. Com o envolvimento maior que passamos a ter com o universo da Educação Matemática, ampliamos mais e mais nosso interesse em desenvolver um trabalho nessa área. No segundo semestre, como aluna especial, frequentamos a disciplina Dimensões Psico - Emocionais, Sociais e Culturais da Educação

Matemática, oferecida pelo Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática, ministrada pelo Prof. Dr. Antônio Carlos Carrera de Souza.

Toda essa vivência em contato com o GPA nos levou a desenvolver um projeto de pesquisa em sala de aula com materiais alternativos, que proporcionassem uma mudança na metodologia tradicional de ensino e que apresentassem resultados satisfatórios, tanto em relação ao aproveitamento do aluno quanto ao interesse que despertassem - pela disciplina e pela escola. Devido a nossa prática e preocupação com o ensino de números inteiros, este passou a ser o conteúdo escolhido para a prática em sala de aula.

Após este trajeto, ao final do ano de 1995, fomos aprovados no exame de seleção para o Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática, e passamos a desenvolver nosso projeto no início de 1996, o que, após muitas indagações, aplicações e constante avaliação, gerou o presente trabalho.

TRAJETÓRIA DE PESQUISA

A experiência de fazer parte de um grupo como o GPA acabou gerando um amadurecimento de nossas indagações, e uma meta pôde ser traçada: a avaliação de novas técnicas para a abordagem do conteúdo de números inteiros.

Ao ingressar no Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática, nos foi apresentado um material didático para o ensino de números inteiros sob a forma de três jogos: Jogo das Borboletas, Jogo de Perdas e Ganhos e Jogo do Caracol[3], anteriormente criados pelo G - Rio[4] e que se propunham a resolver, em ação[5], quatro problemas didáticos: *Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes?* O GPA tinha, como uma de suas metas, o desenvolvimento, aprimoramento e avaliação desses jogos e outros que eventualmente viessem a ser idealizados.

De posse dos jogos, inicialmente, nos dividimos em pequenos grupos e cada dia jogávamos um deles, a fim de nos familiarizarmos com sua estrutura e avaliarmos nossas primeiras impressões. As regras eram lidas e discutidas e, após duas horas de jogo, avaliávamos se tais regras eram claras e as impressões gerais: praticidade, interesse que despertaria, nível de dificuldade e outros pontos.

As mudanças sugeridas nas regras do Jogo das Borboletas, que vigoram até hoje, foram a substituição dos alfinetes, que seriam espetados no isopor do tabuleiro, por botões, o aumento do tamanho do tabuleiro, o aumento da

---

[3] O Jogo da Borboleta e o Jogo de Perdas e Ganhos podem ser encontrados no capítulo 3, p.22-37 e o Jogo do Caracol nos Anexos, p. 221.
[4] Grupo Pedagógico do Estado do Rio de Janeiro, fundado a partir de um projeto do Centro de Ciências da FAPERJ com auxílio do PADCT/ CAPES.
[5] Resolver em ação significa proporcionar aos jogadores um conjunto de atividades de caráter recreativo nas quais as quatro perguntas citadas apareçam sob forma de situações - problema grupais.

quantidade de cartas (de 24 para 44 cartas). Após essas mudanças, uma nova regra foi elaborada.

Realizou-se então uma intervenção, somente com o Jogo das Borboletas, por dois elementos do grupo, Helena Alessandra Scavazza e Antonio Luis Mometti, que cursavam a Licenciatura em Matemática. Esta intervenção foi aplicada na sala de aula da qual um deles era professor (Helena), gerando um trabalho apresentado na disciplina Prática de Ensino do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP - Rio Claro, ministrada pelo Professor Antonio Carlos Carrera de Souza.

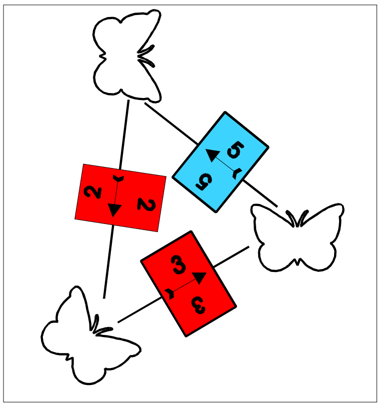
A intervenção se deu em uma 5ª série da Escola Estadual de Primeiro Grau "Professora Heloísa Marasca", no município de Rio Claro - SP (nome que vigorou até 1997). "No seu desenrolar a estratégia usada foi a de não "ensinar", e sim esperar que os alunos recorressem espontaneamente a procurar soluções, devido às dificuldades apresentadas pelo jogo. E a pergunta diretriz que norteou o desenvolvimento da pesquisa foi: Os alunos de 5ª série recorrem à composição de operadores como estratégia de resolução de circuitos de operadores aditivos com números inteiros?" (Mometti & Scavazza, 1994).

A classe foi dividida em nove grupos de quatro componentes, utilizando-se aula dupla das seis semanais, durante o período de sete semanas. Aos sábados, no GPA, discutíamos os resultados obtidos e propúnhamos o que seria feito durante a intervenção.

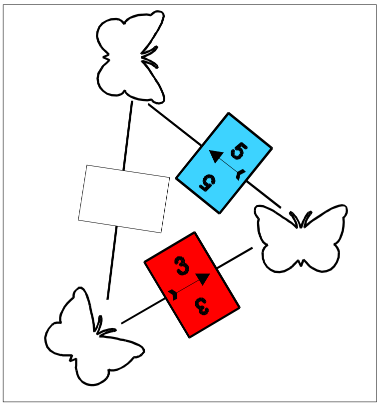
Inicialmente, os coordenadores da intervenção jogaram com os alunos a versão recreativa concreta e, em seguida, apresentaram e jogaram a versão recreativa abstrata, propondo que o jogador que iniciasse a partida poderia "imaginar" uma quantidade qualquer de botões na primeira borboleta, e assim continuar jogando. Era realizado constante monitoramento nos grupos. Após a apresentação dessas duas versões do jogo, interrompeu-se esse procedimento, dando-se início às atividades em folha de sulfite. Assim, realizaram-se quatro atividades, sendo que as três primeiras abordavam problemas de completamento de circuitos (figura 1), e a última de composição de cartas (figura 2).

FIGURA1

1) Complete as borboletas abaixo com números (como se fossem o número total de botões):



2) Complete as cartas nos circuitos abaixo:



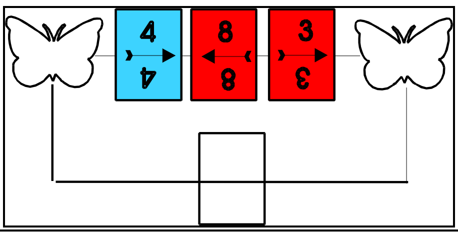
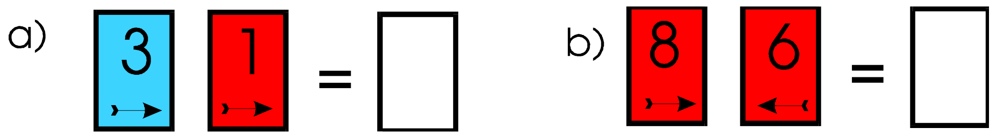


FIGURA 2

1) Complete as cartas em branco.



Os resultados obtidos foram:

1) Os objetivos do grupo durante a versão concreta foram atingidos, uma vez que os alunos superaram as dificuldades encontradas no jogo, como, por exemplo, o problema decorrente de quando o número de botões colocados numa borboleta fosse insuficiente, para permitir a retirada determinada pela carta que o jogador queria colocar sobre uma trajetória ligada a essa borboleta: deveria acrescentar botões a todas as borboletas já preenchidas, de modo a tornar a subtração possível.

2) Durante a fase abstrata do jogo os alunos não conseguiram resolver, em ação, a composição dos operadores aditivos e se liberar da fase concreta, recorrendo sempre a cálculos mentais para determinar a carta que completava o circuito.

3) As atividades também foram resolvidas recorrendo a cálculos mentais, ou seja, os alunos "pensavam" em uma quantidade de botões nas borboletas e alguns até mesmo escreviam nelas a quantidade, apagando posteriormente. Na última atividade, na qual os circuitos com as borboletas foram suprimidos, restando apenas os cartões com os operadores, notou-se que, além de parte da atividade não ser resolvida, não foi feito uso das atividades anteriores, nem lançaram mão das estratégias do jogo, tentando obter outro método de resolução (quando as cartas possuíam a mesma cor, os alunos adicionavam, enquanto que, em contrapartida, com cores diferentes, como por exemplo uma

carta 8 vermelha e uma carta 5 azul, não conseguiam resolver sozinhos). Em nenhum momento se importaram com a falta das borboletas nessa atividade.

Assim, o grupo chegou à seguinte conclusão, relatada ao GPA: o jogo e as atividades tais como foram elaborados ou aplicados não permitem que os alunos de 5ª série recorram à composição de operadores aditivos.

Nas regras do Jogo de Perdas e Ganhos nada foi alterado, enquanto que as do Jogo do Caracol exibiam muitas falhas; o grupo não conseguiu reformulá-las, permanecendo sem alteração. Mesmo assim, os três jogos proporcionaram material para muitos mini - cursos.

No ano seguinte, 1995, o Jogo de Perdas e Ganhos foi aplicado por um dos integrantes do GPA, Marinalva da Silva, em uma segunda série de um colégio particular da região de Rio Claro[6], obtendo muito sucesso entre as crianças, com a confecção do material do jogo elaborado pelos próprios alunos, que apresentaram muita facilidade em jogar. Após a aplicação do jogo, foi realizada pelos alunos uma exposição dos jogos elaborados e de desenhos que versavam sobre a experiência deles com o jogo.

Nesse mesmo ano, realizou-se outra intervenção somente com o Jogo das Borboletas, com o objetivo de reformular a última intervenção realizada, agora aplicada pela autora (que pertencia ao GPA), com a contribuição de mais duas estagiárias, durante o transcorrer da disciplina Prática de Ensino, ministrada pelo Prof. Dr. Antônio Carlos Carrera de Souza na UNESP, Rio Claro. Foi realizada esta intervenção na Escola Estadual de Primeiro e Segundo Graus “Professor João Batista Leme” (nome anterior à reorganização de ensino), no município de Rio Claro - SP. Aos sábados, durante as reuniões do GPA, eram discutidos os resultados obtidos e propostos os novos rumos a serem tomados durante a intervenção.

[6] Colégio Einstein - Limeira - SP.

O tempo utilizado na aplicação da pesquisa com o Jogo das Borboletas foi de dois meses e meio, com a classe de 5ª série dividida em nove grupos de quatro elementos cada, constantemente monitorados pela docente e pelas estagiárias. A avaliação era efetuada diariamente, através dos critérios assiduidade e participação. O trabalho foi realizado em três etapas: versão concreta, versão abstrata e simbolização.

Inicialmente, propusemos que as crianças jogassem a modalidade versão concreta, realizando, em paralelo, atividades em folhas de papel sulfite, com o objetivo de transportar o jogo para o papel, registrando o ocorrido. As atividades de cada aula eram devidamente corrigidas, e eventualmente devolvidas ao grupo para refazê-las, caso houvesse erros.

Após um certo tempo colocou-se a demanda de que os alunos não usassem botões, visto que “as borboletas tinham voado levando junto os botões” (versão abstrata). Nesta versão, continuou-se com atividades paralelas ao jogo.

Ao término da etapa do jogo, prosseguiu-se apenas com atividades, em folhas sulfite, que continham inicialmente, problemas de completamento de circuitos enunciados com o material do jogo e, posteriormente, problemas do mesmo teor, com a notação matemática usual.

Insistindo nas atividades, que agora tratavam de simbolização, foi proposta a substituição da cor vermelha pelo sinal – e a azul pelo sinal + ; a seta no sentido $\rightarrow$ pelo sinal + e no sentido oposto $\leftarrow$ pelo sinal –, com o intuito de que os alunos realizassem operações como $+(-4)\ \ -(+3)\ =\ +(-7)$. A intervenção foi finalizada após esta etapa.

Durante o transcorrer desta intervenção esperava-se que, mediante a demanda descrita acima, os alunos desenvolvessem esquemas próprios para a composição de operadores aditivos sem usar os botões sobre as borboletas. Outro quesito esperado era que as atividades, em folhas de sulfite, paralelas ao jogo, contribuíssem para a fixação do jogo e preparação dos alunos para a versão abstrata.

Na prática, observou-se o seguinte comportamento: na versão abstrata, a fim de fecharem os circuitos do jogo, os alunos "imaginavam" uma quantidade de botões nas borboletas, fato que foi permitido pelos coordenadores da intervenção, visto que se supunha que, à medida que jogassem, iriam “perceber” a composição. Durante a intervenção, constatou-se que os alunos não estavam sendo capazes de realizar a composição desejada. Na tentativa de superar essa dificuldade, elaboraram-se mais atividades. Para resolvê-las, os alunos passaram a trabalhar, por sugestão de uma das estagiárias, com a noção de perder e ganhar. Assim, as cartas vermelhas representavam uma perda ou gasto, enquanto que as cartas azuis, um ganho. Com isso, os alunos deixaram de lado o jogo e passaram a resolver todas as atividades restantes utilizando a noção de perder e ganhar.

As últimas atividades foram um fracasso. Somente os alunos que haviam decorado a “estratégia de resolução”, utilizando a noção de perder e ganhar, conseguiram resolvê-las. Ao constatar as dificuldades dos alunos, continuou-se insistindo nas atividades, em vez de concluir-se que o jogo, como tinha sido aplicado, não havia atingido seu objetivo.

Ao serem introduzidas atividades paralelas ao jogo, caiu-se na posição que tem por objetivo introduzir situações de funcionamento ótimo do conceito a ser ensinado, implicando a tentativa de controle de todos os passos da aprendizagem. Isso ocorreu porque não se distinguiu o Jogo do Ludo. Segundo Baudrillar (1991), o jogo é vertigem, é suspensão da lei em prol da regra, é risco de morte simbolizado, é paixão, é sedução. O lúdico é a demanda de um modelo que torna impossível qualquer desafio. O lúdico desfaz o encantamento e a sedução, colocando em seu lugar a fascinação. Ao lúdico cabe o controle das ações do sujeito, pois nele são determinadas e controladas todas as possibilidades de "jogar". Em suma, o jogo é da ordem do sentido, o ludo, da ordem do significado (Baldino & Cabral, 1993).

Concluiu-se que, se a composição dos operadores aditivos não ocorrer na etapa do jogo, é inútil a aplicação de atividades. Essa conclusão foi reforçada pela chegada de um novo aluno, durante a intervenção. Ele não havia participado das etapas iniciais, vindo a ter contato com o jogo apenas através de colegas de classe e, utilizando a noção de perder e ganhar, transmitida pelos componentes de seu grupo, pôde resolver, sem erros, todas as atividades finais.

Nesta intervenção, pelos motivos analisados, não se pode concluir pela eficácia do Jogo das Borboletas para o ensino dos números inteiros na 5ª série.

O final desse ano foi marcado pelo ingresso na Pós - Graduação em Educação Matemática, sendo que já vinha sendo desenvolvido um trabalho junto ao grupo de orientação do Professor Roberto Baldino. O grupo, GPA - Números Inteiros, tinha chegado à conclusão de que esse era o momento de se realizar uma intervenção mais sistemática, agora com os três jogos. Passamos assim a nos dedicar exclusivamente a isso. Em março de 1996 apresentamos aos coordenadores da PGEM o projeto com o título: “Três jogos para números inteiros: uma análise”.

O projeto apresentava a seguinte pergunta diretriz: Qual é a eficácia didático - pedagógica desses três jogos ? - e tinha por objetivo: desenvolver os três jogos de maneira satisfatória, de modo que os alunos pudessem resolver, em ação, as quatro perguntas: Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes?

Neste projeto propomos a utilização desse material didático em sala de aula, prevendo a transição do jogo ao conhecimento formalizado. Como, então, instituir esses jogos na sala de aula de Matemática? Como passar deles ao conhecimento formal? A essas perguntas fornecemos as seguintes respostas de caráter normativo:

"- As leis da sala de aula e da escola devem abrir o espaço da paixão pelo jogo que se quer instituir.

- As ações vividas, suscitadas pelo jogo, devem-se integrar no processo didático geral, como base para futura abstração.

- A passagem do jogo ao saber formalizado deve-se fazer pela suspensão da paixão do jogo através da fase lúdica, substituindo o jogo por seu modelo, registrando as operações e impondo os significados culturais estabelecidos." (Baldino & Cabral, 1993).

Após a apresentação do projeto, durante o ano de 1996, foram cursadas as disciplinas obrigatórias do curso de Pós - Graduação. Nesse ano, com o auxílio do grupo de Inteiros e de orientação, foram preparados os jogos para a intervenção, proposta do projeto, que se deu no ano de 1997.

Durante o ano de 1996 tentamos reformular o Jogo do Caracol. Como tal empreitada não logrou sucesso, foi elaborado um novo jogo para substituí-lo, denominado então, Jogo das Araras, voltado para abordar a multiplicação de números inteiros.

Finalizada a montagem do Jogo das Araras e antes de ser aplicado, foi questionado o grau de dificuldade implícito nas operações que aparecem entre as araras brancas e que os jogadores são obrigados a resolver[7]. Inicialmente se pensou em introduzir outros cartões de sorteio, no Jogo de Perdas e Ganhos, de modo que as operações desejadas passassem a fazer parte dele, mas ao introduzir tais cartões o jogo tornava-se muito demorado, pois teríamos que aumentar o tabuleiro e, conseqüentemente, o jogador teria passos demais a cumprir no jogo. Então, resolvemos não modificar o Jogo de Perdas e Ganhos que já estava com as regras muito bem elaboradas.

No início do ano de 1997 (mês de março) o grupo do GPA - Inteiros havia se restringido à pesquisadora e ao Professor Baldino, enquanto que os outros integrantes estavam trabalhando em outros grupos do GPA, mas participavam dos resultados do trabalho, todo sábado, quando eram feitos o relato e discussão dos grupos. Como havíamos desistido de modificar o Jogo de Perdas e Ganhos, resolveu-se criar um novo jogo que denominamos Jogo das Apostas, para trabalhar tais operações[8].

Com os quatro jogos prontos, iniciou-se a tão esperada intervenção, desta vez introduzindo-se primeiro os quatro jogos, e deixando que os alunos os jogassem por jogar (vertigem da regra que nos livra da lei; Baudrillar, 1991). Só depois seriam acrescentadas as fichas de atividades. Para os quatro jogos, a pergunta diretriz, o objetivo e a proposta continuariam os mesmos.

Iniciou-se a intervenção, sob responsabilidade da pesquisadora, agora não mais com três, porém com quatro jogos em uma 5ª série, do período da tarde, da Escola Estadual de Primeiro Grau Professor Délcio Báccaro (nome que vigorou até 1997), localizada na cidade de Rio Claro.

A escolha da 5ª série, nas duas outras intervenções realizadas pelo GPA - Números Inteiros, havia sido feita a partir do que as professoras conseguiram obter junto à Delegacia de Ensino na escolha de aulas, ou seja, esta escolha não havia sido proposital. Já para a intervenção final, a professora - pesquisadora escolheu propositalmente a 5ª série, sem, porém, ter havido a possibilidade de escolha do período, ficando disponível apenas o período da tarde. Apesar da Proposta Curricular da CENP (1988)[9] sugerir que números inteiros devam ser abordados a partir da 6ª série, a partir de 1996, a questão "determinar o valor didático - pedagógico de quatro jogos na tentativa de antecipar esse assunto para a 5ª série", passou a ser uma questão investigada por nossa pesquisa.

---

[7] O Jogo das Araras pode ser encontrado no capítulo 3, p. 42.
[8] O Jogo das Apostas pode ser encontrado no capítulo 3, p. 37.
[9] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenaria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta Curricular para o ensino da Matemática: 1º grau. São Paulo: SE/CENP, 1988.

Após um mês de aplicação dos jogos, uma professora de Matemática da escola solicitou-nos que fosse realizada a aplicação dos jogos em duas de suas salas de aula, uma 6ª série e uma 7ª série do primeiro grau (atual ensino fundamental), pedido prontamente atendido. Então, a partir disso, realizou-se a intervenção nas três séries. Durante esta intervenção, procurou-se responder à pergunta diretriz: Qual é a eficácia didático - pedagógica desses quatro jogos?, além de ter por objetivo desenvolver os quatro jogos, para que os alunos pudessem resolver, em ação, as quatro perguntas: Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes? O procedimento de intervenção será alvo do próximos tópicos, que procuram relatar esta experiência.

CONHECENDO OS JOGOS[1]

Antes de tratarmos da intervenção realizada conheceremos os jogos utilizados.

JOGO DAS BORBOLETAS

Esse jogo possui duas versões:

- versão recreativa
- versão escolar

E cada versão possui duas modalidades:

- versão recreativa concreta e versão recreativa abstrata
- versão escolar concreta e versão escolar abstrata

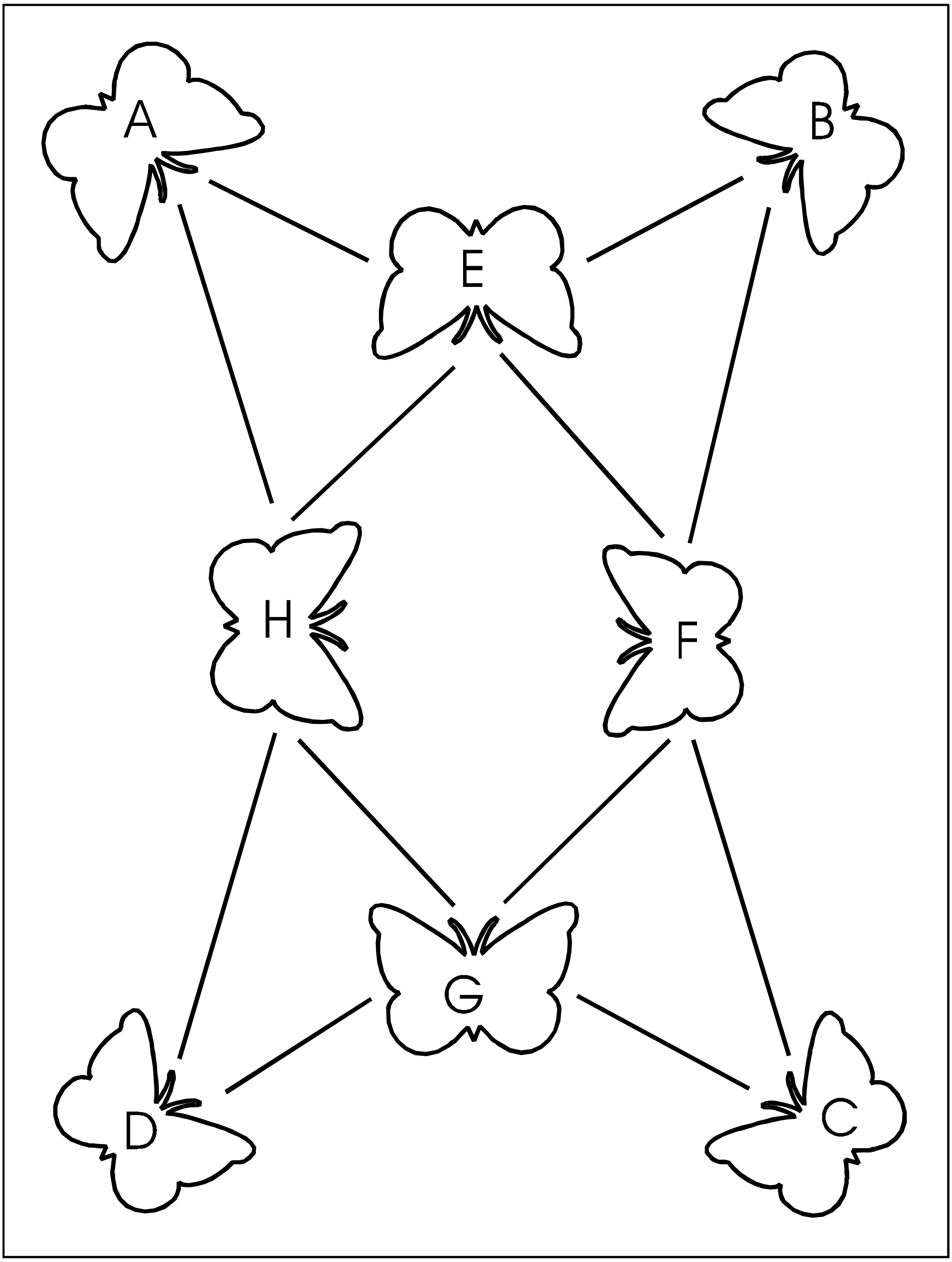
Versão Recreativa Concreta

O jogo, nessa versão, é constituído de:

1) Um tabuleiro (desenhado abaixo);

[1] Os jogos aqui apresentados encontram-se na p. 3 do Volume do Professor, em escala apropriada para fotocópia.

TABULEIRO DO JOGO DAS BORBOLETAS



No tabuleiro há oito **borboletas** desenhadas e entre elas, existem doze segmentos de reta chamados **trajetórias**, que formam cinco **circuitos**: quatro **externos** e um **interno** (veja o desenho do tabuleiro):

- **Circuitos externos**, formados pelas borboletas AEH, BEF, CFG, DGH;

- **Circuito interno**, formado pelas borboletas EFGH.

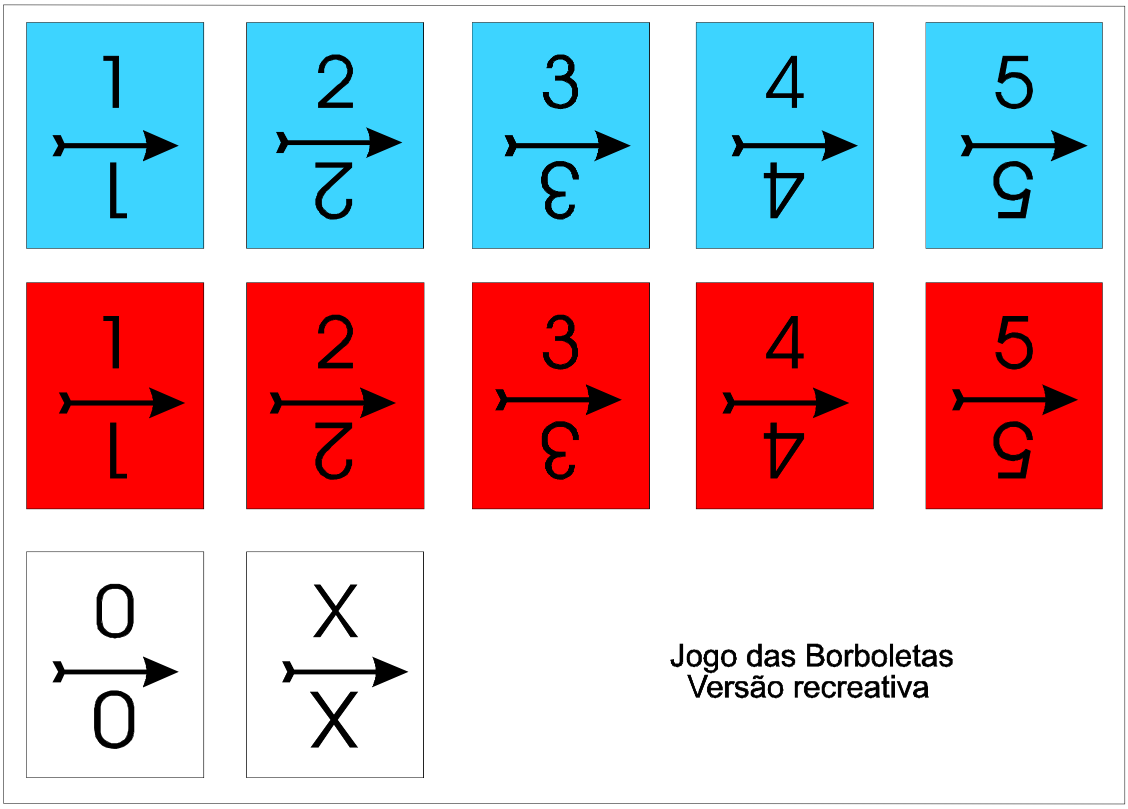
2) 44 cartas (desenhadas abaixo), sendo:

- **Duas cartas brancas** marcadas com o **número 0** (**zero**);

- **Duas cartas brancas** marcadas com o **curinga** (no desenho abaixo representado por **X**);

- **Vinte cartas vermelhas** marcadas com seguintes **números: 1, 2, 3, 4, 5;** sendo **quatro cartas de cada número**;

- **Vinte cartas azuis** marcadas com seguintes **números: 1, 2, 3, 4, 5;** sendo **quatro cartas de cada número**.



3) Cinco cartões para marcar os pontos obtidos durante as partidas: quatro de 1 ponto e um de 2 pontos;

4) Botões brancos e pretos.

REGRAS PARA JOGAR

1ª) Podem jogar dois, três ou quatro jogadores. No início da partida embaralham-se as 44 cartas e cada jogador recebe três delas. As restantes formam o monte.

2ª) Sorteia-se quem começa. A ordem das jogadas é pela esquerda.

3ª) O jogador que inicia o jogo escolhe uma trajetória ligando duas borboletas no tabuleiro. Em seguida este jogador escolhe e coloca uma carta no tabuleiro, de modo que a flecha desenhada nela se sobreponha à trajetória escolhida e coloca vários botões brancos em cada uma das duas borboletas ligadas pela trajetória, respeitando a seguinte regra:

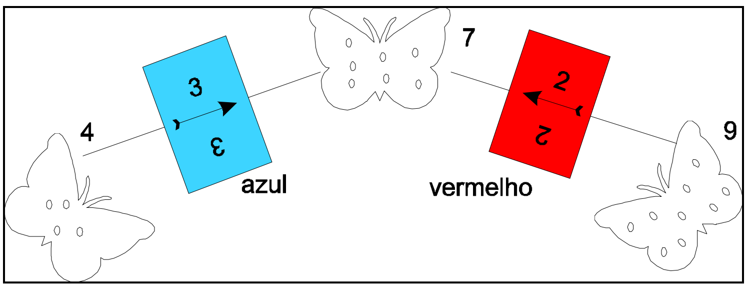
Regra do jogo

- Se a carta sobre a trajetória for **azul**, o número de botões na borboleta de onde parte a flecha **mais** o número da carta, deve ser igual ao número de botões na borboleta para onde a flecha aponta.

- Se a carta sobre a trajetória for **vermelha**, o número de botões na borboleta de onde parte a flecha **menos** o número da carta, deve ser igual ao número de botões na borboleta para onde a flecha aponta.

Após colocar uma carta no tabuleiro, o jogador apanha outra no monte, ficando assim sempre com três cartas na mão.

4ª) O jogador seguinte deve colocar uma carta sobre uma das trajetórias que ligam uma das borboletas já preenchidas a uma borboleta vazia, preenchendo a borboleta vazia com a quantidade de botões necessária para satisfazer a regra do jogo. Veja o exemplo abaixo:



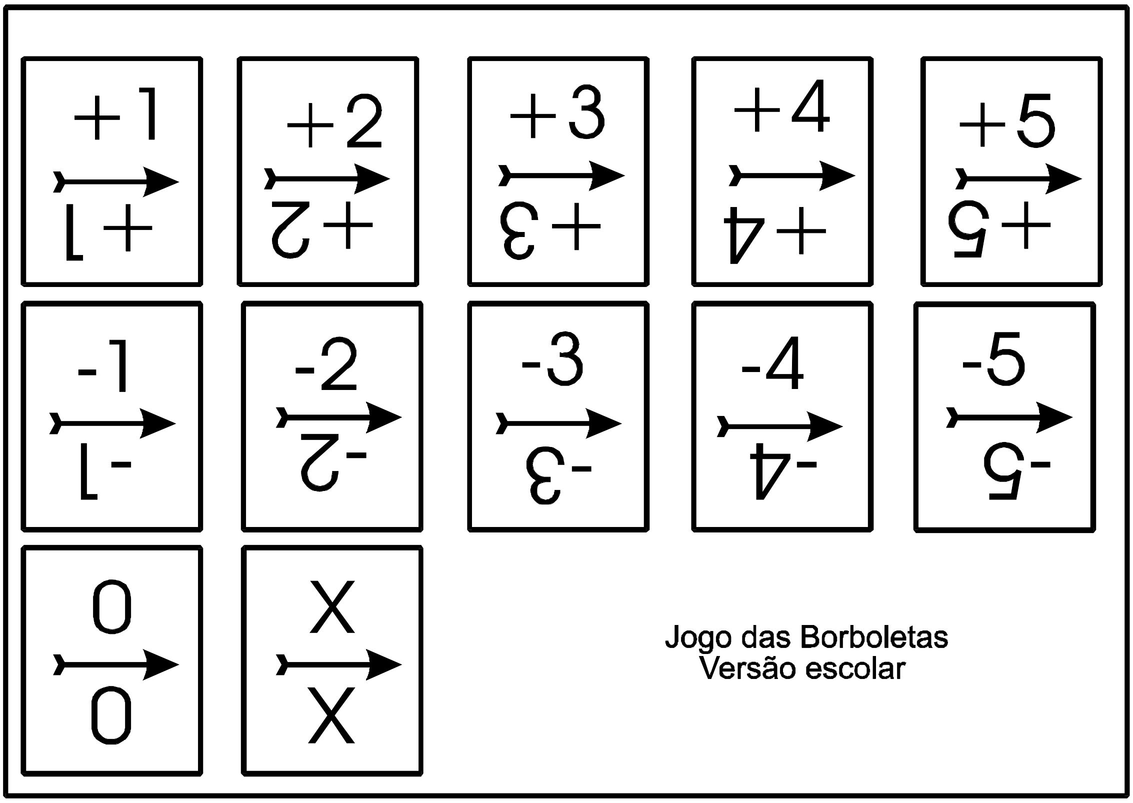
5ª) O objetivo de cada jogador é fechar um circuito. O jogador **fecha um circuito** quando coloca uma carta na última trajetória vaga do circuito. O jogador que conseguir fechar um circuito externo, marca **um (1) ponto** e recebe um cartão com o respectivo ponto. O que conseguir fechar o circuito interno marca **dois (2) pontos** e recebe um cartão com os respectivos pontos. Ganha o jogo quem somar mais pontos em todas as partidas jogadas.

6ª) A carta marcada com o **X** funciona como curinga e pode assumir qualquer valor. Se o número de botões brancos sobre uma borboleta ultrapassar cinco, usam-se botões pretos para substituí-los: cada botão preto representa cinco brancos. Se um jogador não tiver como colocar qualquer de suas cartas no tabuleiro, obedecendo à regra do jogo, ele deverá ceder a vez ao jogador seguinte. A partida termina quando nenhum jogador puder mais colocar suas cartas, respeitando a regra do jogo, ou quando todos os jogadores tiverem colocado todas as suas cartas.

7ª) No decorrer do jogo pode surgir uma trajetória vazia, ligando duas borboletas já preenchidas. O jogador poderá colocar sua carta sobre esta trajetória, sempre respeitando a regra.

Versão Escolar Concreta

O material e as regras são os mesmos que os da versão recreativa concreta. A única diferença é que nessa versão utilizam-se, em vez de cartas azuis, cartas em que os números vêm precedidos do sinal *mais* (+) e, em vez de cartas vermelhas, utilizam-se cartas com os números precedidos do sinal *menos* (–) como no desenho abaixo:

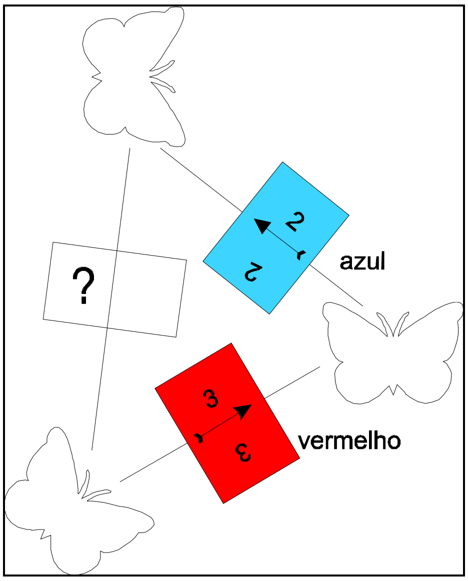


Versão Recreativa Abstrata

O jogo, nessa versão, é constituído basicamente do mesmo material da versão recreativa concreta. A única diferença é que, na versão recreativa abstrata, não há botões.

REGRAS PARA JOGAR

Nessa versão, os botões foram levados pelas borboletas e não existem mais. Os jogadores não podem lançar mão de nenhum recurso para preenchimento das borboletas. Para continuar jogando, os jogadores precisam desenvolver alguma estratégia para descobrir qual carta deve ser colocada no lugar da indicada com o ponto de interrogação, em uma situação como a da figura abaixo:



Versão Escolar Abstrata

As regras são as mesmas que as da versão recreativa abstrata. A única diferença é que nessa versão utilizam-se, em vez de cartas azuis, cartas em que os números vêm precedidos dos sinal *mais* e, em vez de cartas vermelhas, utilizam-se cartas com os números precedidos do sinal *menos*.

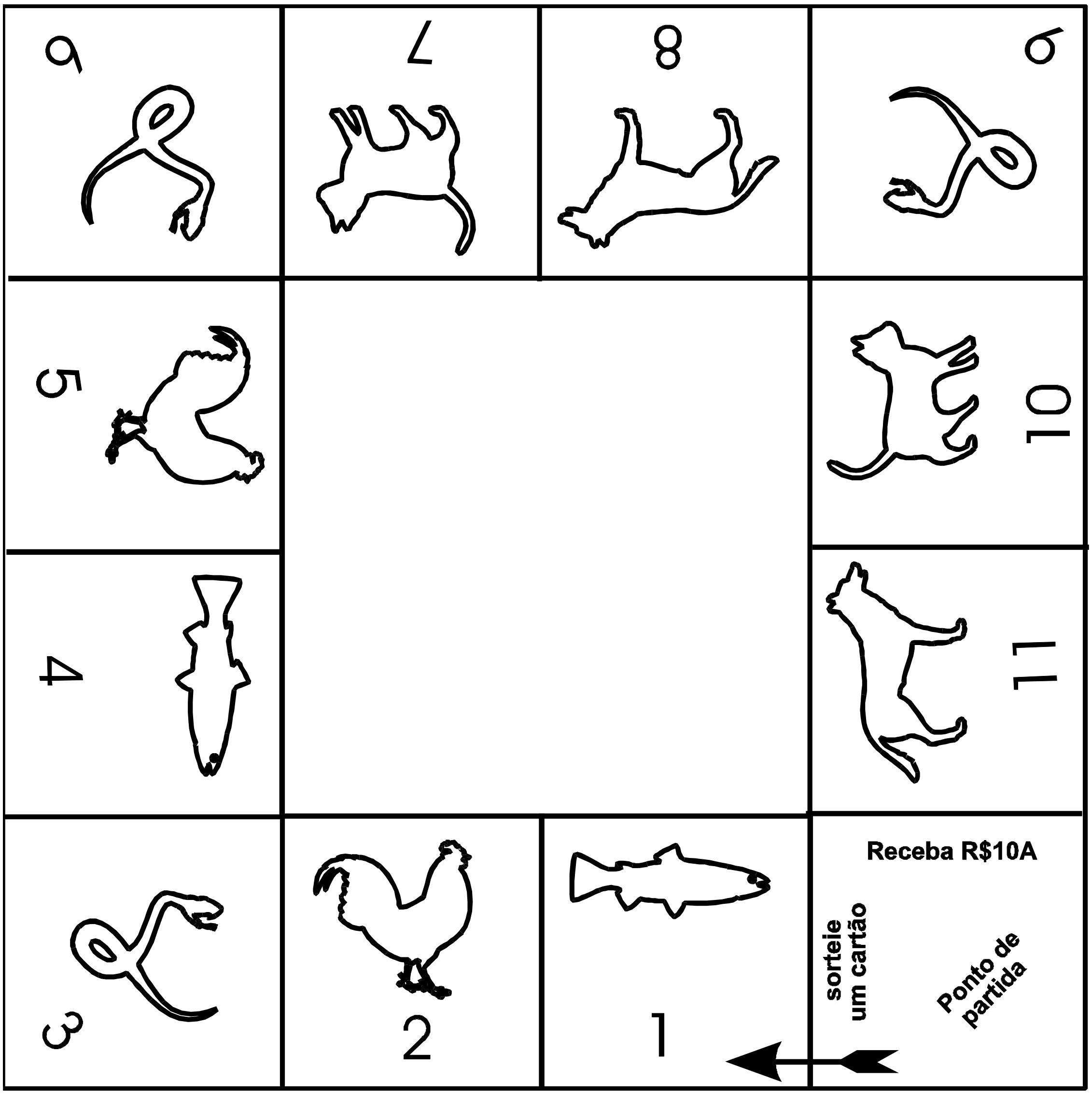
JOGO DE PERDAS E GANHOS

Esse jogo é semelhante aos Banco Imobiliário e Banco Monopólio, encontrados no comércio. A diferença é que, aqui, há dinheiro azul e vermelho em forma de notas. O dinheiro azul representa meio de pagamento, como o dinheiro de verdade. O dinheiro vermelho representa dívida. Se um jogador possui *X*R$ em dinheiro vermelho, isso significa que ele deve ao banco *X*R$ e deve pagar essa dívida logo que possa dispor de *X*R$ em dinheiro azul. Para pagar a dívida, ele entrega ao banco os *X*R$ em dinheiro vermelho e mais *X*R$ em dinheiro azul.

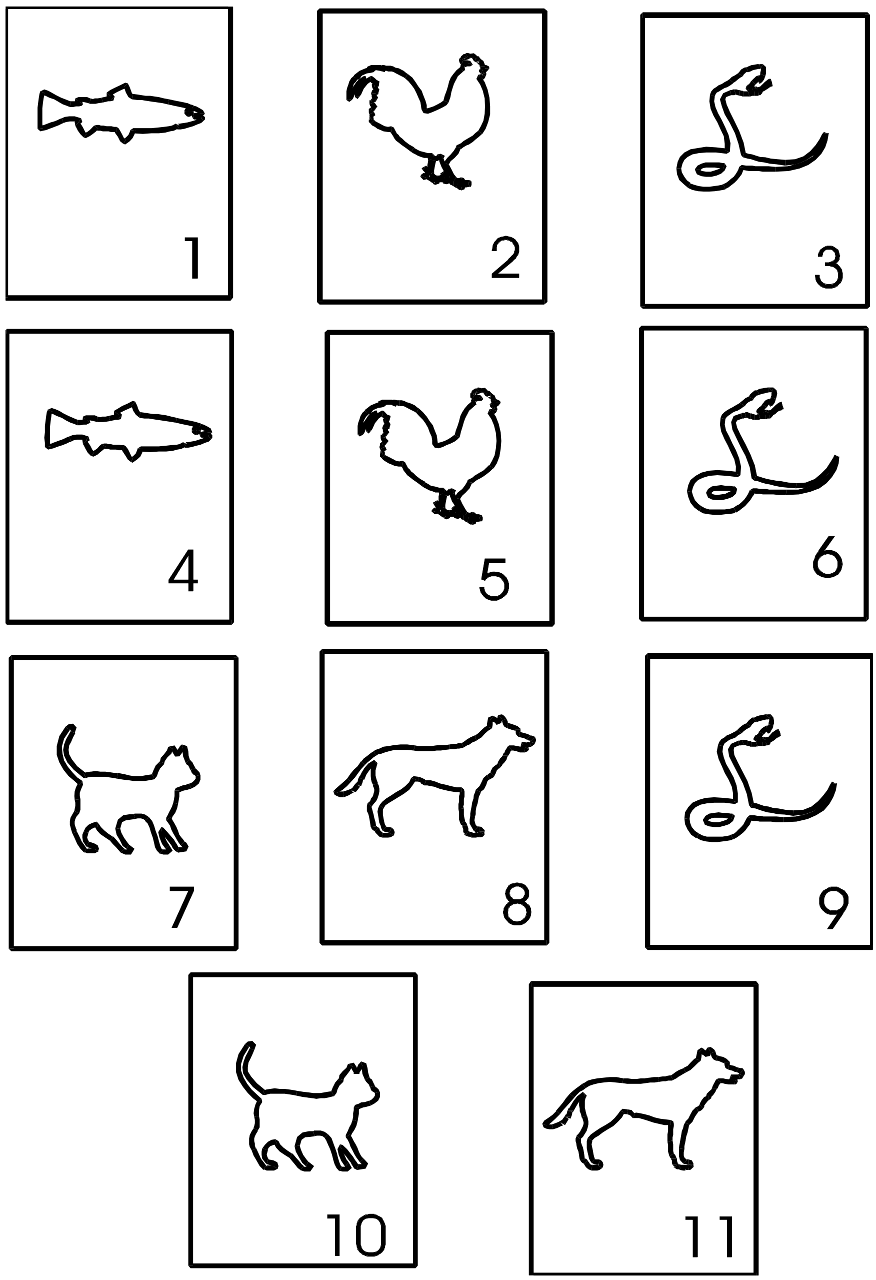
O jogo é constituído de:

1) Um **tabuleiro** (desenhado abaixo);

TABULEIRO DO JOGO DE PERDAS E GANHOS



2) Onze cartões dos **títulos de propriedade** dos terrenos (desenhados abaixo);



3) Oito cartões de **sorteio** (desenhados abaixo);

Você entrega $10 A ao banco	Você entrega $10 V ao banco
Você dá $10 A a seu colega à direita	Você dá $10 V a seu colega à esquerda
Retire $10 V de seu colega à direita e fique com eles	Retire $10 V de seu colega à esquerda e entregue-os ao banco
O banco lhe dá $10 A	O banco lhe dá $10 V

4) Sessenta cédulas de **dinheiro azul**; sendo trinta de R$1,00, vinte de R$5,00 e dez de R$10,00 (desenhadas abaixo);

5) Sessenta cédulas de **dinheiro vermelho**; sendo trinta de R$1,00, vinte de R$5,00 e dez de R$10,00 (desenhadas abaixo);

R$1,00	R$1,00
R$1,00	R$1,00
R$1,00	R$1,00
R$5,00	R$5,00
R$5,00	R$5,00
R$10,00	R$10,00

6) Cinco **botões coloridos** que representam os **peões**;

7) Trinta **peças brancas** que representam as **casas**;

8) Um **dado**.

REGRAS PARA JOGAR

1ª) Podem jogar até quatro jogadores, além de mais um que se encarrega do banco.

2ª) Inicialmente cada jogador recebe R$10,00 em dinheiro azul, escolhe o botão de sua cor preferida e o coloca na casa *ponto de partida* do tabuleiro. O dinheiro (azul e vermelho) restante fica com o banco.

3ª) Lança-se o dado para ver qual dos jogadores deve iniciar a partida. O jogador que tirar o maior número de pontos começará. A ordem das jogadas é pela esquerda.

4ª) Há 11 **terrenos** numerados, ao redor do tabuleiro. Em cada terreno mora um bicho. Cada jogador lança o dado e avança seu botão pelo tabuleiro o número de quadrinhos igual ao número do dado (na direção indicada pela flecha desenhada no tabuleiro).

5ª) No início do jogo todos os terrenos são de propriedade do banco; o banqueiro guarda consigo os *títulos de propriedade.*

6ª) Se o jogador parar com o seu peão em um terreno, de número *X* por exemplo, que ainda seja de propriedade do banco, poderá optar por comprá-lo ou ir adiante.

6a) Se optar por ir adiante, o terreno permanece de propriedade do banco, até que algum jogador caia com seu peão ali e decida comprá-lo.

6b) Se o jogador optar por comprar o terreno de número *X*, o jogador paga ao banco a importância de *X*R$ e o banqueiro lhe entrega o título de propriedade do terreno. Note que o número do terreno é igual a seu preço.

7ª) Se o terreno *X* já tiver sido vendido a outro participante, o jogador que cair nele deve pagar *X*R$ de **aluguel** ao proprietário. Note que o número do terreno é igual ao valor do aluguel a pagar.

8ª) Toda vez que passar pelo início do jogo, o banco lhe pagará R$10,00 e terá que sortear um cartão de sorteio.

9ª) Os terrenos em que mora a mesma espécie de bicho, formam um **lote.** Há cinco lotes:

Lotes
• Lote do peixe: terrenos 1 e 4
• Lote da galinha: terrenos 2 e 4
• Lote da cobra: terrenos 3, 6 e 9
• Lote do gato: terrenos 7 e 10
• Lote do cachorro: terrenos 8 e 11

Quando um jogador consegue comprar todos os terrenos de um lote, ele pode construir, em cada terreno do lote, uma, duas ou três **casas**, desde que não tenha dívida com o banco.

10ª) Para construir cada casa no terreno número *X* o jogador deve pagar ao banco o preço da casa: 2*X*$. Note que o preço da casa é igual a duas vezes o valor do terreno. Após o pagamento, o banqueiro lhe dá uma casa (peça branca) que ele vai colocar no terreno onde ela vai ser construída, nesse caso, no terreno número *X*. As casas não podem ser transferidas de um terreno a outro, mesmo que se tratem de terrenos do mesmo lote.

Preços e aluguéis
• Preço do terreno (valor do terreno): é igual ao **número** do terreno
• Preço de uma casa: é igual a **duas vezes** o valor do terreno
• Aluguel sem casas: é igual ao **valor** do terreno
• Aluguel com uma casa: é igual a **duas vezes** o valor do terreno
• Aluguel com duas casas: é igual a **quatro vezes** o valor do terreno
• Aluguel com três casas: é igual a **oito vezes** o valor do terreno

11ª) Se um jogador tiver que pagar ao outro algum dinheiro e não tiver o suficiente, ele poderá fazer um empréstimo do banco e ficará com a dívida (receberá dinheiro azul e vermelho para se lembrar de quanto está devendo ao banco), ou seja, se o jogador *A* tiver de pagar *Y*R$ ao jogador *B* e não tiver dinheiro (azul) suficiente, ele pode recorrer a empréstimo do banco e contrair uma **dívida.** Neste caso, o banqueiro dá ao jogador *A* *Y*R$ em dinheiro azul e *Y*R$ em dinheiro vermelho. O jogador *A* entrega a importância de *Y*R$ em dinheiro azul ao jogador *B* e guarda diante de si os *Y*R$ em dinheiro vermelho para **lembrar** de quanto está devendo ao banco. Não há limite para o endividamento dos jogadores.

12ª) O jogador poderá devolver suas casas ao banco, caso isso lhe convenha ou ajude, mas será pela metade do preço que pagou por elas.

13ª) Ganha o jogo o jogador que, ao cabo de um certo tempo, fixado no início do jogo, estiver mais rico, computando-se aí o valor de suas casas, terrenos e dinheiro azul e deduzindo-se desse total, o montante da dívida representada por dinheiro vermelho.

14ª) Não se pode comprar terreno ou casas com o dinheiro vermelho.

15ª) Nenhum jogador pode fazer dívida com o banco que não seja para pagar aluguel que deve a outro, executar instrução do cartão de sorteio ou comprar terreno que pertença ao banco.

16ª) Depois de lançar o dado, o jogador dá por encerradas suas negociações, construções e mudanças. A partir daí só lhe cabe avançar o botão e executar as ações devidas ao lugar onde caiu.

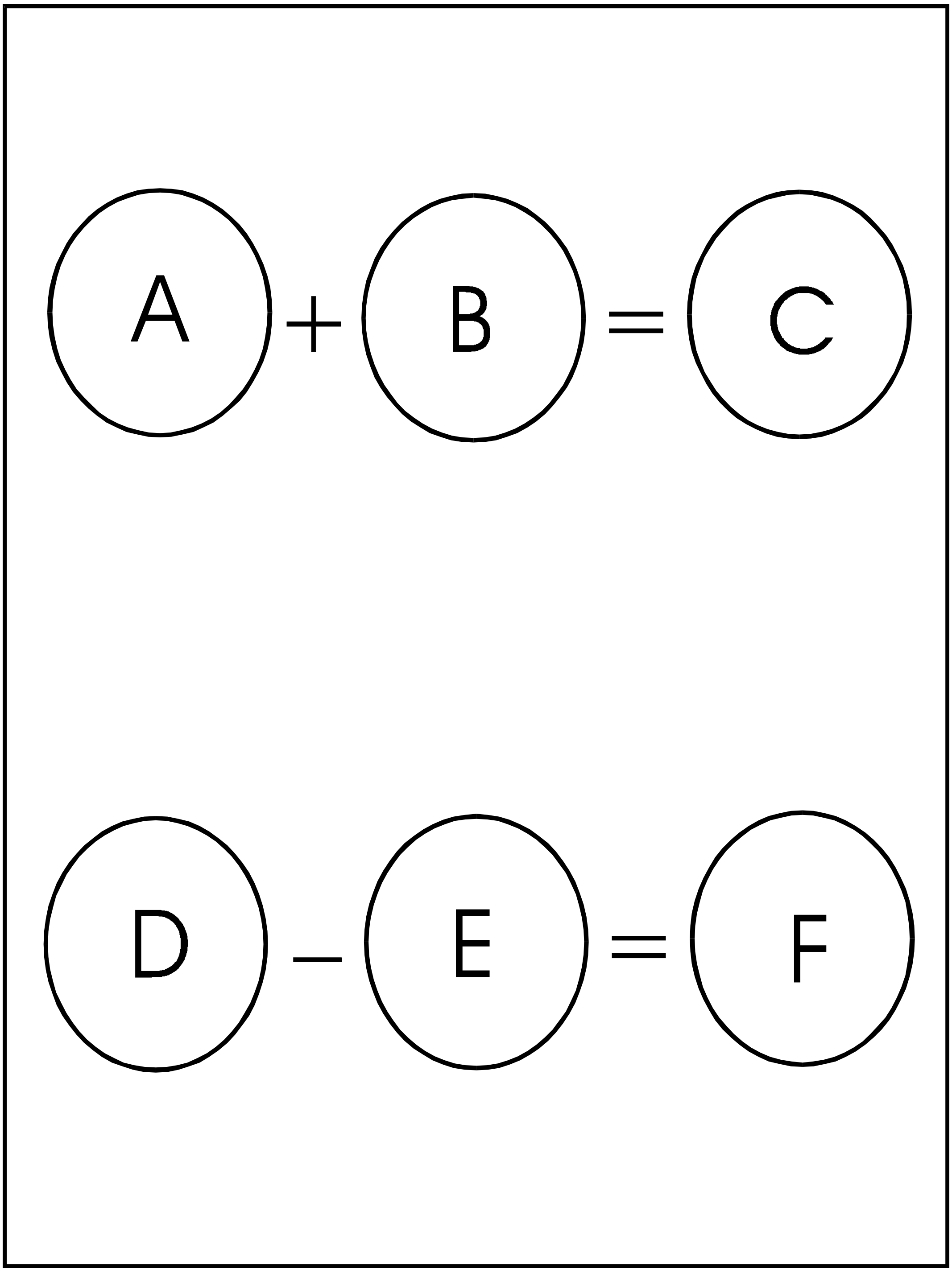
JOGO DAS APOSTAS

Nesse jogo trabalharemos com apostas realizadas através de fichas, como ocorre nos Cassinos. A diferença é que, aqui, há fichas azuis e vermelhas representadas por botões (azuis/vermelhos). A ficha azul representa meio de pagamento. A ficha vermelha representa dívida. Se um jogador possui X fichas vermelhas, isso significa que ele deve ao banco X fichas e deve pagar essa dívida logo que possa dispor de X fichas azuis. Para pagar a dívida, ele entrega ao banco as X fichas vermelhas e mais X fichas azuis, como ocorre com o dinheiro no Jogo de Perdas e Ganhos. Como é um jogo de azar, o jogador poderá ganhar ou perder apostando tanto fichas azuis quanto fichas vermelhas.

O jogo é constituído de:

1) Um **tabuleiro** (desenhado abaixo);

TABULEIRO DO JOGO DAS APOSTAS



2) 24 **cartões de sorteio** (desenhados abaixo);

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **D**. O primeiro parceiro põe 10A em **E**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **F**. Você recolhe o que foi colocado em **F**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **D**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **E**.	Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **A**. O primeiro parceiro põe 10A em **B**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **C**. Você recolhe o que o foi colocado em **C**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **A**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **B**.
Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **D**. O primeiro parceiro põe 10V em **E**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **F**. Você recolhe o que foi colocado em **F**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **D**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **E**.	Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **A**. O primeiro parceiro põe 10V em **B**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **C**. Você recolhe o que foi colocado em **C**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **A**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **B**.
Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **D**. O primeiro parceiro põe 10A em **F**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **E**. Você recolhe o que foi colocado em **E**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **D**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **F**.	Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **A**. O primeiro parceiro põe 10A em **C**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **B**. Você recolhe o que foi colocado em **B**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **A**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **C**.
Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **D**. O primeiro parceiro põe 10V em **F**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **E**. Você recolhe o que foi colocado em **E**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **D**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **F**.	Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **A**. O primeiro parceiro põe 10V em **C**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **B**. Você recolhe o que foi colocado em **B**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **A**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **C**.
Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **D**. O primeiro parceiro põe 10V em **F**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **E**. Você recolhe o que foi colocado em **E**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **D**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **F**.	Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **A**. O primeiro parceiro põe 10V em **C**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **B**. Você recolhe o que foi colocado em **B**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **A**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **C**.
Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **E**. O primeiro parceiro põe 10A em **D**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **F**. Você recolhe o que foi colocado em **F**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **E**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **D**.	Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **B**. O primeiro parceiro põe 10A em **A**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **C**. Você recolhe o que foi colocado em **C**. O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **B**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **A**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **E**. O primeiro parceiro põe 10V em **D**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **F**.
Você recolhe o que foi colocado em **F**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **E**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **D**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **B**. O primeiro parceiro põe 10V em **A**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **C**.
Você recolhe o que foi colocado em **C**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **B**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **A**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **E**. O primeiro parceiro põe 10A em **F**
O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **D**. Você recolhe o que foi colocado em **D**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **E**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **F**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **B**. O primeiro parceiro põe 10A em **C**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **A**.
Você recolhe o que foi colocado em **A**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **B**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **C**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **E**. O primeiro parceiro põe 10V em **F**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **D**.
Você recolhe o que foi colocado em **D**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **E**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **F**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **B**. O primeiro parceiro põe 10V em **C**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **A**.
Você recolhe o que foi colocado em **A**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **B**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **C**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **F**. O primeiro parceiro põe 10A em **D**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **E**.
Você recolhe o que foi colocado em **E**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **F**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **D**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **C**. O primeiro parceiro põe 10A em **A**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **B**.
Você recolhe o que foi colocado em **B**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **C**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **A**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **F**. O primeiro parceiro põe 10V em **D**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **E**.
Você recolhe o que foi colocado em **E**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **F**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **D**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **C**. O primeiro parceiro põe 10V em **A**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **B**.
Você recolhe o que foi colocado em **B**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **C**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **A**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **F**. O primeiro parceiro põe 10A em **E**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **D**.
Você recolhe o que foi colocado em **D**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **F**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **E**.

Você aposta. Ponha o dinheiro apostado em **C**. O primeiro parceiro põe 10A em **B**. O segundo parceiro põe o suficiente para acertar a conta em **A**.
Você recolhe o que foi colocado em **A**.
O primeiro parceiro recolhe o que foi colocado em **C**. O segundo parceiro recolhe o que foi colocado em **B**.

3) Uma caixa de **botões azuis** representando as **fichas de apostas azuis**;

4) Uma caixa de **botões vermelhos** representando as **fichas de apostas vermelhas**.

REGRAS PARA JOGAR

1ª) Esse jogo é feito para três jogadores podendo ter mais um que se encarrega do banco de fichas.

2ª) Inicialmente cada jogador recebe 10 fichas azuis. Sorteia-se quem começa. A ordem das jogadas é pela esquerda.

3ª) O primeiro a jogar deverá, primeiramente, apostar uma quantidade qualquer de fichas, que poderá ser azul ou vermelha, sobre o tabuleiro.

4ª) Se o jogador quiser apostar fichas vermelhas nessa primeira rodada terá que emprestar fichas do banco, recebendo assim fichas azuis e vermelhas.

5ª) Caso não haja o quarto jogador para a função de banqueiro os próprios jogadores se encarregarão do banco.

6ª) Em seguida, sorteará um cartão de apostas e executará a instrução ali escrita que envolverá os demais jogadores e as fichas apostadas inicialmente.

7ª) Para a execução das instruções do cartão de apostas, os jogadores terão que recorrer ao banco de fichas.

8ª) Os jogadores seguintes também deverão apostar uma quantidade de fichas (azuis ou vermelhas) sobre o tabuleiro e, em seguida, retirar um cartão de sorteio e executá-lo.

9ª) Será considerado vencedor o jogador que, depois de um certo tempo, fixado no início do jogo, estiver mais rico, computando-se aí o valor de fichas azuis e retirando-se desse total a dívida representada pelas fichas vermelhas.

10ª) No caso de haver quatro jogadores, haverá um rodízio do jogador responsável pelo banco de fichas, o qual será feito a cada três jogadas, e as fichas desse jogador deverão ficar sobre o tabuleiro até o seu regresso.

JOGO DAS ARARAS

Esse jogo apresenta trajetórias e circuitos como o Jogo das Borboletas e, apresenta também, os esquemas do Jogo das Apostas. O jogo é constituído de:

1) Um tabuleiro;

No tabuleiro do Jogo das Araras, desenhado a seguir, há 12 **araras** (duas vermelhas, duas azuis e oito brancas) desenhadas e, entre elas, existem 16 linhas arqueadas chamadas **trajetórias** (12 trajetórias com flechas e quatro sem flechas) que formam oito **circuitos**: quatro **aditivos** e quatro **multiplicativos** (veja o desenho do tabuleiro):

- **Circuitos aditivos**, formados pelas araras aefg, behj, cjkL, dgiL;
- **Circuitos multiplicativos**, formados pelas araras abe, adg, bcj, cdL.

2) Uma caixa de botões azuis;

3) Uma caixa de botões vermelhos;

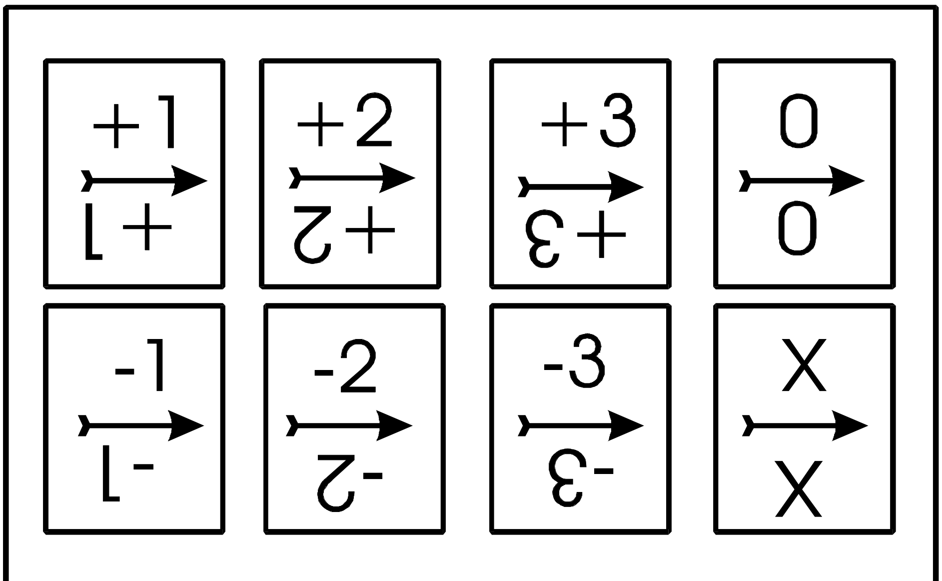
4) 37 cartas (desenhadas abaixo), sendo:

- **Duas cartas** marcadas com o **número 0** (zero);

- **Cinco cartas** marcadas com o **curinga** (no desenho abaixo representado por **X**);

- **15 cartas** marcadas com seguintes **números: + 1, + 2, + 3;** sendo **cinco cartas de cada número**;

- **15 cartas** marcadas com seguintes **números: – 1, – 2, – 3;** sendo **cinco cartas de cada número**.



Jogo das Araras

5) Oito cartões para marcar os pontos obtidos durante as partidas: quatro de 1 ponto e quatro de 2 pontos.

REGRAS PARA JOGAR

1ª) Podem jogar dois, três ou quatro jogadores. No início da partida embaralham-se as 37 cartas e cada jogador recebe quatro delas. As restantes formam o monte.

2ª) Sorteia-se quem começa. A ordem das jogadas é pela esquerda.

3ª) O jogador que inicia o jogo escolhe uma trajetória ligando duas araras no tabuleiro. Em seguida este jogador escolhe uma carta e a coloca no tabuleiro, de modo que a flecha desenhada nela se sobreponha à trajetória escolhida, respeitando o sentido da flecha da trajetória se houver.

4ª) Em seguida, coloca vários botões em cada uma das duas borboletas ligadas pela trajetória, respeitando a seguinte regra:

Regra do Jogo

1. Os botões devem ter a mesma cor das araras se estas forem coloridas.

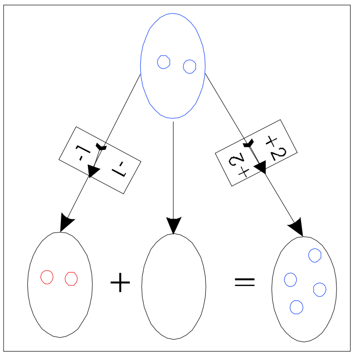
2. O número da carta vezes o número de botões na arara de onde parte a flecha, deve ser igual ao número de botões na arara para onde a flecha aponta e,

2a. Se a carta tiver sinal positivo (+), a cor dos botões para onde a flecha aponta deverá ser a mesma dos botões, na arara de onde a flecha parte.

2b. Se a carta for negativa (–) estas cores deverão ser diferentes uma da outra.

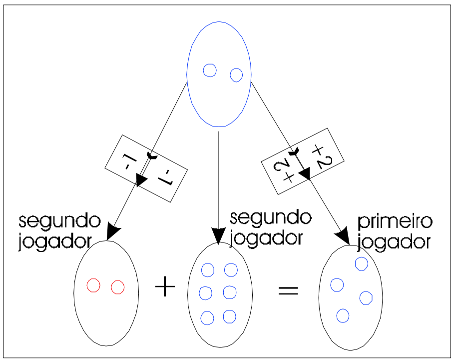
5ª) Após colocar uma carta no tabuleiro, o jogador apanha outra no monte, ficando assim sempre com quatro cartas na mão.

6ª) O jogador seguinte deve colocar uma carta sobre uma das trajetórias que ligam uma das araras, já preenchidas, a uma arara vazia, preenchendo a arara vazia com a quantidade de botões necessária para satisfazer a regra do jogo. Veja o exemplo abaixo:



7ª) A quantidade de botões de uma arara ligada a outra por uma trajetória, deve ser sempre múltipla ou divisora da quantidade de botões dessa outra; por esse motivo, os jogadores devem prestar muita atenção a todas as suas jogadas.

8ª) Se o jogador preencher uma segunda arara branca entre três que estejam alinhadas, deverá também preencher a terceira, observando a regra 7. Por exemplo:



$9^{\underline{a}}$) A quantidade de botões das araras brancas, alinhadas, devem obedecer às Leis de Adição e Subtração indicadas no tabuleiro, onde os botões vermelhos representam dívidas e os botões azuis representam ganhos, como no Jogo das Apostas. Veja o exemplo acima.

$10^{\underline{a}}$) A carta marcada com o **X** funciona como curinga e só pode assumir valores diferentes das cartas existentes no jogo.

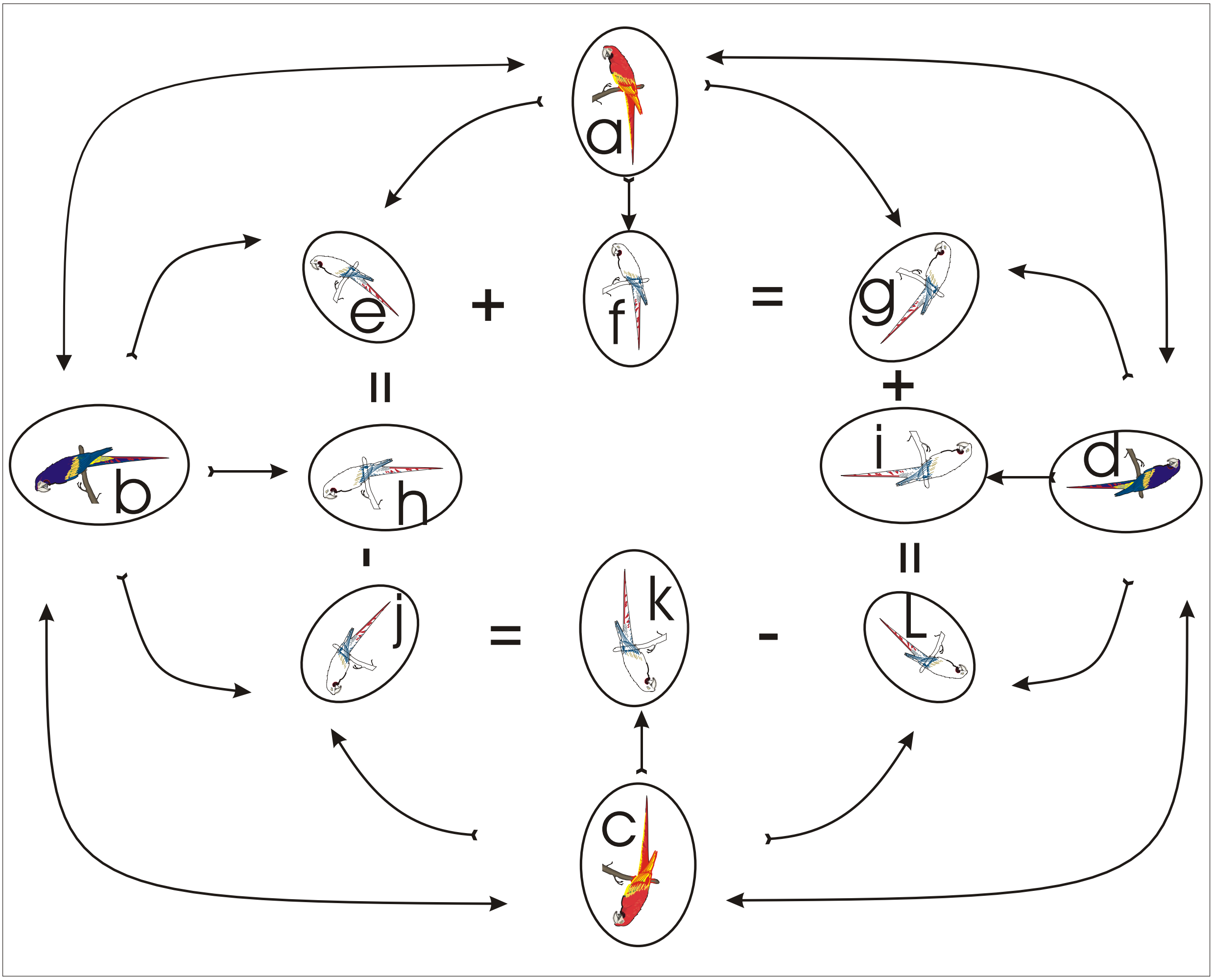
$11^{\underline{a}}$) O objetivo de cada jogador é fechar um circuito. O jogador **fecha um circuito** quando coloca uma carta na última trajetória vaga do circuito. O jogador que conseguir fechar um circuito aditivo, marca **um (1) ponto** e recebe um cartão com o respectivo ponto. O que conseguir fechar o circuito multiplicativo marca **dois (2) pontos** e recebe um cartão com o respectivo ponto. Ganha o jogo aquele que somar mais pontos em todas as partidas jogadas.

$12^{\underline{a}}$) Se um jogador não tiver como colocar qualquer de suas cartas no tabuleiro, obedecendo à regra do jogo, deverá deixar que o jogador da esquerda lhe retire uma carta ao acaso, substituindo-a por outra do monte e, em seguida, cederá sua vez. O jogador da esquerda se quiser, poderá ficar com a carta devolvendo outra ao monte.

$13^{\underline{a}}$) No decorrer do jogo pode surgir uma trajetória vazia ligando duas araras já preenchidas. O jogador poderá colocar sua carta sobre esta trajetória, sempre de acordo com a regra.

14ª) A partida termina quando nenhum jogador puder mais colocar suas cartas, respeitando a regra do jogo, ou quando todos os jogadores tiverem colocado todas as suas cartas.

TABULEIRO DO JOGO DAS ARARAS



PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Sobre a Epistemologia dos Números Inteiros

Introdução

Buscaremos expor um painel das principais idéias discutidas e as opiniões expressas relativas à problemática do ensino dos números inteiros. Há tempos que a abordagem do tema tem trazido complicações aos estudiosos e educadores que, ou se omitem sobre as causas da dificuldade, ou as tratam de maneira incompleta. O quadro abaixo traz uma compilação dos principais autores, suas idéias e observações.

Glaeser (1981)	Cita os problemas encontrados por grandes vultos da Matemática na busca de explicações para a regra que rege os números inteiros e reporta que Sthendal, escritor francês, em fins do século XVIII, já apresentava as mesmas dúvidas que os alunos atuais apresentam em relação à compreensão da regra dos sinais. Cita também que a demonstração da regra dos sinais até hoje utilizada foi dada por Hankel em fins do século passado.
Dienes (1972)	Após introduzir a estrutura aditiva dos números inteiros através de pares de números naturais, escreve: *"Antes de poder verdadeiramente falar de espaço, devemos inventar ao menos uma nova operação: um matemático não dará a isto que nós construímos aqui o nome de espaço, e isto porque não inventamos nenhuma espécie de multiplicação; inventamos somente adições e subtrações. De outro modo, se partirmos de $(+2, -1)$ por exemplo, deveríamos poder dobrá-lo e obter $(+4, -2)$ ou triplicá-lo e obter $(+6, -3)$"* (p.103).
Dienes (1972)	Ponto no qual em sua obra a multiplicação por um negativo aparece pela primeira vez: *"**Implicitamente é fácil ver que** multiplicar por números negativos nos levaria também a dobrar, a triplicar, a quadruplicar, etc., mas para cada cor separadamente, os triângulos e os quadrados vão sendo substituídos um pelo outro"* (p.104, grifos nossos).
Freudenthal (1973)	Reconhece a dificuldade do problema, sugerindo: *"Métodos intuitivos, por úteis que sejam, não são suficientes. Eu concluí que uma retirada oportuna dos métodos intuitivos em favor de métodos racionais é recomendável, embora se deva enfatizar que esses métodos racionais devam consistir em boa Matemática e não em substitutos dela"*.

Freudenthal (1973)	Propõe insistir sobre a necessidade de permanência das leis distributiva e comutativa: $x + a = 0$ e $y + b = 0$ implicam $(x + y) + (a + b) = 0$ donde $x = -a \quad y = -b \qquad -(a + b) = x + y = -a - b$ $(x + a).b = 0.b = 0 \qquad x.(y + b) = x.0 = 0$ $x.b + a.b = 0 \qquad x.y + x.b = 0$ subtraindo as duas últimas igualdades $x.y + x.b - (x.b + a.b) = x.y + x.b - x.b - a.b = 0$ $x.y - a.b = 0 \quad a.b = x.y = (-a).(-b)$
Glaeser (1981)	Aponta insuficiência na obra de Freudenthal (1973) *"Matemática como Tarefa Educacional"* no que diz respeito ao fornecimento de modelos da estrutura multiplicativa: *"A leitura das páginas 279/281 nem sequer sugere que ele tenha se apercebido do extraordinário e espantoso fenômeno aqui estudado"* (p. 305).
Freudenthal (1983)	Lança sua obra *Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas* na qual volta ao problema da regra de sinais, sem citar o artigo de Glaeser, publicado dois anos antes. Aborda a questão no terreno da geometria: *"Os números negativos tinham se originado da necessidade algébrica formal de validade geral das fórmulas de solução, mas foi somente a partir da algebrização da geometria (da assim chamada geometria analítica do tempo antigo) que eles se tornaram efetivos - quero dizer, efetivos em conteúdo"* (cap. 15, p. 433).
Freudenthal (1983)	Volta à solução clássica apresentada como a de 1973, e oferece a seguinte, fundada na extensão das transformações lineares, a qual justifica através do princípio por ele denominado da permanência algébrico - geométrica (p. 444, o grifo e os parênteses são nossos). *"É visualmente óbvio que as dilatações se comportam simetricamente de ambos os lados de 0, assim* $2.(-b) = -2.b$ *Ou ainda, de outro modo* $2.b = b + b$ $2.(-b) = -b + (-b) = -2.b$ *Em geral* $a.(-b) = -a.b$ *que pode ser considerada verdadeira e com significado para* ***a*** *positivo. Assim, esta (igualdade) é estendida, pelo reconhecimento de que* $a \to a.(-b)$ *é uma dilatação com inversão do semi - eixo positivo e, como tal,* ***pode ser estendida ao semi - eixo negativo****. Assim, em geral (isto é, também para a negativo)* $a.(-b) = -a.b$, *semelhantemente* $(-a).b = -a.b$ $(-a).(-b) = a.b$"

Freudenthal (1983)	Resolve agora, no campo contínuo geométrico, o que antes foi colocado no campo discreto numérico, trazendo a difícil questão didática de transporte, para um, das noções aprendidas no outro. E afirma que se for comparado com as regras que as crianças necessitam aprender a fim de dominarem as operações aritméticas por colunas, a questão de ensinar as regras das operações com inteiros é pequena. Para ele, o método mais eficaz de "programar o aprendiz" (programme the learner, sic) é com essas regras, porque o ensino dos números negativos para ser bem sucedido, deve levar ao automatismo (p.457).
Thompson & Dreyfus (1988)	Fornecem modelos para a estrutura aditiva, sendo insatisfatórios no que diz respeito à estrutura multiplicativa.
Baldino (1997)	Cita a carência de trabalhos publicados nos últimos PMEs que versam sobre a questão: dos 56 artigos do PME - 18, somente um aborda os inteiros (Lytle, 1994), enquanto que entre 77 publicados no PME - 19, apenas dois versam sobre a questão (Borba, 1995; Souza et al., 1995). Já no PME - 20, um entre 160 (Bruno & Martinon, 1996).

Analisando Dienes (1972), vemos que não há, para a estrutura da multiplicação, o mesmo desenvolvimento concreto que se dá à estrutura aditiva de inteiros, com a questão “menos vezes menos dá mais?” permanecendo sem resposta. Assim, fomos buscar uma solução viável na forma de criação de jogos, que cremos ser a saída possível para a multiplicação com inteiros. Porém, sempre que é apresentado esse artifício, nos é questionado sobre a razão matemática para explicar a regra de sinal. Baldino (1997) aborda em que sentido essas pessoas desejam obter uma explicação: *"Tornar algo claro ou fácil de entender descrevendo-o ou dando informação sobre ele"* (Procter, 1985, apud Baldino 1997). Citando expressões de Dienes e Freudenthal *"...estendida para reconhecer como..."* e *"...é fácil de ver que..."* notamos que "reconhecimento" e "facilidade" mostram a busca de serem feitas coisas claras e fáceis de serem entendidas. Por outro lado, Glaeser se refere à mesma questão como *"...um fenômeno surpreendente"*.

Podemos dizer que Freudenthal e Dienes estavam procurando explicações para a regra de sinais? A crítica de Glaeser indica que eles simplesmente não obtiveram sucesso? Ou será que toda a discussão é um sintoma de que não existe nenhuma explicação, em última instância, e que algum grau de arbitrariedade será necessário em algum lugar? Neste caso, exatamente onde?

Freudenthal (1983) em suas observações finais sobre o ensino de números inteiros defende que seja dada ênfase para o ensino da regra, em detrimento de se procurar produzir um significado adequado. Nós entendemos que o ensino da regra é justamente o ponto que leva ao fracasso. O aluno que chega ao ponto de perguntar por que menos por menos é igual a mais, indica que já é tarde demais: ele já aprendeu a solução sem conhecer o problema e está farto de regras.

As soluções clássicas, cujo expoente maior é Freudenthal, caracterizam-se por uma problemática de <u>ensino</u>. Suas justificativas estão em torno de significantes, como instrução, visualização, explicação, convencimento, automatização, extensão, regras, modelo (Freudenthal, 1983). Elas são suportadas por concepções epistemológicas substancialistas: o conhecimento se transmite por comunicação do professor, que ensina mostrando ao aluno que, por sua vez, aprende vendo.

A substância do conhecimento é contínua: para cada conhecimento, existe outro, anterior e arbitrariamente próximo, denominado "pré - requisito". Segundo estas concepções, ensino e aprendizagem são processos simultâneos, o aluno é um sujeito autônomo e o outro, a instituição, é pleno, sem falhas. Elas buscam satisfazer os alunos com as respostas oficiais ao problema dos números inteiros. Por aí confundem o algoritmo de estabelecimento da fórmula com processos de produção de significados que denominam aquisição do conhecimento. Tais concepções fundam estratégias didáticas manifestamente inadequadas. A estratégia didática proposta por nós pretende uma inversão de papéis. Pretende-se transferir ao estudante não somente a responsabilidade da situação de aprendizagem, mas também, a responsabilidade de responder as questões do problema didático. O professor é que perguntará: por que menos por menos dá mais? Espera-se que o aluno responda: É claro, porque... Isto é, espera-se que ele forneça sua própria explicação para um fato que ele deve estar achando óbvio (teoremas em ação, Vergnaud, 1982).

Esta estratégia funda-se numa concepção de aprendizagem no sentido de Brousseau: *"A aprendizagem se faz pela experimentação de concepções sucessivas, provisórias e relativamente boas, que é necessário rejeitar sucessivamente ou retomar, numa verdadeira nova gênese de cada vez"* (Brousseau, 1983, p. 71). Utiliza-se também o conceito de Brousseau de devolução: *"A devolução é o ato pelo qual o ensino leva o aluno à responsabilidade de uma situação de aprendizagem (a - didática) ou de um problema, e esse aceita, por si mesmo, as conseqüências dessa transferência"*. De acordo com a teoria de situações de Brousseau, nós planejamos quatro jogos que pretendem organizar o ambiente da sala de aula em uma situação, na qual as concepções com inteiros podem ser exercitadas; partilhamos da crença de que *"o conhecimento dos jogadores ocorre nas estratégias de jogo, nos meios desenvolvidos para vencê-lo ou no aperfeiçoamento das chances de ganhá-lo"* (Brousseau, 1988, p. 14). Esses jogos seriam aplicados inicialmente por seu próprio fim, sem nenhuma intervenção de ensino (situação a - didática). Após essa aplicação, o jogo seria suspenso e teria vez um contrato didático, no qual seriam trabalhadas atividades baseadas nos jogos (situação didática).

Estes jogos foram desenvolvidos para resolver em ação os quatro problemas: Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes? A seguir, apresentaremos a justificativa da redução do problema didático dos números inteiros às quatro questões acima, baseada nos conceitos de abstração reflexiva e generalização completiva[11] .

---

[11] PIAGET, J. Essai de logique opératoire. Paris: Dunod, 1976 e PIAGET, J., GARCIA, R. Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México: Siglo Veintiuno, 1984.

<u>A perspectiva da teoria de equilibração</u>

Baseados na leitura de Glaeser (1981), complementado pela teoria da equilibração de estruturas cognitivas (Piaget & Inhelder, 1978) e sua relação com o desenvolvimento histórico (Piaget & Garcia, 1984), promovemos a redução da discussão didática sobre a construção dos números inteiros para as quatro questões abaixo:

1) Como tirar o maior do menor?
2) Como subtrair um negativo?
3) Por que menos por menos dá mais?
4) O que significa menos vezes?

Para justificar essa redução, vejamos em que consistem os conceitos de abstração reflexiva e generalização completiva:

> *"A abstração reflexiva comporta dois momentos indissociáveis: uma 'conversão' no sentido de uma projeção sobre um nível superior daquilo que é tomado do nível precedente (...) e uma 'reflexão' no sentido de uma reconstrução ou reorganização cognitiva (mais ou menos consciente ou não) do que foi assim transferido."* (Piaget, 1976, p. 39)

> *"Dizemos que há 'generalização completiva' quando uma estrutura, conservando seus caracteres essenciais, se vê enriquecida por novos subsistemas que se agregam sem modificar os precedentes."* (Piaget & Garcia, 1984, p. 10)

Mostraremos três diagramas indicando os diferentes estágios de equilibração de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$. Nestes diagramas, os números de cada linha agem como operadores sobre os números na linha imediatamente abaixo. Os operadores aditivos são representados por quadrados ao redor dos números e os multiplicativos por círculos. Devido à necessidade de distinguir sinais predicativos de operatórios, representamos os sinais predicativos pela letra *a* (azul) e *v* (vermelho), e os sinais operatórios pelos símbolos usuais + e − . As operações primitivas entre números naturais são denotadas por **U** para união e \ para extração. A construção dos inteiros começa quando os números naturais como operadores aditivos iniciam sua ação sobre os números naturais como estados. Como um resultado das ações emergentes da composição dos operadores aditivos (Thompson & Dreyfus, 1988), os números naturais 1, 2, 3... adquirem o estatuto de operadores aditivos e são "projetados" nos inteiros 1*a*, 1*v*, 2*a*, 2*v*,... Como parte do mesmo processo, os números naturais são convertidos em novos inteiros positivos. Os números naturais são "convertidos" em novos objetos. Nosso primeiro problema, "como tirar o maior do menor" pode agora ser resolvido. Isso expressa o resultado deste primeiro processo de abstração reflexiva. Mas a estabilização de novos sistemas requer a generalização da operação de extração de novos objetos. À medida que (– 3) possuía um significado, – (– 3) também teria que ter um. "Como subtrair um negativo?" é um problema resolvido sem o mesmo nível de abstração da questão, como conseqüência do processo de generalização completiva ocorrendo simultaneamente com a abstração reflexiva. Este é o segundo problema na construção dos inteiros.

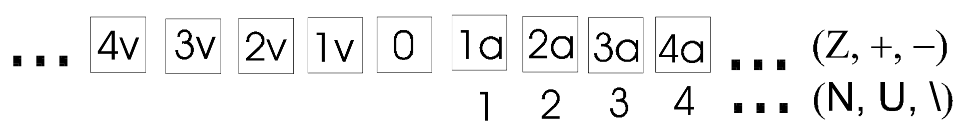


Diagrama 1

Continuando com o processo de generalização - abstração, os números naturais já convertidos em inteiros positivos começam a funcionar como multiplicadores operando sobre os inteiros e, à medida que o fazem, reduzem os inteiros a estados. A introdução da divisão como inversa da multiplicação levaria à construção dos racionais positivos, formando o sistema estável que funcionou como obstáculo para a construção dos inteiros na história, de acordo com Glaeser (1981). A estabilidade dessa estrutura é representada no diagrama 2, circundando-a com uma linha pontilhada. Neste estágio os inteiros negativos podem ser concebidos aí como simétricos dos positivos. O zero funciona como origem para ambos, sem perder seu significado de ausência.

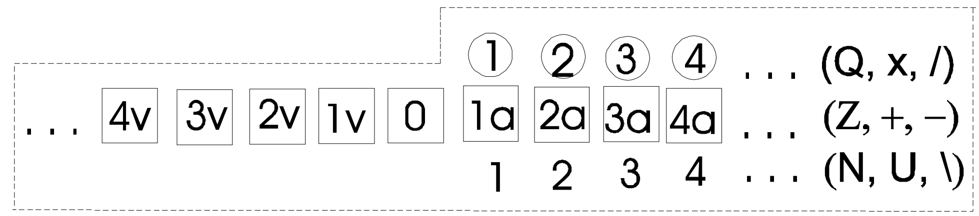


Diagrama 2

Como os inteiros positivos são convertidos em racionais positivos, eles abdicaram de sua individualidade e passaram a assumir o papel de racionais positivos. Tal fusão faz a multiplicação parecer comutativa, uma propriedade herdada de $\mathbb{N}$: (3) × (2*a*) = (3) × (2) = (2*a*) × (3). Entretanto, os inteiros positivos, por sua vez, começam a agir como operadores multiplicativos sobre os racionais positivos. Como resultado, temos uma nova fila de operadores, representados na primeira linha do diagrama 3. Desenhamos quadrados ao redor dos números, e círculos circunscrevendo os quadrados, a fim de indicar que estes foram operadores aditivos anteriores e que agora adquiriram propriedades multiplicativas. Passamos do estado ($\mathbb{Q}$, x, /) aos operadores ($\mathbb{Z}$, +, −, ×, /). Mas como isto ocorre, o sistema torna-se instável, porque duas questões surgem e não podem ser respondidas neste domínio, e suas respostas requererão um movimento simultâneo na direção das setas AR e GC do diagrama 3. A primeira questão é a seguinte: desde que (3) × (2*a*) = (2*a*) × (3*a*) e (3) × (2*v*) faz sentido, também deveria ter um significado para (2*v*) × (3). A equilibração da estrutura do diagrama 3 requer a criação de novos operadores multiplicadores para substituir as interrogações. O que menos vezes significa? A resposta para esta questão requer um movimento na direção da seta AR. A questão é o que consideraremos o terceiro problema na construção dos inteiros.

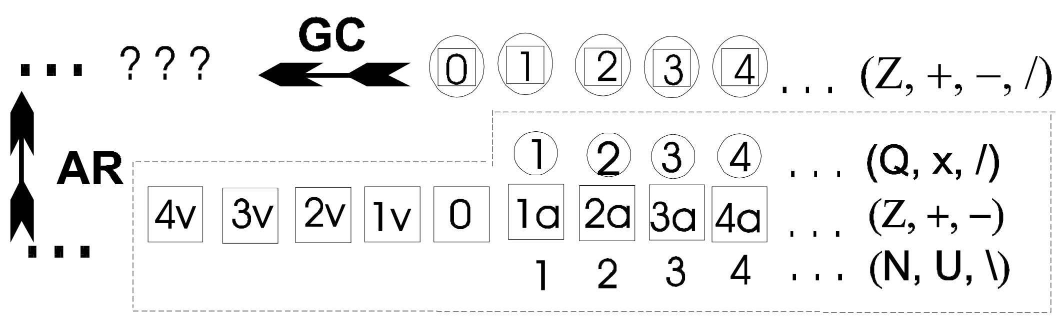


Diagrama 3

A segunda questão é: a conversão de inteiros positivos em racionais designa a estes a tarefa de mudar o papel dos inteiros positivos anteriores, e como tal, os racionais herdam uma estrutura aditiva dos inteiros. A soma e a subtração de operadores multiplicativos começam a fazer sentido: cinco vezes mais sete vezes, quantas vezes são? Um processo de complementação horizontal (GC) toma lugar. Cinco vezes menos sete vezes, quantas vezes são? A resposta é procurada no mesmo nível de abstração da questão: qual dos operadores existentes deve ser adequado a esta resposta? A resposta requer um movimento na direção da seta GC do diagrama 3. Da estrutura aditiva de inteiros vem a sugestão: 5*a* menos 7*a* é 2*v*, mas "2*v*", não tem um significado como um operador multiplicativo. Retornamos à primeira questão. Entretanto, à medida que "5 vezes" e "7 vezes" agem sobre estados, tais como "3*a*", por exemplo, o resultado da operação de extração já se faz possível entre inteiros e levam a 15 – 21*a* = 6*v*. A interação desses dois níveis é indicado pela seta AR no diagrama 3: a equilibração da nova estrutura requer que "2*v*", aplicado em 3*a*, deva levar a 6*v*. A generalização desta ação em outros estados leva à conclusão de que, multiplicar por 2*v* deve significar multiplicação, com mudança de cor.

Finalmente, tão logo "menos vezes" tenha um significado, a generalização completiva designa um significado natural para a composição de operadores negativos, tais como (2*v*) × (3*v*) = (6*a*), pois mudando as cores duas vezes, a soma continua da mesma cor. Assim, a questão celebrada "porque menos vezes menos dá mais" vem epistemologicamente após a propriedade distributiva. Isso vai ao nível de abstração dos inteiros como operadores, abaixo do nível de inteiros como estados.

Os sinais + e – que aparecem em questões tais como cinco vezes mais/menos sete vezes são claramente sinais operatórios entre operadores multiplicativos e, são distintos dos sinais predicativos *a* e *v* dos estados, sobre os quais estes operadores agem. O significado simultâneo de "menos duas vezes" (sinal operatório, processo GC) e "(2*v*) vezes..." (sinal predicativo, processo AR) é uma síntese operacional de multiplicação e "mudança", que faz os sinais operatórios e predicativos se misturarem. Ao contrário do processo analítico, a síntese requer um desvio de atenção:

> *(...) ciente provém da periferia ao centro, que é o início dos resultados de uma ação e chega aos seus mecanismos internos.* (Piaget, 1976, inciso 24)
>
> *(...) ciente é inversamente proporcional ao grau de pensamento reflexivo (conceitualização para o segundo ou enésimo poder), que este requer: ser ciente é fácil quando a conceitualização é simples, isto é, é a aplicação direta da forma para um conteúdo (o qual é geralmente o caso da periferia da ação), mas isso é tão mais difícil, portanto demorado, quanto requerer uma conceitualização reflexiva sobre composições próprias, onde implica a reorganização de uma conceitualização inicial (...).* (Piaget, 1976, fim do inciso 23)

Podemos agora justificar nossa afirmação que, quando o estudante estiver ao ponto de perguntar porque menos vezes menos é igual a mais?, já é muito tarde, pois a medida que ele centra sua atenção na questão, a síntese operacional se torna difícil, ou impossível; Glaeser (1981) relata esta dificuldade na história.

Considerações sobre as aplicações

No início do processo, acreditava-se que os alunos poderiam utilizar estratégias abstratas, sem suporte concreto (no caso, o uso de botões) para fechar os circuitos do Jogo das Borboletas. Ao serem aplicadas as intervenções, notou-se que isso não ocorria. Ao invés de utilizarem estratégias abstratas, eles simplesmente utilizavam cálculos mentais com botões imaginários. Registrou-se este fenômeno tanto entre os melhores alunos da competição, quanto quando se aplicou com professores de Matemática experientes. Raramente desenvolve-se a estratégia abstrata.

Foi solicitado aos grupos de professores que abandonassem os cálculos mentais que estavam usando, e que justificassem suas ações. Achou-se que, apesar de difícil, a demanda poderia ser satisfeita. E o resultado foi satisfatório tanto com os professores quanto com os alunos.

Olhamos para a teoria dos campos conceituais a fim de analisar este resultado. Esta teoria distingüe dois tipos de situações (tarefas):

> *"1) Tipos de situações pelas quais o sujeito não dispõe (...) de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;*
>
> *2) Tipos de situações pelas quais o sujeito não dispõe de todas competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, e o conduza eventualmente a um revés."* (Vergnaud, 1990, p.136)

A observação do comportamento de nossos sujeitos demonstra que se enquadram na situação tipo 2. O fato inesperado foi a observação de que experientes professores de Matemática não foram, inicialmente, capazes de solucionar a questão. Diante desse resultado, começamos a questionar a possibilidade de explicar as observações em termos da teoria dos campos conceituais que guiou o projeto dos jogos.

A introdução de uma demanda para os jogadores não usarem estratégias "concretas" certamente implicou numa mudança no ambiente (Brousseau, 1988, p.321). Contudo, a única diferença estava na natureza da demanda por uma justificativa. O campo conceitual, como um conjunto de tarefas, permanece o mesmo. Questionou-se por que somente se superou a dificuldade, com a mudança da demanda. Encontramos dificuldade em responder essa questão dentro da TCC, uma vez que esta teoria *"Favorece (...) modelos que concedem um papel essencial para muitos conceitos matemáticos"* (Vergnaud, 1990, p.146) e, analisando a questão do ponto de vista essencialmente matemático, ambas situações são idênticas.

Aceitava-se como verdadeiro que: *"Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz numa certa situação, a experiência a leva a trocar de esquema ou a modificar este esquema"* (Vergnaud, 1990, p. 138). Esta expectativa foi totalmente frustada, pois não se observou isto na prática. Apesar da aparente ineficiência do cálculo mental, os jogadores persistem em utilizá-lo, ao invés de procurar modificá-lo. Aparentemente, os jogadores não conseguem entender a ineficiência de seus próprios esquemas de jogo, isto é, de tarefas. Só houve percepção desse esquema quando os jogadores foram advertidos pelo coordenador do jogo. Este fato acarretou em uma mudança no meio.

Durante o transcorrer do jogo, não foi possível detectar qual artifício os jogadores estavam utilizando. O desenvolvimento de estratégias abstratas não foi observado diretamente como teorema em ação, mas sim a partir de questionamentos dirigidos aos alunos e, a partir das suas respostas, ao se requererem justificativas explícitas. Portanto, a dificuldade em executar a tarefa, bem como a de determinar qual esquema estava sendo utilizado, dependia da permuta de informação entre os jogadores e o coordenador, ou seja, dependia da linguagem.

Os campos conceituais são uma teoria psicológica dos conceitos que visa a identificar e estudar as continuidades e descontinuidades entre os diferentes passos da aquisição de conhecimento, a partir do ponto de vista de seus conteúdos (Vergnaud, 1990, p. 133). São exemplos de campos conceituais:

estruturas aditivas, estruturas multiplicativas, lógica das classes, álgebra. Os campos conceituais partem de conteúdos matemáticos.

No caso dos inteiros, os campos conceituais considerariam estruturas aditivas e multiplicativas para compreender o processo de aprendizagem. Mas essa estrutura aditiva é uma síntese. O sujeito que faz $3 - 5 = -2$, está fazendo indistintamente e simultaneamente $(+3) + (-5) = (-2)$, isto é, está compondo operadores aditivos, e $(+3) - (+5) = (-2)$, isto é, está extraindo uma quantidade com sinal. O conteúdo matemático resultante dessa síntese operatória não tem meios de distinguir as operações das quais ele, por definição, é a síntese. Esse conteúdo jamais poderá fornecer um referencial para as operações que levam a ele. Pelo contrário, é só no exercício da linguagem, na produção de significados, que essa distinção pode aparecer e, só por aí se tem um referencial para orientar as estratégias de produção de significado que constituem a aprendizagem.

Se a construção de inteiros envolve uma síntese, não meramente a passagem de um nível conceitual ao outro, precisamos de um conceito e de uma teoria para pensarmos a idéia de uma síntese, que pode acontecer de forma inesperada, imprevista e desapercebida. Há uma ruptura e devemos estar preparados a conceitualizá-los.

A teoria da situação proporciona uma melhor explicação para as situações dos jogos, por seu conceito central - o meio - ser menos dependente do conceito matemático e permitir um enfoque mais direto na situação de aprendizado. Citação de Brousseau, 1988, p. 320:

> *"(...) as situações do jogo são determinadas alternativamente pelo jogador e pelo SISTEMA antagonista que modifica as situações do jogo de maneira incontrolável pela jogada. (...) É este sistema antagonista que propomos chamar "meio"/"centro."*

Podemos descrever o resultado do Jogo das Borboletas segundo as cinco fases do "Jogo de Adivinhação" de Brousseau (1988). A primeira fase é o plano da devolução do jogo, que consiste na explicação das regras (versão concreta) e no convite ao jogo. A interação inicial jogo - jogador se dá em associação a um certo conhecimento, o dos operadores aditivos. Esta é a primeira situação a - didática. Os jogadores inicialmente são imbuídos de sentimento de vencer o jogo, e vão completando os circuitos ao acaso. Logo eles percebem que pode haver um melhor aproveitamento das cartas, e passam a pensar em qual carta eles utilizariam para facilitar a missão de completar o circuito.

A segunda situação ocorre com a mudança do meio através da proposição do coordenador do jogo aos participantes para que o jogo continue o mesmo, porém sem os botões. A partir disso, os próprios jogadores terão que antecipar a solução, descobrindo que carta utilizar para fechar o circuito. A terceira situação ocorre através do diálogo e da reintrodução dos botões a fim de checar as soluções propostas. Novamente o coordenador do jogo intervém e solicita aos jogadores que verbalizem as estratégias construídas e introduz a demanda de que não podem imaginar a existência de botões: aprendizagem a - didática. A quarta situação é aquela na qual se coloca o ponto ao qual se quer chegar e que é possível uma solução. A quinta situação é a antecipação da prova. Questiona-se por que o circuito está fechado corretamente. Espera-se uma resposta em termos de operadores aditivos. Por fim, uma nova intervenção do coordenador do jogo (professor) transforma o meio numa situação didática na qual o coordenador do jogo introduz folhas de atividades que reproduzem situações do jogo.

A teoria da situação descreve muito bem os resultados dos nossos jogos, mas se mostra insuficiente no caso de se terem jogadores que não estão interessados em jogar e só o fazem para "tentar" enganar o professor (coordenador do jogo). Certamente eles estão jogando outro jogo que não o nosso. Do ponto de vista educacional, a TS deveria evitar esse fato. A nossa proposta para contornar esse episódio é a utilização, na sala de aula, de um contrato de trabalho. O contrato de trabalho é aqui proposto:

> *"Como um conceito pedagógico incluindo o de "contrato didático" que se refere especialmente à operação de ensino. É no contrato didático que se definem as negociações que ocorrem entre as partes, professor e alunos, ao redor do conteúdo matemático: o que deve ser tematizado, como deve ser abordado, de que maneira deve ser cobrado e, efetivamente, o que deve ser cobrado. Em nosso conceito de contrato de trabalho, diremos que, além da negociação do conteúdo didático, ocorrem negociações do conteúdo pedagógico. É aí que fica definida a relação professor/aluno que se estabelece em sala de aula. Assim, estamos de posse de uma ferramenta eficaz e transparente, que nos permite ver o funcionamento de qualquer sala de aula."* (Cabral, 1992)

Olharemos, agora, nossos jogos pela perspectiva dos campos semânticos; antes definiremos alguns conceitos utilizados por essa teoria. Segundo Lins (1994), temos:

> - *"Um campo semântico é um modo de produzir significado."*
> - *"Conhecimento é uma crença - afirmação seguido de uma justificação para essa crença - afirmação.*"
> - *"Uma afirmação não existe, a menos que se torne efetiva toda a enunciação."*

Para entendermos melhor o conceito de campo semântico, o exemplo a seguir pode ser útil: tanto uma criança de seis anos quanto um matemático, acreditam e afirmam que 5 menos 3 é 2, mas eles justificam esta afirmação de modos totalmente diferentes. Nós dizemos que eles apresentam conhecimentos diferentes e pertencem a diferentes campos semânticos: "contando nos dedos" e "pensamento algébrico" (Lins, 1992). O segundo produz justificações para as crenças - afirmações do primeiro, mas isso não ocorre reciprocamente. A criança provavelmente diria que 3 menos 5 "é impossível", o que não demonstra ignorância ou deficiência, pois o significado de "impossibilidade" já está estabelecido. Podemos substituir esse significado e ensinar a criança que a resposta correta é "– 2", produzindo assim um novo significado. Mas muitas vezes essa resposta não faz sentido para a criança, e a velha resposta "é impossível" acaba reaparecendo.

Um sujeito faz sentido de um novo significado quando estabelece uma comparação, com outros significados, em outros campos semânticos. No exemplo anterior, o matemático, munido do seu significado, consegue estabelecer comparações e justificações para o significado produzido pela criança. Então dizemos que, para ele, a composição de operadores aditivos "faz sentido".

A concepção de sentido aparece também em Vergnaud: *"(...) são os esquemas evocados no sujeito por uma situação, ou por um significado, que constituem o sentido desta situação ou deste significado"* (Vergnaud, 1990). E atribuímos a Hegel nossa distinção entre significado/sentido: significado refere-se a conhecimento, sentido refere-se a concepção. *"O movimento do saber (matemático) se efetua à superfície, não toca na própria coisa, nem a essência, nem o conceito, e não é pois de nenhum modo o movimento de conceber"* (Hegel, 1941).

As situações didáticas e a - didáticas nas escolas, devem ser organizadas levando-se em consideração não somente o par significado/ensino, mas também o par sentido/aprendizagem. A dificuldade encontrada é que os pares significado/ensino e sentido/aprendizagem não são funções de uma mesma variável. Para Lacan (Zizek, 1992), sentido é uma função do <u>sujeito</u>, significado é uma função do <u>outro</u>. É fácil ensinar significado, mas é difícil aprender sentidos. Como tentamos ensinar significados matemáticos, muitas vezes o que o estudante aprende é como enganar o professor sem realizar a aprendizagem matemática. Esse é um ponto muito importante a ser pensado por todos os educadores matemáticos.

Os jogos que propomos consistem em um esforço para se correlacionarem as duas variáveis acima. A idéia inicial foi instalar situações a - didáticas que poderiam favorecer a emergência de teoremas em ação relativo a inteiros. Acreditamos que os jogos introduzem uma ruptura na demanda, de tal maneira que a nova demanda somente poderá ser satisfeita através do compromisso dos sujeitos na produção de significado e no campo semântico preferencial. O campo semântico preferencial é o significado que queremos que a criança venha produzir, é o objetivo do ensino. Ao lado da situação de jogo, e do trabalho em grupo, introduzimos um desafio específico, que somente pode ser encontrado pelo uso abstrato de inteiros.

O Campo Semântico das Quantidades Brutas ($\mathbb{N}$, U, \)

Com seixos, palitos de fósforo ou com os botões do Jogo das Borboletas, podem-se fazer operações de adição mas não se podem fazer operações gerais de subtração, como 3 – 5. Sempre se podem reunir 3 palitos com 5 palitos, mas de 3 palitos não se podem extrair 5; já 5 – 3 dá 2. Por quê? Como se justifica a crença - afirmação de que o resultado é 2? Somos tentados a dizer que se tratam das operações com naturais. Para nós, que já fizemos as sínteses operatórias, os naturais são inteiros positivos e as operações entre eles são restrições das operações com inteiros.

Mas não é assim que as crianças justificam que 3 – 5 não dá e que 5 – 3 dá 2. As justificações emitidas pelas crianças para 5 – 3 = 2 são as que nós mesmos, um dia, emitimos. Não são justificações com números naturais, são justificações com palitos. Para podermos apreender o processo de desenvolvimento que termina incluindo essas justificações no campo semântico dos inteiros, é preciso que possamos dar-lhe significado em termos de palitos. Piaget estudou essa questão. Quando um sujeito manipula palitos para justificar que 5 menos 3 dá 2, Piaget diz que ele fez a síntese operatória da classe e da relação assimétrica (Piaget, 1976, p. 198) ou que fez a passagem das quantidades intensivas, onde apenas se tem relação parte - todo e complementação, a quantidades extensivas, que constituem a primeira emergência dos números naturais.

Vamos nos referir a essa primeira emergência como o campo semântico das quantidades brutas. É esse campo semântico anotado por ($\mathbb{N}$, U, \) que funda a epistemologia dos inteiros. Lembramos que as operações não são as dos naturais, enquanto encaixados nos inteiros ou racionais positivos e sim, operações com quantidades brutas como U, reunião e \, extração.

O Campo Semântico das Quantidades com Sinal ($\mathbb{Z}$, +, –)

O que o Jogo das Borboletas faz é, essencialmente, introduzir a composição de operadores aditivos tendo por estados as quantidades brutas. No contexto do jogo + 3 significa três a mais e – 3, três a menos. Se, entre as borboletas A e B, coloca-se a carta + 3 com flecha de A para B e entre as borboletas B e C coloca-se a carta – 5 com flecha de B para C, então a carta que completa o circuito, a ser colocada com a flecha de A para C, é – 2. Em geral, o jogo convenciona que a carta $+a$ é o operador

$$f_{+a}: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ definido por } f_{+a}(n) = n + a$$

e a carta $- a$ é o operador

$$f_{-a}: \{a, a + 1,...\} \to \mathbb{N} \text{ definido por } f_{-a}(n) = n - a$$

Então, a operação (+ 3) + (– 5) = (– 2), necessária para o completamento do circuito descrito acima, é a composição de funções, isto é, composição de operadores aditivos:

$$f_{-5} \circ f_{+3} = f_{-2}$$

Os sinais + em (+ 3) e – em (– 5) são **predicativos**, estabelecem uma qualidade do operador. Porém, no jogo, aparecem também sinais **operatórios**, sob a forma de flechas nas cartas. O jogo institui que o sinal operatório negativo (o percurso em sentido contrário à flecha) significa composição com o operador inverso. Assim, por condição do jogo, os jogadores são levados a justificar (+ 3) – (– 5) como (+ 3) + (+ 5) = (+ 8).

Os números naturais que designavam as quantidades brutas, agora designavam operadores e aparecem precedidos de sinais predicativos. Entre as quantidades brutas era possível reunir e extrair. O que o Jogo de Perdas e Ganhos faz é, essencialmente, instituir essas operações entre os operadores, que começam, com isso, a funcionar como estados de novas operações. Extrair uma dívida significa acrescentar um ganho.

Em conseqüência desses dois jogos, espera-se que a criança que respondia que 3 – 5 não dava, passe a responder espontaneamente 3 – 5 = – 2. Isso mostrará que ela está operando em outro campo semântico que não o das quantidades brutas. À medida em que essa criança não se lembre de por que antes dizia não dá, teremos uma indicação do modo pelo qual se processa o desenvolvimento horizontal de um campo semântico e sua passagem ao novo: há uma fusão das operações reunião - extração com as operações composição - inversão. A isso Piaget denomina síntese operatória. Vejamos em que ela consiste.

Há dois significados produzidos para 3 – 5 no contexto dos Jogo das Borboletas:

$\boxed{+3}\ \boxed{-5} = \boxed{-2}$	$\boxed{+3}\ \boxed{+5} = \boxed{+2} = \boxed{-2}$
(+3)+(-5)=(-2)	(+3)-(+5)=(-2)

No primeiro, todos os sinais operatórios são reduzidos a positivos, deixando-se os sinais negativos para figurarem como predicativos. O sinal + significa composição de operadores, que podem ter qualidades diferentes: a qualidade do + 3 é acrescentar botões; a qualidade do – 5 é retirar botões. No segundo significado, todos os sinais predicativos são reduzidos a positivos e os negativos figuram como sinais operatórios. Todos os operadores têm a função de acrescentar botões, porém o sinal – diante do (+ 5) significa que essa função deve ser invertida.

As quantidades brutas 3 e 5, entre as quais, antes, 3 – 5 não dava, são projetadas nas quantidades com sinal + 3 e + 5, resultando, agora

$$3 - 5 = (+3) - (+5) = (+3) + (-5) = (-2)$$

Como a questão inicial 3 – 5 era posta no campo semântico das quantidades brutas, a resposta obtida (– 2) é convertida de volta nesse campo semântico, que se alarga, para incluir o objeto (– 2). Os dois campos semânticos fundem-se num só, que passa a integrar o conjunto das concepções espontâneas do sujeito.

O fato de a criança não se lembrar de que 3 – 5 antes não dava, é, na verdade, a extração que agora se torna possível. Do ponto de vista do observador, 3 – 5 passou a (+ 3) – (+ 5), daí à forma equivalente (+ 3) + (– 5) = (– 2) e desta a 3 – 5. Do ponto de vista do sujeito que vive a síntese operatória, as duas passagens intermediárias são suprimidas e ele passa diretamente de 3 – 5 a – 2. Se lhe perguntarmos por que dá – 2, ele responderá: porque dá, ora...

A síntese operatória implica que, a partir de um certo momento, o sujeito passa a operar no novo campo semântico como se sempre tivesse feito isso. Esse efeito retroativo é próprio das determinações simbólicas (Zizek, 1991, pp. 30 - 43) e, como tal, é inevitável. Tem como conseqüência que o sujeito não pode chegar à síntese por meio de uma explicação que lhe chegue de fora, como um aviso de que agora, ele está operando em um outro campo semântico ou como inculcação de regras operatórias. Foram-lhe ensinadas novas crenças - afirmações diante das quais as antigas sucumbiram: mudou seu modo de produzir significados diante de certa demanda que o outro lhe faz. Antes dizia 3 – 5 não dá; agora é óbvio que sempre deu. A exigência pedagógica de que ele sempre produza justificações para suas crenças - afirmações e a estratégia de distinguir entre sinais predicativos e operatórios, colocando o predicativo acima ou depois do número, ou mesmo distinguir entre o 3 natural e o + 3 inteiro, só podem dificultar a síntese.

Resulta desse processo um sistema algébrico que podemos considerar como o dos números inteiros, porém munidos apenas das operações de adição e subtração. Ao modo de produzir significados neste sistema, chamaremos de campo semântico das quantidades com sinal e anotaremos $(\mathbb{Z}, +, -)$.

$$(\mathbb{Z}, +, -): \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,...\}$$

A Multiplicação e o Campo Semântico dos Inteiros $(\mathbb{Z}, +, -, \times)$

O Jogo das Araras institui operadores multiplicativos sobre as quantidades com sinais, bem como novas operações com estes operadores: composição e adição. A atuação dos operadores multiplicativos reduz as quantidades com sinal, que antes eram operadores aditivos, a meros estados dos novos operadores multiplicativos. A multiplicação pode ser justificada como soma repetida $3 \times (+5) = (+15)$, $3 \times (-5) = (-15)$. Em geral, para todo *a* de $\mathbb{N}$,

$$f_a: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ definido por } f_a(z) = a \times z$$

A composição desses operadores multiplicativos se faz pela multiplicação dos naturais que constituem seus índices:

$$f_a \circ f_b = f_{a \times b}$$

A partir desse ponto, poderíamos introduzir a inversão dos operadores multiplicativos o que nos levaria aos operadores multiplicativos fracionários. Com isso, atingir-se-ia o sistema estável dos racionais positivos que funcionou como obstáculo para a construção da estrutura multiplicativa dos inteiros através da história (Glaeser, 1981). Como queremos nos restringir aos números inteiros, não seguiremos esta via. Apenas assinalamos o problema aberto de saber se, seguir por ela, isto é, ensinar primeiro os racionais positivos, facilita ou dificulta o posterior desenvolvimento dos inteiros.

O Jogo das Araras institui também multiplicadores negativos. Dá-se a quantidades com sinal, a função de operadores multiplicativos atuando sobre as próprias quantidades com sinal. O jogo distingue bem entre as funções de operador e estado. Os sinais das quantidades que funcionam como operadores multiplicativos são representados pelos sinais + (mais) e – (menos) e os sinais das quantidades, que funcionam como estados, são representados pelas cores azul e vermelha.

O desenvolvimento do campo semântico das quantidades brutas até a síntese, no campo semântico das quantidades com sinal, é feito por nucleação de um modelo: situações de dívidas, temperaturas, deslocamentos, excessos e faltas são apresentadas e funcionam como estatuto final das justificações. A partir da introdução das quantidades com sinal como operadores, para o desenvolvimento do campo semântico dos inteiros, é preciso instituir um princípio: convenciona-se que os operadores multiplicativos de um dado sinal (negativo, no nosso jogo), têm a propriedade de trocar a cor do estado sobre o qual atuam, e os de outro sinal (positivo), a de mantê-la. Tudo mais vai se arranjar como desenvolvimento desse princípio.

Inúmeras vezes, ao apresentarmos os jogos, ouvimos a crítica de que esse princípio equivale a impor a regra de sinais. Entretanto, não é quando um operador negativo atua sobre um estado negativo que aparece o menos vezes menos. Jogamos com operadores representados por sinais e estados representados por cores, portanto, não se trata da regra de sinais. Quando se faz $f_{-3}\,(5v) = 15a$, o que se tem é a composição de um operador multiplicativo com um operador troca de sinal: $f_{-a} = T \circ f_a$ onde – *a* é a quantidade com sinal e a quantidade bruta correspondente. A multiplicação de negativos vai aparecer quando se faz a composição de dois operadores negativos. Esta composição implica duas trocas de cores do estado, ou de sinais se substituirmos nos estados as cores por sinais , portanto, em manutenção do sinal: $f_{-a} \circ f_{-b} = f_{+ab}$. É aí que surge o "menos por menos igual a mais". Diferentemente do princípio, onde um sinal era do operador, outro do estado, agora ambos os sinais "menos" são sinais de operadores multiplicativos. Resulta, por exemplo, que $+6$ é equivalente, como operador a – 3 composto com – 2.

Dados dois operadores multiplicativos, representados pelas cartas no Jogo das Araras, institui-se um terceiro. Por exemplo, com os operadores (+ 3) e (+ 5) atuando sobre o estado 2*a*, o jogo fornece as seguintes possibilidades, nos circuitos aditivos:

$$3 \times 2a + 5 \times 2a = 6a + 10a = 16a \quad \text{e} \quad 3 \times 2a - 5 \times 2a = 6a - 10a = 4v$$

Por outro lado, sobre o 3 e o 5 que funcionam como operadores multiplicativos, projetam-se as quantidades com sinal $+3$ e $+5$. Com elas, intrometem-se entre os operadores multiplicativos as antigas operações + e – que atuavam entre quantidades com sinal. As operações, projetadas no novo domínio, sugerem que se façam somas e subtrações de operadores multiplicativos (+ 3) + (+ 5) = (– 8) e (+ 3) – (+ 5) = (– 2) como meio mais fácil de jogar: de fato, essas operações levam ao mesmo resultado: $3 \times 2a + 5 \times 2a$ é o mesmo que $8 \times 2a$ e $3 \times 2a - 5 \times 2a$ é o mesmo que $(-2) \times 2a$. Então a antiga operação (+ 3) + (+ 5) = (+ 8) passa a significar três vezes mais cinco vezes são oito vezes e a operação (+ 3) – (+ 5) = (– 2) passa a significar três vezes menos cinco vezes são menos duas vezes. O sujeito terá respondido à pergunta: que significa menos vezes? $f_3 - f_5 = f_{-2}$.

Chega-se assim ao campo semântico dos números inteiros, que é maximal, no sentido de que as crenças - afirmações dos demais encontram justificações aqui. É esse o campo semântico visado pela operação de ensino.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Procuraremos descrever os passos do desenvolvimento e da aplicação deste método alternativo de abordagem dos números inteiros. A pesquisa implementada possui, a priori, duas etapas distintas: a elaboração e confecção dos jogos propriamente ditos e os procedimentos de sua aplicação durante a etapa de intervenção. Este tópico versa sobre essas duas etapas.

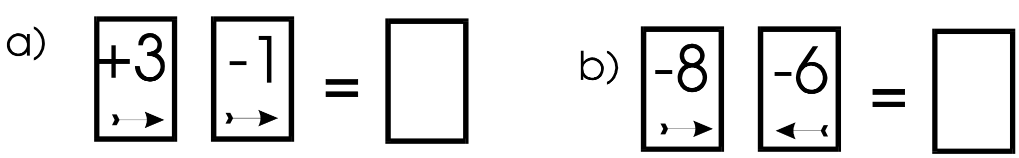
Os jogos, já descritos no tópico "Conhecendo os Jogos", foram alvo de constante aprimoramento e discussões. Para elaborar os jogos, diversos testes de aplicação e de avaliação das regras foram executados durante as sessões do GPA. Após a definição dos parâmetros dos jogos, subentendendo parâmetros como o conjunto de normas que iam, desde as regras, até a definição e confecção física, aprimoraram-se os quatro jogos para o ensino de números inteiros: Jogo das Borboletas, Jogo de Perdas e Ganhos, Jogo das Apostas e o Jogo das Araras que ficaram prontos para serem utilizados em intervenções de pesquisa - ação[12].

Os tabuleiros foram confeccionados artesanalmente em cartolina e depois afixados em placas de eucatex; as cartas e cartões foram feitos em papel cartão, as cédulas de dinheiro em cartolina e os botões foram obtidos no acervo de materiais didáticos do GPA, à disposição para as intervenções.

Os jogos foram aplicados sempre em grupos de no máximo quatro alunos, sendo realizado um constante trabalho de monitoramento que visava a observar os procedimentos e as reações dos integrantes do grupo, bem como procurar realizar encaminhamentos para quaisquer dúvidas que porventura surgissem no transcorrer da aplicação. Parte dessa estratégia era investigar a cooperação entre os elementos do grupo. Após a utilização dos quatro jogos, foram entregues atividades em folhas de papel sulfite aos grupos, que abordavam, como já dito anteriormente, problemas de completamento de circuitos enunciados com o material do jogo e, após esta etapa, problemas do mesmo teor, com a notação matemática usual. Essas atividades eram diariamente corrigidas, e quando necessário, devolvidas ao grupo para refazê-las, caso houvesse erros[13].

Em nossa intervenção, utilizaremos o termo “atividade” para designar exclusivamente os exercícios propostos após o uso do jogo, que tinham como objetivo estimular e instigar os alunos a raciocinar e buscar suas próprias conclusões.

As atividades eram elaboradas diariamente, com uma permanente avaliação do desempenho dos alunos, buscando interceptar os eventuais problemas de não - compreensão ou dificuldade por parte deles. Esta característica de análise constante proporcionou uma flexibilidade marcante nas atividades, que eram reestruturadas sempre que necessário, buscando o seu aprimoramento. Portanto, as atividades não dispunham de um modelo ou de um padrão pré - determinado, mas foram elaboradas simultaneamente à intervenção e seguindo as premissas necessárias conforme a metodologia da pesquisa - ação. Exemplo do caráter dinâmico da elaboração das atividades é o aproveitamento da própria linguagem dos alunos:



Acima, podemos observar a atividade 9. Nesta não escrevemos duas vezes o número da carta como nas atividades 1 a 8A, pois quando os alunos

---

[12] Como integrantes do Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática, utilizamos em nossa intervenção a metodologia de pesquisa - ação. Maiores informações sobre tal metodologia pode ser encontrada em Souza & Baldino (1995).

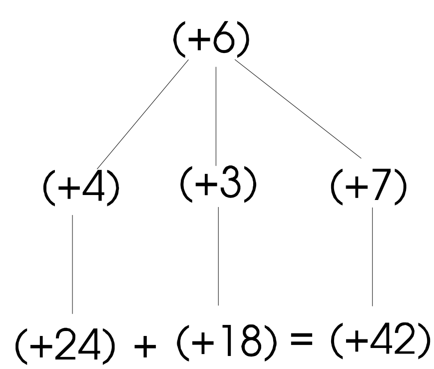
[13] As atividades podem ser encontradas no Volume do Professor, p. 36.

elaboravam esboços das cartas não a reproduziam com os dois algarismos, mas com apenas um. A atividade 23 foi feita aproveitando-se o próprio vocabulário utilizado pelos alunos, fato que se deu durante o transcorrer das atividades 19 e 19a,... onde perceberam que se podia achar a carta que fechava o circuito de outra forma diferente da que eles utilizavam durante o jogo. Para o fechamento do circuito aditivo do Jogo das Araras, os grupos perceberam que não era necessário fazer as contas através dos botões para se achar a carta que o fechava, pois era possível achá-la através das cartas já existentes no circuito. Para explicar para a professora, utilizavam a expressão “Pelos botões e pelas cartas“ e diziam: “Tanto faz fazermos pelas cartas ou pelos botões, que o resultado é o mesmo”[14].

Exemplo da atividade 23:

<u>Modelo</u>:

Vejamos o circuito abaixo do jogo das araras:



Escrevamos, agora, as duas formas para se fechar esse circuito:

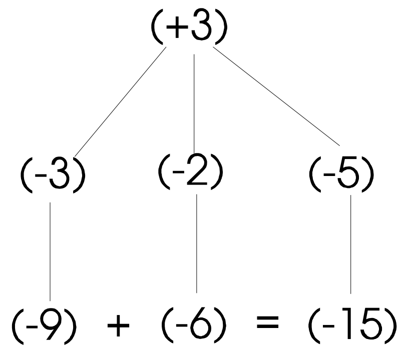
1ª) Pelas cartas: $(+6) \times ((+4) + (+3)) = (+6) \times (+7) = (+42)$

2ª) Pelos botões: $(+6) \times (+4) + (+6) \times (+3) = (+24) + (+18) = +42$

$\vdots$

[14] Maiores informações sobre esse episódio estão descritas no capítulo 7, p. 149-151.

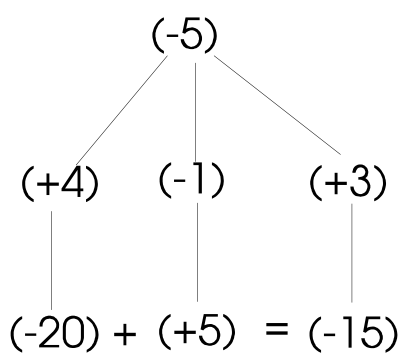
Faça como os modelos acima os exercícios abaixo:



A atividade 26 também foi elaborada aproveitando-se as observações dos alunos, que não raramente diziam que as duas formas eram iguais, principalmente quando estavam realizando as atividades 19, 19A... . Exemplo da atividade 26:

<u>Veja o modelo</u>:

Para o circuito abaixo do jogo das araras

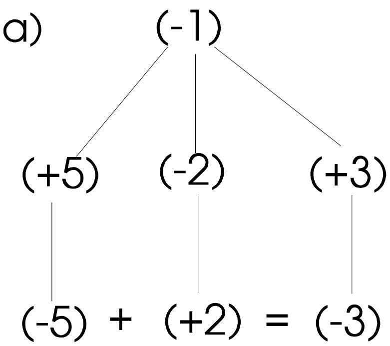


Façamos a igualdade: Pelas cartas = Pelos botões, ou seja,

$(-5) \times ((+4) + (-1)) = (-5) \times (+4) + (-5) \times (-1) = (-20) + (+5) =$
$= + (-15) = -15$

<u>Façamos, agora, os exercícios seguintes</u>:

a)



Inicialmente, na sala de aula, foi proposto o que gostaríamos de trabalhar e como iríamos fazê-lo. A proposta foi feita de forma que a pesquisadora expôs a metodologia a ser adotada e o tema a ser abordado. Os alunos foram convidados a se manifestar sobre a proposta, e não havendo nenhum comentário contrário, nossa proposta foi aceita. Assim, foi elaborado um contrato de trabalho, no qual havia uma descrição detalhada das normas que regem a intervenção, o conteúdo a ser abrangido e os critérios de avaliação a serem empregados. Este contrato, entregue na aula posterior, estabelecia e regulamentava tudo o que havia sido proposto pela professora e aceito pelos alunos, sendo assinado pelo professor e pelos discentes, em sinal de anuência e compromisso com o estabelecido[15]. A utilização de contratos de trabalho é citada por Cabral (1992) e Pereira (1995), os quais os fundamentam teoricamente.

Apresentado o contrato de trabalho e explicadas as eventuais questões dos alunos em relação a ele, foram aplicados os jogos através da divisão da classe em grupos de quatro componentes. Vale salientar que, as questões que surgiram sobre o contrato de trabalho, foram de âmbito da má interpretação do texto, e não questionamentos quanto à estrutura de trabalho. A divisão dos

[15] O contrato de trabalho utilizado encontra-se no Volume do Professor (p. 108).

grupos foi feita de acordo com o desejo dos próprios alunos; não eram fixos, podendo haver permuta de membros entre eles. Outro artifício utilizado foi a concepção do Grupão, que consistia em um grupo que englobava toda a classe e o professor, a fim de discutir e procurar respostas para os questionamentos que surgissem no transcorrer da intervenção. Esse Grupão era evocado sempre que necessário, com a convocação partindo do professor ou dos próprios alunos. Após os jogos, foram aplicadas as atividades. Durante toda a intervenção, os alunos foram submetidos a avaliações, que seguiam as premissas previamente estipuladas no contrato de trabalho. O critério adotado consistia em um conceito individual e outro para o desempenho em grupo. O desempenho do grupo era avaliado segundo dois quesitos: presença (individual) e participação, com os valores atribuídos de 0 (zero) a 2 (dois). A média final era obtida através das duas notas atribuídas com cada uma delas correspondendo a 50% do valor total As notas atribuídas aos grupos eram repassadas diariamente para uma planilha de livre acesso para os alunos, que podiam assim acompanhar o desempenho de seus respectivos grupos e de seus companheiros[16].

A avaliação individual se assemelhava às folhas de atividade, porém, de maneira que o aluno a resolvesse por si só, sem a presença do grupo. Ela existia devido ao conservadorismo dos pais dos alunos e da estrutura do Ensino Público, em relação ao fato de exigir um "documento" escrito que provasse o desempenho do aluno. Essa avaliação individual foi aplicada durante a fase das atividades, visto que as notas atribuídas, durante o transcorrer dos jogos, não eram reconhecidas como documento, pois não havia um “registro físico”, apenas eram emitidas pela professora. A atual estrutura do Ensino Público removeu a autonomia do docente em relação a decisões diversas, tais como atribuir conceitos aos alunos, e exige sempre que haja um “documento” escrito por parte do aluno, no caso, uma avaliação ou “trabalho”.

[16] A planilha de avaliação dos grupos encontra-se no Volume do Professor, p. 110.

Para a definição da nota bimestral do aluno, visto que a rede pública adota o sistema de conceitos e menções *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, optou-se pela utilização de um artifício que consistia em definir, nas notas de aproveitamento de grupo, uma média obtida entre o intervalo de notas do alunos. Como cada aluno possuía duas notas de desempenho de grupo diária (uma nota pela participação e outra pela presença), somaram-se todas as notas. O maior valor obtido em pontos passava a equivaler à menção *A*, e o menor valor à menção *E*. Dentro desse intervalo, definiam-se intervalos menores equivalentes às demais menções.

CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA

Apresentação

A escola onde se realizou o processo de intervenção durante o ano letivo de 1997 foi a *Escola Estadual de Primeiro Grau "Professor Délcio Báccaro"*[17], localizada a Rua Hum, nº 303, Bairro Jardim Inocoop, no município de Rio Claro - SP. Durante a intervenção vigoravam os estatutos e normas da LDB 5692 / 71.

Esta escola pertence ao setor da Rede Física Escolar de Rio Claro que compreende o Bairro do Estádio, Jardim Inocoop, Residencial Village e Vista Verde, Jardim das Palmeiras, Residencial Brasília, Jardim Guanabara, Jardim Novo I, Jardim Novo II, Jardim Nova Rio Claro e Jardim Nova Veneza. Com exceção do Bairro do Estádio, os demais são núcleos urbanos mais recentes que se caracterizam como residenciais, servidos pelo pequeno comércio, tais como padarias, bazares, pequenos mercados, bares, entre outros.

O Jardim Inocoop e o Jardim Brasília são núcleos habitacionais financiados pelo governo. No Jardim Inocoop, a moradia - núcleo mais antiga se caracteriza por casas maiores e melhor construídas que a moradia - núcleo do Jardim Brasília, que se limita a um quarto, cozinha e banheiro. Já o Residencial Village (apartamentos) e Vista Verde (casas) são condomínios fechados. Os demais bairros são formados por áreas loteadas por particulares, cabendo ao comprador do terreno a construção da casa, feita em finais de semana, às vezes em sistema de mutirão ou, por vezes, através não só da compra de material, bem como do custeio da mão - de - obra. Em geral todos os bairros deste setor possuem infra - estrutura inadequada, precária ou insuficiente.

---

[17] Escola na qual a pesquisadora iniciou suas atividades docentes, em 1994.

O Sistema de Transporte Coletivo é precário, já que conta com poucos ônibus e horários de funcionamento, não atendendo às necessidades dos seus usuários.

Esses bairros são cortados por uma via perimetral e ainda, alguns deles, pela FEPASA, Rodovia Washington Luís e Rodovia Fausto Santomauro.

Não existem áreas de lazer para servir a população, ainda que haja um grande número de crianças e adolescentes; os jovens, portanto, fazem uso da quadra de esportes da escola nos finais de semana e nas férias.

No setor da saúde, esses bairros são servidos por um posto de atendimento para serviços rotineiros no Jardim das Palmeiras, enquanto que o serviço emergencial fica a cargo do Posto de Atendimento da Santa Casa de Misericórdia e do Bairro do Cervezão.

Dados da clientela

Segundo o plano escolar de 1997, através da análise sócio - econômica e cultural dos alunos observou-se que a renda familiar da clientela servida pela escola é o produto do trabalho obtido por dois ou mais membros da família. Constatou-se que grande parte da mão - de - obra é de não - qualificada a semi - qualificada, sendo que o maior número de empregados desempenha funções na construção civil, como empregadas domésticas, bóias - frias, industriários e balconistas.

A escolaridade dos pais é diversificada. Possuem o primeiro grau completo, incompleto, semi - analfabetos e analfabetos. Boa parte é originária de várias regiões do Brasil, predominantemente da região nordestina. Daí os filhos terem local de nascimento variado.

Ainda no plano escolar de 1997, são apresentadas as expectativas dos alunos em relação à escola, as dificuldades e necessidades para o desempenho escolar, além de suas sugestões para o aperfeiçoamento e mudanças da escola. Esses dados foram obtidos através de uma pesquisa realizada com os alunos no ano de 1996. Vejamos:

Expectativas dos alunos com relação à escola: Maior higiene nos banheiros; melhor merenda; mais bebedouros; conserto dos ventiladores, do telhado e reposição de lâmpadas e vidros; melhor segurança; mais organização; querem aprender; acreditam que através do estudo terão qualificação profissional para terem acesso ao mercado de trabalho; acham que deve haver respeito mútuo entre alunos e professores; querem regras disciplinares; querem a eliminação dos colegas indisciplinados; não apreciam aula tripla[18]; mais organização; que o ambiente seja mais agradável; mais passeios, competições esportivas, festas e comemorações e ainda, o uso de bolas e rádios nas aulas vagas.

Dificuldades e necessidades, apontadas pelos alunos, para o desempenho escolar: Material didático insuficiente; biblioteca: melhor qualidade, que satisfaça às necessidades de pesquisa e que as pesquisas solicitadas se limitem aos livros disponíveis, ampliação do horário de atendimento; indisciplina (bagunça) / barulho durante as aulas prejudica os interessados (alguns professores não conseguem explicar a matéria); falta de atenção e interesse dos colegas; dedicação nos estudos por parte dos colegas e acompanhamento dos professores quando há dificuldade; aulas duplas e triplas (cansativas); não querem o uso da calça comprida; ventilação precária (conserto dos ventiladores); aumento do muro para maior segurança quanto à invasão de estranhos (traficantes dentro da escola).

Sugestão dos alunos para aperfeiçoamento e mudanças da escola: Melhorar a limpeza / Os alunos devem manter a escola limpa; limpeza dos

---

[18] Aula tripla consiste em três aulas, de um mesmo docente, ministradas em um mesmo dia de aula.

vestiários e banheiros (chuveiro, espelho, etc); mais atividades extra - classe (palestras, passeios, teatro, TV, excursões, mais festas); usar bermuda no verão e seguranças como havia no ano passado/aumentar.

Os alunos da escola encontram-se, em média, com a seguinte faixa etária por período:

PERÍODO	FAIXA ETÁRIA (anos)
Manhã	10 - 14
Tarde	12 - 15
Noite	15 - 20

Vejamos o desempenho da escola no ano de 1996

[U1] Comentário: Documento da escola escaneado

A escola possui, no total, 26 salas de aula em funcionamento, sendo nove no período da manhã, nove no período da tarde e oito no período da noite (veja tabela abaixo), há cinco aulas com duração de cinqüenta minutos cada, nos dois primeiros períodos, e cinco aulas de quarenta minutos cada, no último período. Em geral, as classes possuem, em média, 35 alunos.

Períodos	**Horários**	**5$^{\underline{as}}$**	**6$^{\underline{as}}$**	**7$^{\underline{as}}$**	**8$^{\underline{as}}$**	**Salas de Aula**
Manhã	07:00 às 12:00	A,B,C	A,B	A,B	A,B	9
Tarde	12:30 às 17:50	D,E,F	C,D,E	C,D	C	9
Noite	19:00 às 22:40	G	F,G,H	E,F	D,E	8
Totais		7	8	6	5	26

Histórico da Escola

Fruto da reivindicação feita pelos moradores do bairro Jardim Inocoop, a E.E.P.G. Prof. Délcio Báccaro foi criada pelo decreto n$^{\underline{o}}$ 20.620 do dia 25/02/83. Iniciou suas atividades com o nome de E.E.P.G. do Conjunto Habitacional Inocoop, mas pelo decreto n$^{\underline{o}}$ 20.715 de 03/03/83 passou a ter o nome que atualmente ostenta. Foi oficialmente inaugurada em 25/06/83, mas já estava instalada e funcionando desde 13/05/83. O patrono, Professor Délcio Báccaro, nasceu em Pirassununga, cidade do Estado de São Paulo, no dia 22/07/1927 vindo a ser, em 1961, diretor de escola na cidade de Rio Claro.

No início a escola possuía oito classes de 1ª a 6ª séries, das quais quatro funcionavam durante o período da manhã e as outras à tarde, atendendo a cerca de 350 crianças. Já em 1985, a escola funcionava em dois períodos (manhã e tarde), com 16 classes, que abrangiam desde a pré - escola até a 8ª série, atendendo a um total de 443 alunos, e no ano de 1996, com a reestruturação do ensino, passou a oferecer apenas classes de 5ª a 8ª séries, que funcionavam em três períodos: manhã, tarde e noite. Atualmente, de acordo com o plano diretor de 1997, a escola funciona em três períodos com 26 classes de 5ª a 8ª séries, atendendo a um total de 961 alunos.

A escola promove eventos internos tais como: exposição de trabalhos feitos pelos alunos; palestras para pais e alunos sobre sexualidade, gravidez na adolescência, drogas, aborto, doenças sexualmente transmissíveis (principalmente a AIDS); visitas a lugares históricos, patrimônios naturais, de saneamento básico; excursões; visitas a exposições, a apresentações artísticas e cívicas; jogos inter - classes. Promove outras atividades, abertas a toda comunidade como: teatro, desfiles de moda, bingo, festa do sorvete e outras. Conta com a ação da APM - Associação de Pais e Mestres, do Conselho de Escola e do Grêmio Estudantil. Vale salientar que, em virtude da vasta gama de eventos, por vezes as aulas eram suspensas, fato que, se a atividade externa não fosse bem conduzida e amarrada ao contexto curricular, geraria apenas a perda preciosa de aulas. Outro ponto delicado é a atividade do Grêmio Estudantil, que muitas vezes realizava suas plenárias em hora de aulas e constantemente era assunto dos alunos em sala de aula.

De acordo com o plano diretor, o Conselho de Escola, o Grêmio Estudantil, a APM (através de convocação, convites, reuniões ordinárias e extraordinárias), a equipe escolar e o HTPC (Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo)[19] são instâncias decisórias e funcionam discutindo problemas e decidindo consensualmente as decisões e mais, após deliberações é pleno o

[19] Eram 2 HTPC por professor, não obrigatórias durante o ano de 1997, como ocorre no ano de 1998, com a nova LDB.

nível de autonomia dessas instâncias, tomando decisões pedagógicas (metodologias, campanhas, projetos, trocas de experiências) e administrativas (prioridades financeiras, espaço físico, pedagógicas, burocráticas, comportamentais e de aproveitamento).

O Conselho de Escola é um órgão colegiado de natureza deliberativa, presidido pelo próprio diretor, o Prof. Paulo Sérgio Athiê e constituído por professores, vice - diretor, pais de alunos, funcionários; suas reuniões ocorrem no mínimo quatro vezes por ano quando há necessidade de discutir questões da escola e suas atribuições são aquelas dadas no parágrafo 5º da Lei Complementar nº 444/85. A APM, segundo a escola, tem por objetivo, colaborar no aprimoramento do processo educacional, na integração da escola com a família e a comunidade; é administrada por uma diretoria executiva, escolhida pelo Conselho Deliberativo, que por sua vez é eleito pela Assembléia Geral; é essa mesma Assembléia que elege o Conselho Fiscal e tem sido responsável pela proximidade da comunidade com a escola, pois através das atividades promovidas vem resgatando pouco a pouco a freqüência e participação dos pais. A contribuição financeira espontânea é simples.

A comunidade pouco participa da vida escolar, mas espera, de acordo com pesquisa realizada em 96, que a escola promova a continuidade nos estudos, o acesso ao trabalho, e que, através da merenda, haja comida. As duas últimas considerações foram feitas pela grande maioria. A minoria sabe do trabalho realizado na escola. O acompanhamento, portanto, é praticamente ausente. A auto - estima dos filhos é baixa. Todavia, a maioria entende ser a escola um lugar necessário, enquanto trabalham, uma vez que possuem uma vida difícil, precária e muito violenta, principalmente nos bairros em que vivem.

Objetivos educacionais

Os objetivos educacionais encontrados na proposta educacional da escola são:

1) Participar democraticamente; gestar colegiadamente e integrar a escola à comunidade.

2) Valorizar e instrumentalizar o saber elaborado historicamente; construir e reconstruir: o produto como fim de um processo; atentar para as profundas divergências e diferenças sócio - econômico - culturais.

3) Capacitar docentes; conteúdos programáticos atrelados à proposta curricular vigente; criar condições favoráveis no ambiente pedagógico; minimizar a evasão (16% em 1996); diminuir a repetência (3% em 1996); sociabilidade e socialização do conhecimento; adequar a prática docente; supervisão escolar; contínua adesão dos pais para melhorar o aproveitamento e disciplina.

Os objetivos educacionais específicos da Matemática encontrados no plano de ensino de 1996 são:

Proporcionar conhecimentos básicos de teoria e prática da Matemática para integração do estudante na sociedade em que vive.

Desenvolver o interesse e a criatividade do aluno para que ele explore novas idéias e descubra novos caminhos na aplicação dos conceitos apreendidos e na resolução de problemas.

Desenvolver o nível cultural do educando, contribuindo para um melhor aprendizado.

Estimular no educando hábitos de: estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, iniciativa, raciocínio, responsabilidade e uso correto da linguagem.

Desenvolver sua capacidade de: classificar, relacionar, reunir, representar, analisar, sistematizar, conceituar, deduzir e provar.

Possibilitar ao estudante o reconhecimento da inter - relação entre os vários campos da Matemática e desta com as outras áreas.

Apesar dos objetivos educacionais estarem estabelecidos, nenhum deles foi discutido em conjunto com os docentes e o corpo administrativo da escola, o que acabou acarretando no fato de que cada professor acabou sendo responsável por seus atos e atribuições, além de sua metodologia, sem nenhum tipo de interferência por parte da direção. De fato, a direção nunca interferiu no trabalho dos docentes.

Características físicas da Escola

O prédio da escola, cuja construção data de 1983, apresenta um bom estado de conservação, com suas dependências pequenas e pouco adequadas às várias atividades escolares. Todo final de ano, a escola é pintada e durante o ano, são efetuados os serviços de reparos em geral do prédio e de revisão de suas instalações, tendo sido pintado pelos próprios alunos em novembro de 1997, sob coordenação da professora de Educação Artística. Foram elaborados desenhos representando cada tema de sala ambiente. Durante o ano letivo de 1997, foi instituído o sistema de "salas ambiente", ou seja, cada sala de aula era designada para uma disciplina e o docente permanecia nela, enquanto os alunos trocavam de salas durante o período. Este esquema não apresentou bons resultados, pois havia vários professores da mesma disciplina no mesmo período, portanto, a impossibilidade de trabalharmos apenas em nossa sala ambiente, acarretando inúmeros problemas, como facilmente é de supor.

A escola possui uma área livre considerável, utilizada em parte como "estacionamento" pelos professores e funcionários, e os muros que a cercam são relativamente baixos.

O prédio é composto por: uma sala de secretaria, uma sala de diretoria, uma sala de professores, uma sala para coordenador pedagógico[20], uma sala

[20] O Estatuto do Magistério (Lei Complementar 444/85) estabelece em seu artigo 21 que a designação do Professor Coordenador, com validade para um ano, será precedida de escolha entre os docentes da Unidade

para a dentista, uma biblioteca, uma sala de multi - meios, oito salas de aula, dois banheiros para docentes e funcionários da secretaria, seis banheiros para os discentes, uma cozinha, uma cantina, um pátio coberto e uma quadra poliesportiva. Dos seis banheiros para discentes dois estão em funcionamento para os alunos, um para os funcionários da cozinha, da limpeza e da segurança, um está servindo para guardar os materiais de Educação Física (bolas, redes,...) e os outros dois que possuem chuveiro estão fechados.

As salas de aula possuem 49 m^2, sendo que duas delas ficam do lado externo, possuem 50,40 m^2 cada, e são utilizadas como sala ambiente para as disciplinas de Educação Artística e Educação Física.

A sala de multi - meios - onde estão disponíveis os recursos audiovisuais da escola, tais como aparelho de televisão, videocassete e aparelho de som - é diariamente utilizada como sala de aula normal, devido ao excesso de professores de uma mesma disciplina; por esse motivo, caso um professor necessitasse usá-la na sua verdadeira função, era preciso solicitar ao coordenador pedagógico que a providenciasse. As salas do corpo docente e dos funcionários são pequenas.

A quadra poliesportiva não possui cobertura e é de cimento, com pinturas de quadras de futebol de salão, voleibol e basquetebol. Possui as traves para futebol, as tabelas de basquete e a rede de voleibol.

A cantina é administrada pela APM - Associação de Pais e Mestres. É muito pequena e muitas vezes não abre durante o intervalo por falta de funcionários e, algumas vezes, por falta de produtos.

A biblioteca é bastante modesta e passa pouco tempo aberta à disposição dos alunos, em virtude de não haver um funcionário específico para o cargo.

Escolar, pelos seus pares, à época do planejamento escolar, recaindo a preferência aos ocupantes de cargo, destinados à função de coordenação na área pedagógica, nos períodos diurno e noturno.

A iluminação do prédio é péssima, fato que facilita, juntamente com a escassez de funcionários, durante o período da noite, o acesso de pessoas estranhas. A escola é constante alvo de ataques de pixadores e de roubos diversos ao patrimônio, além de sofrer depredações; por esse motivo, foi instalado no mês de outubro, o sistema completo de prevenção contra roubo.

A limpeza da escola deixa a desejar, pois há apenas uma funcionária encarregada, já que a segunda se encontra atualmente afastada, acarretando em banheiros (dos alunos) e bebedouros (de água não potável) imundos.

A merenda escolar é feita na própria escola na pequena e limpa cozinha de que dispõe, por três merendeiras que revezam o horário. Não dispõe de um refeitório. Muitos professores que não dispõem de tempo de ir para casa, fazem sua refeição na própria escola.

Quadro funcional

A E.E.P.G. "Professor Délcio Báccaro" conta com 29 professores habilitados e dois não habilitados, um diretor (designado), uma vice - diretora (designada) e uma coordenadora pedagógica (designada).

Dos 29 professores habilitados 11 são efetivos, três são estáveis e o restante, portanto, ACT. Para a Matemática, há um professor efetivo, três professores ACT e dois não habilitados.

Por outro lado, o quadro administrativo é composto por: uma secretária (substituta), um oficial de escola, uma inspetora de alunos, duas serventes (uma afastada), um dentista e três merendeiras (funcionárias do município). É importante salientar que não há caseiro, mas há um guarda municipal, somente para o período de aula, responsável pela segurança da escola.

Apresentação de nossa sala de aula

Não utilizamos apenas uma sala de aula para o nosso trabalho, uma vez que, como dito anteriormente, havia mais de um professor de Matemática no mesmo período, impossibilitando o uso da sala ambiente todos os dias. Iremos a seguir, descrever as salas de aula utilizadas:

1) A sala ambiente de Matemática dispõe de um armário de aço pequeno, no qual são guardados alguns livros e materiais didáticos de Matemática; possui apenas uma tomada elétrica; uma lousa; uma tabuada pendurada na parede; um conjunto de mesa e cadeira para o professor; quarenta carteiras dispostas inicialmente, por um pedido nosso aos outros professores de Matemática, em grupos de quatro e, da metade do ano para frente, em forma matricial.

Vale salientar que as chaves dos armários de aço de cada sala ambiente ficavam sob a responsabilidade dos docentes das respectivas disciplinas.

2) A sala de multi - meios dispõe de uma televisão; um videocassete; uma estante para vídeo e TV; uma lousa; uma tomada elétrica; um conjunto de mesa e cadeira para o professor; quarenta carteiras dispostas matricialmente; no final do ano, possuía trinta carteiras velhas empilhadas no canto da sala, que foram utilizadas para o bingo da escola e que não foram retiradas.

3) A sala ambiente de Educação Artística possui uma lousa; uma tomada elétrica; vários desenhos feitos pelos alunos afixados nas paredes cobrindo quase toda a sala; um armário de aço pequeno; um conjunto de mesa e cadeira para o professor; quarenta carteiras dispostas em grupos de quatro.

As três salas utilizadas, assim como as demais salas de aula do prédio, não possuem boa ventilação apesar de suas janelas tomarem, por completo, uma das paredes laterais. O problema se agrava principalmente nos períodos da manhã e tarde, uma vez que, pela manhã, o sol incide incessantemente. As cortinas foram danificadas no início do ano e somente no mês de setembro foram repostas, fato que agravava o problema da luz solar. Além disso, os ventiladores foram consertados apenas nesse mesmo mês, ou seja, passaram quase o ano todo danificados. Outra característica problemática da estrutura é o fato de as janelas serem muito baixas, o que possibilita que sejam arremessados objetos para dentro das classes, provocando a quebra de vidros, apesar de possuírem telas de arame protetoras.

A iluminação das salas era satisfatória, uma vez que não usávamos lousa devido às características de nosso trabalho, mas os professores que a utilizavam, reclamavam muito da falta da cortina que originava reflexos (pontos cegos) durante o dia e à noite.

Mesmo através dos pedidos dos professores, dos pais dos alunos e dos próprios alunos para que as cortinas e ventiladores fossem repostos, a administração escolar se mostrou irredutível por um tempo, afirmando que eram os próprios alunos os responsáveis pela queima de algumas cortinas e carteiras, por cortarem o restante das cortinas com tesoura e por jogarem objetos nos ventiladores, danificando-os.

No período da tarde, no qual nos encontrávamos na sala de aula, muitos alunos de outras classes, sem aula no momento, em virtude da falta de algum docente, ficavam na janela das salas a fim de arremessar bichos vivos ou mortos (sapos mortos ou insetos vivos) e objetos nos alunos que estavam dentro da sala, em aula. Outro problema ocorria durante as tardes muito quentes, quando o Córrego da Servidão, próximo à escola, exalava um mau cheiro insuportável. A acústica das salas também era péssima, permitindo que todo e qualquer barulho fosse notado dentro e fora da sala, principalmente nos dias em que havia alunos circulando pelo corredor, fato habitual.

As salas se encontravam em condições médias de conservação. No início do ano havia cortinas relativamente boas, alguns ventiladores funcionando e todas as mesas e cadeiras tinham sido reformadas, porém já na metade do ano, as cortinas já haviam sido depredadas, nenhum ventilador funcionava, as tomadas elétricas estavam danificadas e a maioria das carteiras não apresentavam condições de uso. Após as férias, a escola recebeu do Estado um conjunto novo de mesas e cadeiras, para todas as salas de aula, ditas inquebráveis e à prova de fogo.

A intervenção, que será relatada no próximo capítulo, foi realizada no período da tarde, com 32 alunos, sendo 21 meninos e 11 meninas, com faixa etária compatível com a 5ª série do primeiro grau. Havia trinta alunos com 11 a 13 anos, e dois com 15 anos. Estes alunos viviam num ambiente que apresentava problemas diversos, tais como desagregação familiar, envolvimento com tóxicos e gangues.

DESCRIÇÃO DO TRABALHO EM SALA DE AULA

Iremos relatar o trabalho realizado na sala de aula de 5ª série.

SALA DE AULA (5ª série E)

A fim de preparar a classe para as atividades em grupo, foram aplicadas inicialmente atividades que visavam a buscar a integração dos alunos, introduzir o conceito de trabalho em grupo e as regras que regem o trabalho. Vale salientar que os alunos não possuíam contato prévio com esse tipo de trabalho, e as atividades iniciais foram de suma importância para o bom desenrolar da aplicação futura dos jogos.

DATA: 16/04/97

No início da aula, a professora solicitou aos alunos que formassem o grupão - termo utilizado para denominar a reunião geral da classe quando todos se sentam em um grande círculo - e iniciou sua fala dizendo que gostaria de apresentar à sala uma nova proposta de trabalho. Em seguida a expôs, dizendo que nessa nova proposta os alunos iriam trabalhar, inicialmente, com quatro jogos para o ensino de números inteiros, e depois, com atividades de ensino relativas a eles.

Explicou também que os alunos trabalhariam em grupos de, no máximo quatro, e no mínimo três pessoas, e que a avaliação inicialmente seria feita na fase do jogo, por intermédio de uma nota de grupo, para a qual seriam considerados dois ítens: a participação do grupo e a presença do aluno em sala de aula; cada um desses ítens poderia valer 0, 1 ou 2. Essa avaliação seria anotada diariamente em uma planilha com o nome dos alunos e entregue no dia posterior. Após os jogos e início das atividades de ensino, eles seriam avaliados por uma nota de grupo e outra individual. Essa nota individual seria atribuída através de uma avaliação escrita, realizada individualmente pelos alunos e, a partir das duas, teríamos a nota final do aluno.

Após a explanação, a proposta foi votada e aceita por todos; em seguida a professora comunicou aos alunos que tudo o que haviam combinado para o trabalho em sala de aula seria registrado, dando origem a um contrato de trabalho, que seria levado na aula seguinte para a leitura e, caso houvesse consentimento unânime entre alunos e a professora, todos o assinariam.

DATA: 18/04/97

Inicialmente foi entregue aos alunos o contrato de trabalho, uma cópia para cada um, apresentando o conteúdo, a forma de trabalho e a avaliação que seria adotada pelo professor em sala de aula. O contrato foi distribuído com a condição de que, se alguém tivesse alguma sugestão de alteração, deveria se manifestar; caso contrário, os alunos e o professor deveriam assinar em consentimento[21].

Como não houvesse nenhuma manifestação, recolheram-se as cópias do contrato e iniciou-se o trabalho planejado para esse dia.

Um fato importante a se destacar é que o tabuleiro do Jogo das Borboletas foi montado sobre uma tábua de "eucatex", a fim de que os alunos tivessem um tabuleiro rígido sobre as mesas. Essas placas mediam

[21] O contrato de trabalho desenvolvido em nossa sala de aula encontra-se no Volume do Professor, p 108.

73,5 x 55,5 cm, num total de nove unidades. Assim, o transporte dos tabuleiros pela professora, do estacionamento da escola à sala de aula, era bastante difícil. Por esse motivo, a professora combinou que, após formados os grupos, haveria um rodízio entre eles, ou seja, cada dia um deles iria buscar ou levar os jogos até o carro. Essa atividade ocorreria somente quando fossem a primeira ou a última classe que utilizariam o jogo.

Os alunos se reuniram em grupos de três ou quatro pessoas, aos quais foram distribuídos as regras do Jogo das Borboletas (versão recreativa concreta)[22], o tabuleiro, as cartas da versão recreativa concreta e os botões; as regras foram lidas pelos grupos que, em seguida, perguntaram suas dúvidas. A classe se dividiu em nove grupos.

A participação dos alunos foi muito intensa, ninguém deixou de jogar ou mostrar interesse em aprender as regras do jogo.

As dúvidas eram muitas, como se os alunos não tivessem lido as regras. A professora perguntava aos grupos se não haviam lido as regras, uma vez que todas as respostas para as suas perguntas estavam lá. Respondiam que as leram, mas não haviam entendido.

A professora pediu que os grupos lessem novamente as regras, agora atentamente, e que anotassem as suas dúvidas, pois somente essas seriam discutidas pelo grupo e a professora. Caso contrário, eles não conseguiriam aprender a jogar.

Como todos estavam muito entusiasmados para jogar rapidamente, os grupos se organizaram para a nova leitura.

A aula terminou sem que a professora tivesse falado com todos os grupos.

---

[22] Os jogos utilizados em nossa intervenção encontram-se no capítulo 3, p. 22.

Observação: Diariamente, a partir do dia 16/04/97, foi entregue aos grupos uma folha de papel sulfite contendo uma planilha com as notas dos alunos[23].

DATA: 23/04/97

Iniciamos a aula com a formação dos mesmos grupos da aula anterior. A folha com as notas dos grupos foi entregue. A professora continuou percorrendo os grupos. Em todos eles, as dúvidas apresentadas eram provenientes da dificuldade de leitura apresentada por todos na última aula. Alguns alunos diziam que “odiavam” ler.

Os grupos do Leopoldo, ... e da Edjane,... pediram que a professora fornecesse o material e as regras do jogo para que eles pudessem confeccioná-lo e jogar em casa. E mais, o grupo do Leopoldo,... queria confeccioná-lo para vender de porta em porta. A professora prometeu trazer-lhes na próxima aula.

Sanadas as dificuldades de leitura, os alunos começaram a jogar e não apresentaram dificuldades nas regras do jogo, fechavam os circuitos sem a menor dificuldade e prestavam muita atenção nas jogadas, a fim de vencerem. E diziam: “Nossa, é muito fácil, parecia tão difícil quando estávamos lendo a regra!”, e “Que jogo legal!”.

O fato do primeiro jogador iniciar com uma quantidade alta de botões na borboleta (dois botões pretos, por exemplo) gerou discussão na maioria dos grupos pois, com isso, a probabilidade de terem circuitos fechados apenas com o curinga aumentava.

Para eles, esse jogador estava “travando” a jogada. A professora disse a esses grupos que eles tinham que “entrar em um acordo” e achar uma solução pois, com a discussão eles não estavam jogando, portanto não estavam participando da aula. Com isso, o grupo não teria nota de participação.

[23] A planilha de notas pode ser encontrada no Volume do Professor, p. 110.

Alguns grupos (sete) deram a seguinte solução: quando o primeiro jogador iniciar com uma quantidade alta de botões, os outros deverão colocar, atentamente, cartas de valor menor nas trajetórias, para que a quantidade não aumente tanto. Os outros grupos (dois) preferiram adotar como regra a seguinte solução: todo jogador deve iniciar o jogo com um número pequeno de botões.

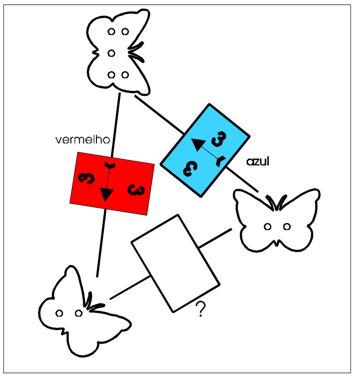
Feito isso, passaram a jogar sem ter problemas no grupo.

Uma outra dificuldade da maioria dos grupos foi a de trabalhar (operar) com o zero: eles acreditavam que o zero era como um curinga, ou seja, tinha a mesma função no jogo.

DATA: 25/04/97

Os alunos formaram os grupos. Os jogos e as notas da última aula foram distribuídos, conforme combinado no contrato de trabalho. A professora entregou também o material para os dois grupos que pediram para confeccionar os jogos em casa.

A professora, nessa aula, percorrendo os grupos notou que, em todos eles, pelos menos um elemento sabia operar com o zero, o que impedia que a carta zero fosse usada de maneira errada, pois esse elemento não permitia sua utilização em qualquer circuito. Isso gerava discussão nos grupos e constante solicitação da professora. Era como se eles nunca tivessem visto o zero! Ao ser solicitada pelos grupos, a professora colocava a seguinte questão para os alunos que tinham dificuldades com o zero: “Nesse circuito (abaixo) qual a carta que fecha? Não vale o curinga!”.



Eles respondiam: “Para sair de dois e chegar em dois eu não posso somar e nem subtrair nada. Ah! lógico, agora é o zero”.

Como em toda aula eram jogadas várias partidas, os alunos passaram, através do impedimento do colega, a prestar atenção quando colocariam ou não a carta zero no jogo, e a formar o conceito do que isso representava para eles.

Esses alunos começaram a encarar tal dificuldade como uma desvantagem no jogo, o que lhes proporcionou uma busca para resolvê-la.

No final da aula, todos estavam utilizando a carta zero sem problemas e sem discussões.

DATA: 28/04/97

Inicialmente houve a formação dos grupos e a entrega do material, agora da versão escolar concreta, e das notas.

A professora não precisou explicar essa nova versão. Todos os grupos começaram a jogar sozinhos, e usaram as cartas de forma correta.

Nessa aula os grupos jogaram várias partidas sem apresentar dificuldades, nem mesmo solicitaram a presença da professora nos grupos.

DATA: 30/04/97

Antes de formarem os grupos, os alunos solicitaram à professora se haveria possibilidade da mudança, somente naquela aula, dos grupos, pois gostariam de jogar com outras pessoas. Com o consentimento, outros grupos se formaram e continuaram jogando a mesma versão da última aula.

No final da aula, os alunos disseram que estavam enjoados e que gostariam de mudar de jogo.

DATA 05/05/97

Foram formados os grupos originais, aos quais foi entregue a folha com as notas. A aluna Edjane comunicou à professora que haviam feito o jogo para brincar em casa. Outros grupos também pediram o material.

Durante essa aula, iriam começar a jogar a versão recreativa abstrata do Jogo das Borboletas. Foi entregue para cada grupo o material do jogo, agora sem os botões. Os grupos perguntavam à professora: “Professora, onde estão os botões? A senhora esqueceu de entregar!”.

Para cada grupo a professora colocou: “Hoje vamos jogar de outra forma o Jogo das Borboletas. Os botões foram levados pelas borboletas e não existem mais”. “Como faremos, agora, para fechar o circuito e continuar a jogar?”.

Os grupos ficaram inquietos com o novo obstáculo. Queriam responder rapidamente para poder jogar. A solicitação da presença da professora nos grupos era constante.

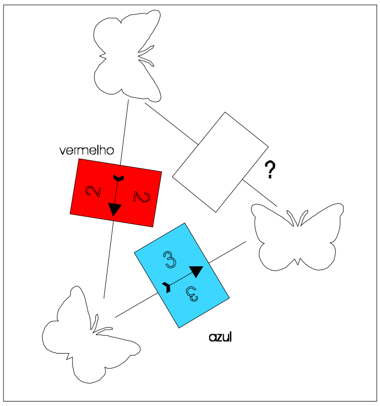
No momento em que a professora percebeu o “desespero” de alguns alunos, foi dito que só discutiria se houvesse uma conclusão bem elaborada pelo grupo, e não por um elemento. Portanto, não adiantava se “desesperarem”. Era preciso conversar e discutir como fariam para jogar.

Houve uma certa demora e inquietação. Alguns alunos diziam: “É muito difícil, professora!”. Para que os grupos não se desmotivassem, a professora estimulava: “Vocês querem jogar, não querem? Então vamos pensar”.

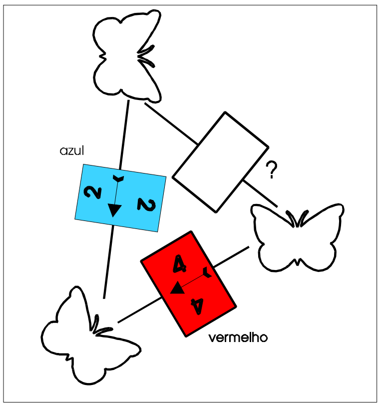
De imediato, três grupos solicitaram a professora. Todos eles tinham o objetivo de dar a seguinte solução: “Imaginar” uma quantidade de botões nas borboletas. Após essa explicação, a professora disse que os botões não existiam mais e que não era permitido nem pensar neles, portanto, essa não era uma forma de jogar. Foi dito: “Vocês não podem usar e nem pensar nos botões! Usem outra estratégia”.

Dois grupos começaram, por encaminhamento da professora, a esquematizar e fechar um circuito com botões (escreviam, a lápis, na borboleta) para que pudessem olhar as cartas e concluir que essas fechavam o circuito.

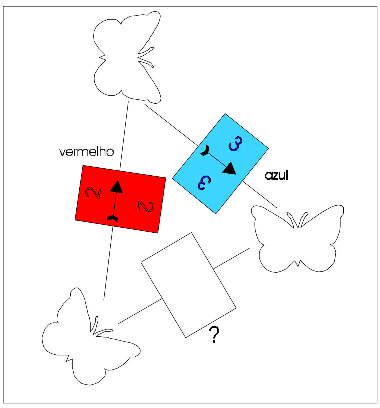
Depois de um certo tempo, um desses dois grupos colocou: “É preciso compensar, ou seja, o número de vermelhos e azuis tem que ser o mesmo”. A professora pediu que eles mostrassem no tabuleiro. “Por exemplo, professora, se há no circuito (abaixo) 3 azuis e 2 vermelhos, para compensar o número de vermelhos, falta 1 vermelho, logo, é essa carta que fecha o circuito”.



Foi questionado: “Você colocou um circuito onde as duas setas estão no mesmo sentido. O que ocorre se uma delas estiver invertida?” Foi apresentado o seguinte circuito para o questionamento do grupo:



Eles solicitaram um tempo para pensar. Para os outros grupos, que estavam com muita dificuldade, foi colocada a seguinte comparação e apresentado o circuito abaixo:



“Se o circuito fosse uma escada, e tivéssemos que descê-la dois degraus (no caso, a carta vermelha) e posteriormente subi-la três degraus (representados pela carta azul), essa ação seria equivalente a quê? Ao invés de ficarmos subindo e descendo o que poderíamos fazer para chegar onde chegamos?”

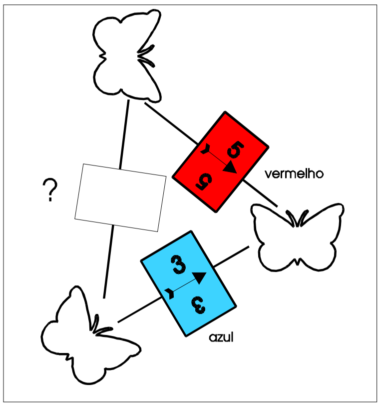
Todos os grupos responderam que bastava subir 1 degrau e eles chegariam ao mesmo lugar alcançado com o sobe e desce, ou seja, que essa maratona (como foi dito pelo aluno Júlio) era equivalente a subir (azul) 1 degrau. Em seguida, a professora questionou: “Então, qual é a carta que fecha o circuito, nesse sentido?". Mais uma vez, todos os grupos responderam que era a carta 1 vermelho, que representava o contrário, que é descer. Em seguida, disse a professora: “Não podemos esquecer do sentido que adotamos para percorrer o circuito e de indicá-lo com a seta da carta”.

A aula terminou sem que a professora tivesse retornado ao grupo que solicitou um tempo para pensar e sem que os alunos tivessem efetivamente começado a jogar.

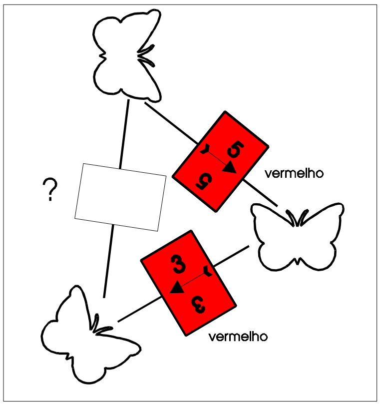
DATA: 07/05/97

Os grupos se formaram rapidamente, ansiosos com o início do jogo. O material e as notas foram entregues.

A professora retomou com o grupo da última aula a pergunta que havia ficado pendente. Eles responderam que no caso de uma das cartas estar com a seta invertida, deveríamos trocar a carta por outra com cor diferente e seta no mesmo sentido da primeira. “Por exemplo, para esse circuito (abaixo) poderíamos trocar a cor e a seta da carta 3 azul, pois quando jogávamos com botões tanto fazia colocar 1V ou 1A, se a seta estivesse certa.



Então, o circuito ficaria assim:



Logo, para compensar o número de vermelhos, a carta que fecharia era o 8 azul com seta no mesmo sentido".

Quando o grupo terminou, foi pedido que eles explicassem ao restante dos grupos como iriam jogar. O grupo explicou aos demais conforme haviam dito para a professora, inclusive o que ocorria quando a seta estava invertida. Quando terminaram, foi dito a todos que podiam iniciar o jogo.

Ao percorrer os grupos, a professora constatou que cinco grupos estavam utilizando a comparação da escada para jogar e quatro grupos, a compensação. Nenhum grupo, nessa aula, deixou de jogar.

DATA: 09/05/97

A aula foi suspensa. Motivo: Conselho de Classe.

DATA: 12/05/97

Os alunos continuaram jogando a versão abstrata recreativa do Jogo das Borboletas. Alguns deles diziam que essa versão era mais difícil do que a outra, pois tinham que pensar mais.

Cada aluno tinha uma "velocidade" para fazer a jogada. Alguns tinham maior facilidade e rapidez nas jogadas. Outros tinham mais dificuldades com as setas invertidas. Porém todos participavam da aula.

Um ponto muito importante dos alunos dessa 5ª série, é que todos eram muito críticos no jogo e não aceitavam ser "convencidos" nem pelos companheiros, nem pela professora.

DATA: 14/05/97

Nessa aula, os alunos começaram a jogar a versão escolar abstrata do Jogo das Borboletas. Mais uma vez, como na versão concreta, os próprios grupos começaram a jogar sem pedir explicação alguma para a professora.

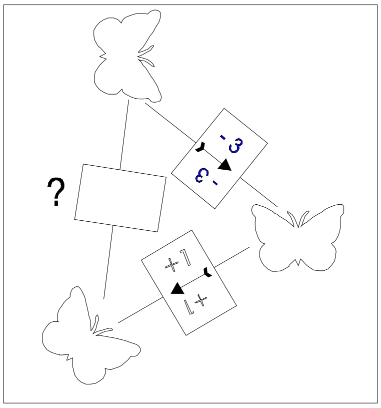
As opiniões variavam entre os alunos, alguns gostavam mais de jogar com cartas coloridas e outros com cartas com sinais.

Todos os grupos trabalhavam bem com a carta zero nesse estágio do jogo. Três grupos (da Camila, da Fabiana e do Leopoldo) apresentavam dúvidas em saber qual a carta que fecharia o circuito quando havia uma seta invertida. "Vocês estão esquecendo de adotar um sentido para o circuito. Por isso vocês não sabem que carta inverter. De onde vocês iniciaram para subir ou descer no circuito? Vocês têm que sair de um lugar e chegar a ele novamente, para poder fechar o circuito, ou seja, têm que ter um início e um fim. E a seta da carta que fecha o circuito tem que representar o sentido adotado." Estas foram as principais questões propostas pela professora.

DATA: 19/05/97

Os alunos continuaram jogando a versão escolar abstrata nessa aula. Inicialmente, a professora percorreu os grupos que apresentaram dificuldades durante a aula passada. Esses e os demais jogavam sem problemas.

Ao percorrer os grupos, a professora notou que todos eles, ao fecharem um circuito (por exemplo o circuito abaixo), diziam: "Para eu fechar esse circuito falta dois a mais" ou "Para eu fechar esse circuito falta subir dois a mais".



Durante toda a aula, os grupos foram monitorados a fim de acompanhar como estavam jogando.

DATA: 21/05/97

Nesta aula os alunos formaram novos grupos, os quais foram separados de acordo com os seus pontos, feitos durante todas as jogadas da última aula, com o objetivo de quebrar a monotonia e evitar que os alunos enjoassem do jogo. Continuaram jogando a versão escolar abstrata. Uma aluna nova (Luciana) iniciou nesse dia. O grupo da Fabiana, Geronice e Francileide pediu que ela fizesse parte de seu grupo, encarregando-se de ensinar as regras do jogo à nova colega. Quando a professora foi solicitada, a aluna já estava jogando sem dificuldades. Observou-se que nesse estágio do jogo, a professora é solicitada com pouca freqüência, somente para esclarecer algumas dúvidas e discordâncias do grupo, mas mesmo assim, foram monitorados todos os grupos, a fim de conferir se os alunos apresentavam ou não dificuldades para jogar. A classe ficou dividida em oito grupos e todos conseguiram jogar e questionar as jogadas do seu adversário. Duas alunas chegaram atrasadas (15 minutos) à aula, e não puderam entrar. Na diretoria, a vice - diretora pediu o caderno delas; elas disseram que a professora de Matemática não utilizava caderno, que apenas jogava. A vice foi perguntar à professora que confirmou utilizar, como o diretor já sabia, um material didático composto por quatro jogos, mas que, se houvesse alguma dúvida por parte da direção e dos pais dos alunos, todos poderiam ver o contrato de trabalho assinado e lido (como esperado) pelos alunos. A professora esclareceu ainda que o conteúdo, a forma de trabalho e a avaliação estavam claramente colocados, além de que, no dia em que esse contrato foi entregue, fora solicitado que, se algum aluno discordasse de algum ponto, poderia se manifestar mas isso não ocorrera. Também foi dito que o contrato foi lido e discutido pela professora e pelos alunos, portanto, quem tivesse dúvida da seriedade do trabalho que estava sendo desenvolvido, poderia assistir à aula.

DATA: 23/05/97

Apesar dos alunos na aula passada estarem jogando sem dificuldades, continuamos com a mesma versão, pois os alunos pediram para continuá-la, uma vez que eles tinham apenas uma aula.

DATA: 26/05/97 a 02/06/97

Aulas suspensas. Motivo: viagem da professora ao V - Encontro Gaúcho de Educação Matemática onde apresentaria trabalho.

DATA: 04/06/97 e 06/06/97

Aulas suspensas. Motivo: Passeio histórico dos alunos à cidade de Rio Claro.

DATA: 09/06/97

Aula suspensa. Motivo: Teatro na escola.

DATA: 11/06/97

Foram entregues aos grupos o tabuleiro do Jogo de Perdas e Ganhos, o material para jogar e as regras do jogo. Inicialmente, ficaram muito mais preocupados em olhar o material entregue do que em ler as regras. A professora questionou-os: "Vocês não querem aprender como se joga? Para isso, vocês têm que ler a regra do jogo". Ao ouvirem o questionamento da professora, os grupos passaram a ler as regras. Terminada a leitura, os grupos começaram a jogar. A professora foi solicitada por várias grupos que apresentavam dúvidas sobre o jogo. Novamente os grupos foram questionados pela professora: "Vocês não leram? Então, como têm dúvidas? O que vocês estão me perguntando está tudo escrito na regra do jogo". A leitura continuou, mas foi um obstáculo muito difícil de ser transposto pelos alunos. Com isso, para toda pergunta feita, pelos grupos à professora, na tentativa de se aprender a jogar, era proposto que se recorresse à regra e a lessem. Depois de algum tempo de insistência com os grupos na leitura, a professora passou a ser menos solicitada por eles. Os grupos diziam: “Professora, esse jogo é muito legal! Ele é mais legal que o da Borboleta!”. O interesse e o entusiasmo dos grupos eram muito grandes. Todos queriam jogar e não falavam de outra coisa. No começo, os grupos tiveram dificuldade em entender o que seria emprestar dinheiro do banco e como funcionava o dinheiro vermelho. Achavam que se podia emprestar dinheiro vermelho. Quando isso acontecia, a professora questionava: “Você iria a um banco e pediria: Por favor, eu gostaria de ficar devendo R$100,00 para o seu banco, e o senhor não precisa me dar nada em dinheiro?”. Os alunos respondiam que não fariam isso, que só emprestariam dinheiro do banco, e não somente a dívida. Com essa resposta, a professora então perguntava: “Para que serve o dinheiro vermelho?”. Os alunos respondiam: “Serve como uma nota promissória ou como um registro da dívida feita com o banco; por isso, quando se empresta dinheiro do banco, recebe-se dinheiro azul e vermelho”. À medida que começaram a jogar mais vezes, essa dificuldade foi desaparecendo. A maioria dos grupos apresentou dificuldades na leitura e interpretação do cartão de sorteio, na execução exata do que o cartão dizia; sempre queriam fazer algo mais, mas a professora insistia que executassem apenas o que estava escrito no cartão. Dois grupos disseram que os cartões eram difíceis. Quando deu o sinal, os alunos falaram em coro: “Ah!! Não acredito! Já acabou!”.

Mesmo com o término da aula, a professora pediu que os alunos conferissem seus materiais, uma vez que o Jogo de Perdas e Ganhos possui várias peças.

DATA: 13/06/97

Aula suspensa. Motivo: Reunião na escola com a Delegacia de Ensino.

DATA: 16/06/97

Os alunos iniciaram jogando Perdas e Ganhos. A professora foi muito pouco solicitada, mas mesmo assim, percorreu todos os grupos para ver como estavam jogando e principalmente como estavam na leitura e interpretação dos cartões de sorteio. A dificuldade maior dos alunos era interpretar o cartão que diz o seguinte: "retire R$10,00V de seu colega à esquerda (ou direita)", quando esse colega não tinha os 10V. Após a insistência por parte da professora de que a tarefa tinha que ser cumprida, todos os grupos disseram que era necessário fazer um empréstimo do banco para que o colega tivesse 10V para ser retirado. Após efetuarem o que o cartão pedia, ficavam surpresos, porque o colega que não tinha os 10v acabava saindo ganhando. Novamente os alunos jogaram com muito entusiasmo.

No final da aula, uma aluna sugeriu que cada grupo tivesse seu material fixo e que, se alguma coisa acontecesse ao material, a responsabilidade seria do grupo. A professora e o resto da classe aceitaram sua sugestão e combinaram que na próxima aula os materiais seriam marcados com um número e cada grupo teria o seu.

DATA: 18/06/97

No início da aula, após formados os grupos, o material numerado foi entregue e uma lista foi feita com o nome do grupo e o número do material pelo qual ele seria responsável.

Os alunos continuaram jogando Perdas e Ganhos, sem nenhuma dificuldade. Executavam sem problemas o que era pedido no cartão de sorteio. A cada jogada revezavam o banqueiro e em algumas jogadas, esse jogava, em outras, não. Construíam casas e trabalhavam rapidamente com as contas e pagamentos realizadas no jogo, tanto pelo banqueiro quanto pelos jogadores. A maioria dos grupos terminava a partida quando o dinheiro azul do banco acabava. Jogavam sem parar e sem perder a atenção. A professora não foi solicitada pelos grupos, mas percorreu e acompanhou as jogadas de todos eles.

No final da aula, todos os grupos conferiram as peças de seu material e as guardaram. Um dos grupos acompanhou a professora até o carro para que o material fosse guardado como já estava sendo feito desde o início.

DATA: 20/06/97

No início da aula formaram-se os grupos, um elemento de cada pegou o seu material, e antes de iniciar o jogo, o conferiram. Quando encontravam alguma sujeira ou danificação no material (material descolando, rasgos, etc.), a professora era solicitada, a fim de dizer que não eram responsáveis, e em seguida, tentavam arrumar o material. Nesse dia chovia muito e, ao retirar o tabuleiro do carro da professora, caíram alguns pingos d'água, que fizeram com que os riscos de pincel atômico borrassem, o que os incomodou muito.

Todos queriam jogar, e tinham pressa em iniciar o mais rápido possível. Portanto, essa fase inicial não era demorada. Os alunos se organizavam para que o jogo tivesse início o quanto antes, ou seja, faziam os grupos rapidamente, distribuíam o material e quando era a primeira aula do dia, ficavam ansiosos e pediam rapidez na busca e retirada do material do carro.

Após conferirem os materiais, os grupos começaram a jogar. Jogavam sem dificuldades e não havia tentativa de trapacear no jogo. A presença da professora não foi solicitada.

No final da aula, os grupos arrumaram e conferiram seu material.

DATA: 23/06/97

Os grupos se formaram, o material foi conferido e continuaram a jogar Perdas e Ganhos. O jogo era tão dinâmico e havia tão poucos alunos ausentes, passando a impressão de que eles não enjoariam nunca do jogo.

Diferentemente do Jogo das Borboletas, em cada aula eram jogadas no máximo duas partidas, o que também contribuía para que demonstrassem o desejo de jogar outras vezes.

A execução dos cartões, a negociação de dinheiro com o banco, a construção de casas, tudo isso ficava muito mais rápido e hábil, à medida que continuavam a jogar.

Para executar o cartão: "Retire R$10,00V de seu colega à esquerda (ou direita) e entregue-os ao banco (ou fique com eles)", quando esse colega não tinha os 10V, não realizavam mais empréstimos do banco. Procediam da seguinte maneira: o banco dava R$10,00A ao colega da esquerda (ou direita) no caso onde o cartão mandava que os R$10,00V fosse entregue ao banco, ou o jogador, que retirou o cartão, dava R$10,00A ao colega no outro caso.

Muitos alunos continuaram pedindo que a professora lhes fornecesse a regra escrita e o material do jogo, a fim de confeccioná-los em casa e jogar com os irmãos e amigos do bairro. Para todos que pediram, o material foi fornecido. Os alunos contaram à professora que o jogo havia se tornado a sensação do bairro.

No final da aula, ao conferir o material, um grupo (Leopoldo, Newton, Cleiton e Raphael) deixou cair o dado do seu jogo no chão e, misteriosamente, desapareceu. Procurou-se pela classe toda e não foi possível encontrá-lo. O grupo sabia que como responsáveis daquele material, haviam de ter que prestar conta a todos da classe. Ao final da aula, decidiu-se (por sugestão de três alunos) montar um grupão para se discutir sobre esse acontecimento.

DATA: 25/06/97

Nesse dia, quando professora e alunos chegaram a sua sala (sala de Matemática), foram informados pela inspetora de alunos que teriam que usar a sala de Educação Física, pois a de Matemática estava sendo limpa e arrumada para receber a nova supervisora de ensino da escola, numa reunião com os professores durante o HTPC (Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo).

A professora e os alunos encaminharam-se para a sala de Educação Física. Ao chegar lá, se depararam com uma enorme mesa de pingue - pongue no meio da sala de aula. As mesas e carteiras tradicionais de sala de aula colocadas de forma amontoada, ao redor da referida mesa de pingue - pongue.

O grupo do Leopoldo, Newton, Cleiton e Raphael sugeriu que as cadeiras fossem colocadas ao redor da mesa, para que eles pudessem conversar com a classe. A sugestão foi aceita e todos se sentaram ao redor da mesa. Newton começou dizendo que havia achado o dado no meio dos seus livros e cadernos, dentro da sua bolsa, e que o dado não caíra no chão, mas dentro de sua bolsa, que estava aberta. O dado foi entregue à professora e, com isso, o aluno Rude colocou para o restante da classe que seria desnecessário continuar com a conversa, uma vez que nada havia acontecido, e que tinha sido uma "bobeira" do grupo. Disse ainda: "Assim, teremos tempo de jogar".

Quando o aluno Rude terminou sua colocação, a professora pediu ao resto da classe que manifestasse sua opinião. Todos concordaram com ele. Em seguida, a professora colocou: "Ótimo, vocês querem jogar! E como faremos isso nesta sala?".

Dois alunos (Donizete e Thiago) sugeriram o seguinte: "Enquanto a senhora (professora) vai com o grupo buscar o jogo no carro, o restante da classe arruma os grupos ao redor da mesa de pingue - pongue. Ah! a gente se aperta!".

Em seguida, o grupo responsável por buscar o jogo naquele dia já se prontificou. A professora e o grupo saíram, e o restante da classe ficou arrumando a sala. Ao retornar, os grupos já estavam prontos. Haviam arrumado as carteiras, de forma que todos os elementos dos grupos sentassem, e fosse possível dispor o tabuleiro.

A professora ficou surpresa e elogiou a classe pelo dinamismo e organização. Cada grupo, em seguida, pegou o seu material, conferiu e começou a jogar. Durante o jogo não houve dificuldades.

No final da aula, após conferirem o material e guardá-lo, os alunos "arrumaram" as carteiras onde estavam quando entraram na classe, a pedido da professora de Educação Física.

DATA: 27/06/97 e 30/06/97

Os grupos continuaram jogando Perdas e Ganhos nessas duas aulas. E não pediam que o jogo fosse mudado.

A professora tinha que entregar as notas a as faltas dos alunos até o dia 01/07/97. Portanto, a partir dessa aula, os alunos não precisariam mais assistir às aulas. Outras atividades seriam propostas na escola. Apesar disso, após esta data, a maior parte dos alunos pediam à professora, que continuou na escola até o dia 18/07/97, que os deixasse jogar na sala de Matemática. Não jogavam apenas os alunos da 5ª E, mas alunos de outras séries vinham participar do jogo com eles. A professora permanecia na sala, durante o tempo do jogo.

Esses alunos passaram a inventar regras novas, como a negociação de dinheiro entre eles e a construção de mais de três casas. Continuavam cuidando do material utilizado em sala de aula e se preocupando em buscar e levar o material até o carro.

DATA: 04/08/97

No primeiro dia de aula, após as férias, os alunos foram recepcionar a professora no estacionamento da escola, e diziam a ela: “Professora, a senhora trouxe os jogos?”; “Nós vamos continuar a jogar nesse bimestre, não vamos?”. Quando esta respondeu afirmativamente (a todas perguntas) os alunos deram-se por satisfeitos e foram para o pátio esperar o sinal de entrada.

No início da aula, como no semestre passado, um grupo, juntamente com a professora, foi buscar os jogos no carro. Os grupos jogaram, mais uma vez, Perdas e Ganhos e não apresentaram problemas.

DATA: 06/08/97

Nessa aula os alunos começariam a jogar o Jogo das Apostas. Foi colocado aos alunos que esse jogo agora teria dois componentes por grupo, portanto os grupos não seriam mais compostos de quatro pessoas. Foram formados 17 grupos aos quais foram entregues as regras e o material do jogo. Os grupos iniciaram a leitura das regras e tiveram muitas dificuldades em utilizar o material, que constava de uma folha de sulfite, a qual apresentava o desenho dos esquemas, necessário para se jogar; dinheiro azul (trinta notas de R$1,00, vinte notas de R$5,00 e dez notas de R$10,00 - representando ganho), dinheiro vermelho (trinta notas de R$1,00, vinte notas de R$5,00 e dez notas de R$10,00 - representando dívida) e cartões de sorteio. Eles acharam os esquemas em folha de sulfite muito pequenos e complicados de trabalhar e apresentaram uma enorme dificuldade em operar com as notas de R$5,00 e de R$10,00 (tanto vermelhas quanto azuis). Reclamavam que o jogo era muito difícil, e tinham necessidade de trabalhar somente com a unidade para poderem fazer as operações exigidas no cartão de sorteio.

Por exemplo,

Para resolverem essa situação, os alunos procediam da seguinte maneira: “Vou juntar R$10,00 azul com R$3,00 vermelho, então 3 azuis dos 10 eu terei que pagar como no Jogo de Perdas e Ganhos; logo sobrarão 7 azuis, ou seja R$7,00 azul”. Para fazer essas contas, os alunos tinham grande necessidade de estar vendo e manuseando os 3 azuis, que seriam pagos quando unidos com 3 vermelhos, fato que não era possível realizar com a carta R$10,00 azul. Alguns grupos trocavam a nota de R$10,00 azul por 10 notas de R$1,00 azul, mas mesmo assim, reclamavam que as cédulas dificultavam a visualização das operações que tinham que fazer, pois era necessário colocar uma em cima da outra.

A presença da professora nos grupos era solicitada constantemente, fato que a impedia de atendê-los satisfatoriamente, devido ao número excessivo de grupos.

A aula terminou sem que os alunos tivessem se familiarizado com o jogo.

DATA: 08/08/97

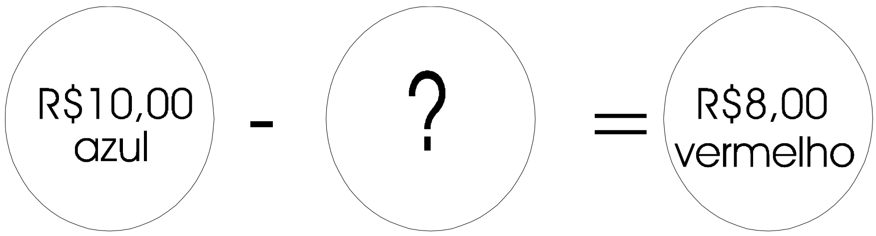
No início da aula a professora comunicou aos alunos que o jogo havia sofrido algumas modificações, a fim de melhor adaptá-lo à sala de aula. Foi exposto também que o jogo teria grupos de três ou quatro pessoas, e não mais dois componentes. Após a nova divisão dos grupos, e as novas regras, um novo material foi entregue, constando agora de um tabuleiro (do mesmo tamanho do Jogo das Borboletas), no qual havia o desenho, em tamanho grande, dos esquemas que anteriormente se encontravam em folha de sulfite; botões vermelhos e azuis, que representariam fichas de apostas, cada uma valendo R$1,00 (vermelho ou azul) e novos cartões de sorteio refeitos para se adaptarem à mudança do número de componentes.

A professora anunciou aos grupos que as apostas agora seriam feitas com fichas (botões), como em um Cassino, e que cada ficha vermelha valeria R$1,00 vermelho e cada ficha azul valeria R$1,00 azul.

Os alunos leram as novas regras e começaram a jogar. Solicitavam muito a presença da professora nos grupos, para que conferisse se estavam jogando corretamente. As regras e o material do jogo não apresentavam mais empecilhos para eles. E diziam: “Apesar de difícil, o jogo ficou muito melhor!” “Agora ficou mais fácil de se entender o que está sendo pedido!”.

Alguns grupos pediam ajuda na leitura dos cartões, pois os alunos, na ânsia de prosseguir com o jogo, liam os cartões sem a devida atenção e sem respeitar a pontuação, o que impossibilitava a compreensão do que era solicitado.

As dificuldades apresentadas por eles, agora, estavam nas operações necessárias para se jogar. Por exemplo,



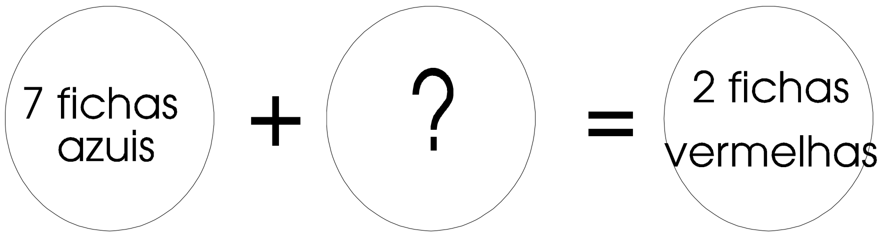
A aula terminou sem que a professora pudesse ter trabalhado as dúvidas dos grupos.

DATA: 11/08/97

Inicialmente, o jogo e a folha de notas foram entregues e os alunos começaram a jogar. A professora percorreu os grupos, e notou que as dúvidas coincidiam. Alguns encaminhamentos foram feitos. Para resolver a adição abaixo, alguns alunos diziam: “Eu tenho que juntar as 10 fichas azuis com as 3 fichas vermelhas então eu obtenho 13 botões”. Em seguida, eram questionados: “13 botões de que cor?” Logo respondiam: “Nossa! é verdade, eu não posso somar, pois as cores são diferentes”. Após esse encaminhamento, os alunos não apresentaram mais dificuldades e procediam da seguinte forma:

“Eu junto as 10 fichas azuis com as 3 vermelhas, em seguida pago as 3 vermelhas, o que resulta em 7 fichas azuis.”

Já para o caso da adição abaixo, alguns apresentaram problemas.



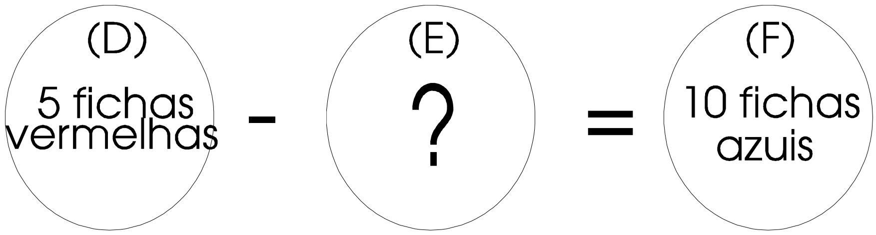
Esta dúvida foi resolvida pelo próprio grupo quando a professora questionou o que estava sendo pedido. Eles responderam que precisavam achar uma quantidade que, juntando com 7 azuis, resultasse em 2 vermelhos. “E para isso, como devo pensar?”, perguntou a professora. “Ah! tenho que acrescentar alguma coisa que pague os 7 azuis, para que esse desapareça, e ainda sobrem 2 vermelhos. Lógico! tenho que colocar 7 vermelhos mais os 2 vermelhos, ou seja, 9 vermelhos”. Apenas com essa intervenção, os grupos não apresentaram mais problemas com a adição.

Para cada caso da subtração, eles procederam de uma maneira. No caso abaixo, por exemplo,

Primeiramente, a professora solicitava que os alunos descrevessem a situação que estava sendo pedida, pois alguns deles ficavam indecisos se era para tirar 15 fichas vermelhas de 10 fichas azuis ou o contrário. Eles diziam: “15 fichas vermelhas menos 10 fichas azuis é igual a quanto?”. “Então eu tenho que tirar quem do quê?”, perguntava a professora. “Eu tenho que tirar 10 fichas azuis de 15 fichas vermelhas”, respondiam os alunos. Em seguida ela colocava: “E como isso vai ser feito?”, “Professora, como iremos tirar azul se só tem vermelho?”, “Vocês precisam resolver o cartão de sorteio para jogar, se não tem, é necessário fazer aparecer. E como vocês podem fazer aparecer azul na posição D?”, “O único jeito é emprestando dinheiro, ou ficha, do banco”. Todos os grupos deram a mesma sugestão de emprestar as fichas do banco. A eles foi colocado: “Ótimo! então agora pensem como vocês fariam isso?”.

Pouco tempo depois, os grupos chamaram a professora para dar-lhe a resposta e lhe disseram, mostrando os passos no tabuleiro: “Se eu tenho que tirar 10 fichas azuis de 15 fichas vermelhas, então eu empresto 10 fichas azuis e 10 fichas vermelhas e coloco-as junto com as 15 fichas vermelhas na posição D, só para poder fazer a conta. Daí, aparecem as 10 fichas azuis para eu retirar; retiro e vejo qual o resultado e em seguida o coloco. Aqui, são 15 fichas vermelhas mais 10 fichas vermelhas (que não foram tiradas), ou seja, 25 fichas vermelhas”. A professora questiona: “Mas eu posso colocar na posição D as 10 fichas azuis e as 10 fichas vermelhas, sem alterar as 15 fichas vermelhas?”. Os alunos responderam prontamente: “Pode, professora, pois as 10 fichas azuis com as 10 fichas vermelhas não representam nada, uma paga a outra, como no Jogo de Perdas e Ganhos; logo, não vai mudar nada” e ”Depois, professora, que você já sabe o resultado, é preciso retirar as fichas da posição D, que foram emprestadas para fazer a conta”.

No caso seguinte, novamente foi pedido aos grupos a descrição da situação:



“5 fichas vermelhas menos alguma coisa tem que dar 10 fichas azuis”, “Eu preciso achar quanto tenho que tirar de 5 fichas vermelhas para eu ficar com 10 fichas azuis.”

Em seguida, era questionado: “Como vocês podem fazer isso?”. Depois de algum tempo, responderam: “Do mesmo jeito, eu terei que emprestar as fichas do banco e colocar na posição D para fazer a conta, logo empresto 10 fichas azuis e 10 fichas vermelhas e coloco em D. Agora preciso ver quanto tenho que retirar para ficar com 10 fichas azuis. Preciso retirar 10 fichas vermelhas (que foram emprestadas) mais 5 fichas vermelhas, ou seja, 15 fichas vermelhas. Portanto, esse é o resultado, e agora posso retirar as fichas emprestadas e colocar o resultado”.

Para o caso abaixo, o procedimento foi o seguinte:

Primeiramente, pediu-se que verbalizassem a situação. Eles descreviam: “Alguma coisa menos 12 fichas azuis é igual a 10 fichas vermelhas”, “Tenho que achar alguma quantidade que, tirando 12 fichas azuis, dê 10 fichas vermelhas”. Alguns diziam que essa situação era muito complicada, pois mesmo que emprestassem as fichas do banco, não conseguiriam fazer as contas. “Veja, professora! Se eu empresto 12 fichas azuis e, conseqüentemente, as 12 fichas vermelhas, e coloco na posição D, não adianta retirar as 12 fichas azuis, pois não dá o resultado desejado (10 fichas vermelhas)”. A professora pede que os grupos pensem porque isso acontece. Apenas um aluno responde: “É porque eu continuo não tendo nada, quando coloco 12V e 12A, então não adianta fazer a operação. Só adiantaria se a resposta fosse zero”. Em seguida, ela solicita que esse aluno conte o que ele disse para o seu grupo e para os demais grupos.

A aula terminou antes que a professora fizesse um encaminhamento para essa questão.

Alguns alunos diziam: “Puxa, professora, algumas operações são difíceis!”.

DATA: 13/08/97

Após os grupos se formarem, a professora retomou a questão da aula passada e fez o seguinte encaminhamento: “Olhem para esta situação (abaixo)”:

“Quantas fichas precisam ser colocadas na posição D?”. Os alunos responderam: “25 fichas azuis, professora! Pois 25 – 10 é igual a 15”. A professora pergunta: “Essa situação é semelhante à situação anterior que estávamos vendo?”. Eles respondem: “Sim, professora, pois nas duas temos que preencher a posição D”. “Elas são semelhantes. Então, se vocês conseguirem achar, olhando para essa situação, qual é a relação entre a quantidade de fichas da posição D (25A) e a quantidade de fichas da posições E e F (10A e 15A), vocês serão capazes de entender a outra situação. Olhem para as posições E e F e descubram o que essas quantidades têm a ver com a posição D.” Todos os grupos responderam: “É que 10 fichas azuis mais 15 fichas azuis é igual a 25 fichas azuis”, “A quantidade de fichas da posição E (10A) mais a quantidade de fichas da posição F (15A) é igual à quantidade de fichas da posição D (25A)”, “Ah! professora, então é só somar a posição E com a posição F que eu sei quanto dá em D”, “Agora eu sei fazer a outra!”.

Em seguida, foi sugerido aos grupos que retornassem e tentassem resolver a questão anterior que era a seguinte:

E diziam: “Temos que somar o que tem em E com o que tem em F. São 12 fichas azuis mais 10 fichas vermelhas que resulta, pagando, 2 fichas azuis”.

Depois de resolverem essa situação, começaram a jogar e o fizeram até o final da aula. Alguns alunos ainda mostravam alguma insegurança para completar os esquemas, mas os problemas eram resolvidos pelo próprio grupo sem precisar da presença da professora.

DATA: 15/08/97 e 18/08/97

Os alunos continuaram jogando o Jogo das Apostas e, à medida que jogavam, as dúvidas e incertezas diminuíam. A professora percorreu e acompanhou todos os grupos. Surgiram dúvidas sobre como procederiam quando havia quatro jogadores, uma vez que no cartão de sorteio apenas três estariam jogando. Para essas dúvidas foi colocado que, como já dito nas regras, haveria um rodízio do aluno responsável pelo banco, que seria feito a cada três jogadas (e não partidas), e que cada um ficaria responsável pelo seu dinheiro, ou seja, quando fosse sua vez de ser banqueiro o seu dinheiro teria que ficar sobre o tabuleiro até o seu regresso.

Foi estipulado por todos os grupos, que o término de uma partida coincidiria com o término de fichas azuis ou vermelhas do banco.

DATA: 20/08/97 e 22/08/97

Continuou-se jogando o mesmo jogo. Alguns alunos trouxeram caixas de suas casas a fim de que pudessem colocar sua fichas na hora do jogo, evitando assim que caíssem, o tempo todo, no chão. Quase todos os grupos pediram para usar o dinheiro do Jogo de Perdas e Ganhos, para que, quando tivessem um número excessivo de fichas (botões), trocassem a maior parte deles por dinheiro, deixando apenas algumas fichas para apostar.

A presença da professora não era solicitada nos grupos, os quais jogavam sem dificuldades.

DATA: 25/08/97

Nesse dia, após o término de algumas partidas, alguns alunos disseram que estavam enjoando do jogo, mas mesmo assim jogaram até o final da aula.

DATA: 27/08/97 e 29/08/97

Aulas suspensas. Motivo: Visita dos alunos ao D.A.A.E. (Departamento Autônomo de Água e Esgoto).

DATA: 01/09/97

Aula suspensa. Motivo: Reunião na Delegacia de Ensino de Rio Claro - Projeto de Educação Continuada.

DATA: 03/09/97 e 05/09/97

Aulas suspensas. Motivo: Greve dos professores.

DATA: 08/09/97

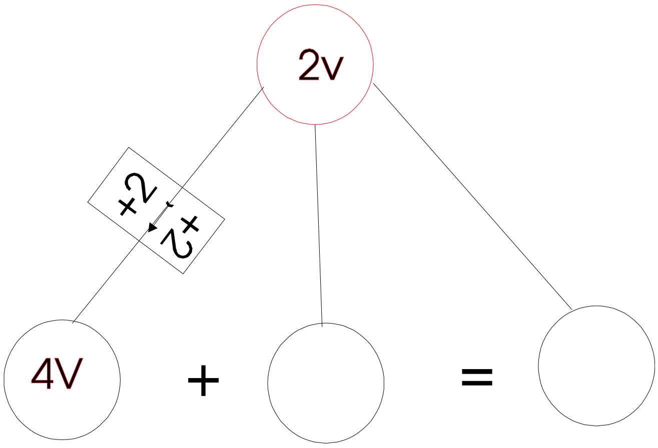
Na primeira aula do dia, os alunos jogaram quatro partidas do Jogo das Apostas. Na segunda aula foram entregues aos grupos as regras e o material do Jogo das Araras.

Os alunos leram as regras e começaram a jogar. Algumas dúvidas resultantes de interpretação foram esclarecidas, com a insistência da professora em que realizassem uma nova leitura; a presença dela era solicitada constantemente. Não apresentaram problemas em iniciar o jogo e o tempo todo o associavam ao Jogo das Borboletas.

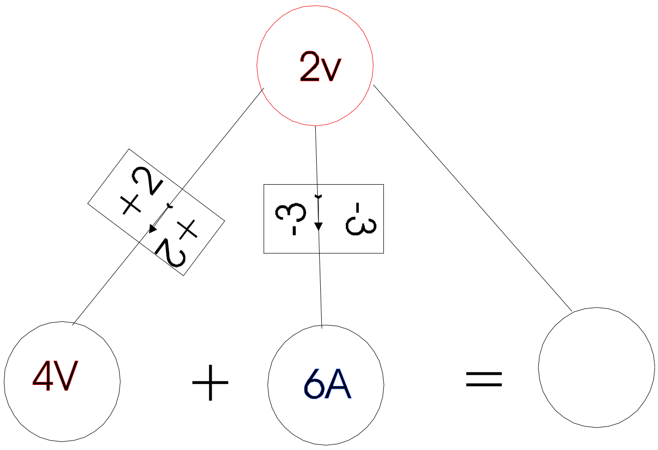
Quando a aula terminou, houve reclamações por parte dos alunos, pois queriam jogar mais, e diziam que o sinal havia batido na melhor parte da aula.

DATA: 10/09/97

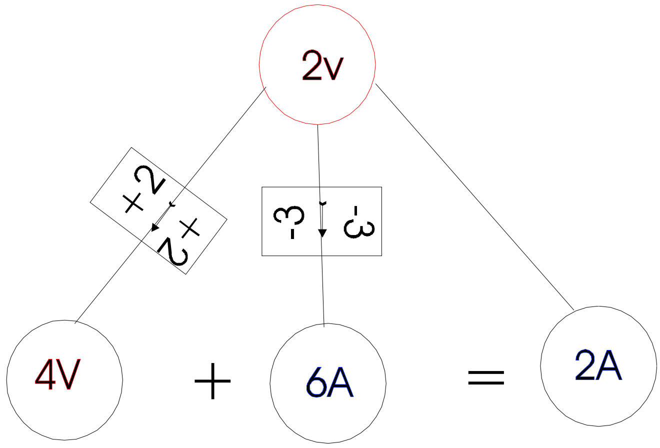
Neste dia os alunos se apresentavam ansiosos para pegar o jogo no carro, e começarem a jogar. Fizeram tudo rapidamente e iniciaram o jogo. Tinham dúvidas sobre quem preencheria a terceira arara branca quando duas já estivessem preenchidas, questão esta esclarecida pelo fato de que o responsável pelo preenchimento da terceira arara, seria o jogador que preenchera a segunda arara, por exemplo: “a Fabiana escolhe uma arara vermelha e nela coloca 2 botões vermelhos, e em seguida põe a carta + 2 sobre a trajetória que liga a arara vermelha escolhida a uma arara branca, obtendo a seguinte situação:



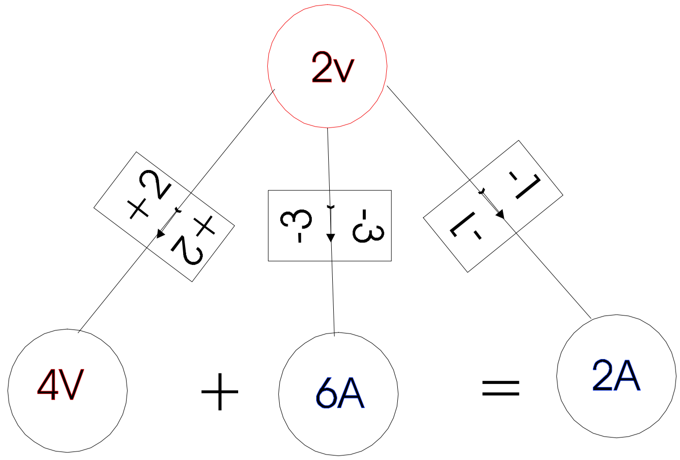
Terminada a jogada da Fabiana, a segunda jogadora, Luana, coloca a carta – 3 na segunda trajetória vaga do circuito (veja desenho abaixo).



Em seguida, a própria Luana deve preencher a terceira arara branca do circuito, como no desenho abaixo:



Ela apenas preenche a arara, pois nessa jogada ela não pode colocar uma carta na última trajetória. Agora a terceira jogadora, Patrícia, fecha o circuito colocando a carta – 1 sobre a trajetória vaga do circuito, resultando:



Caso a jogadora Patrícia não tivesse a carta necessária para fechar o circuito, poderia colocar uma carta em outra trajetória".

À medida que jogavam, solicitavam a presença da professora nos grupos, a fim de que acompanhasse algumas jogadas e verificasse se estavam jogando corretamente.

Ao final dessa aula, todos os grupos preenchiam corretamente a terceira arara branca.

DATA: 12/09/97 e 15/09/97

Aula Suspensa. Motivo: Falta de água na escola.

DATA: 17/09/97 e 19/09/97

Aula Suspensa. Motivo: Projeto Educação Continuada e Reunião de Professores (Conselho).

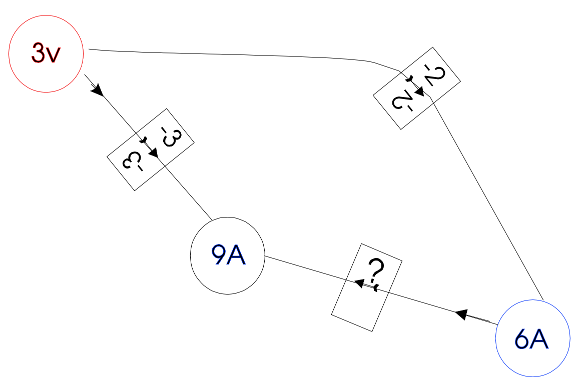
DATA: 22/09/97

Os grupos continuaram jogando e demonstravam facilidade em colocar as cartas nas trajetórias, respeitando as regras do jogo e também em completar as operações entre as araras brancas.

Alguns alunos confundiam a função do curinga nesse jogo com a do curinga do Jogo das Borboletas. No Jogo das Borboletas, o curinga poderia assumir o valor de qualquer carta, já no Jogo das Araras, ele só assumiria valores diferentes das cartas existentes no jogo.

Após algumas leituras da regra e reivindicações dos colegas, todos passaram a utilizar o curinga de forma correta.

Outra dúvida apresentada pelos grupos foi a dificuldade em prever as jogadas: quando um jogador fosse colocar uma carta no tabuleiro, era necessário prestar muita atenção na jogada, para que não impedisse os outros jogadores de fecharem os circuitos, uma vez que entre as quantidades de botões existentes nas borboletas é preciso sempre ter um número inteiro (pois só existem cartas numeradas com números inteiros). Exemplo:



Nesse exemplo acima vemos que o circuito fica impossibilitado de ser fechado, pois não existe nenhum número inteiro que multiplicado por 6 dê 9; nem mesmo o curinga o fecharia, uma vez que ele é válido somente para valores inteiros.

A dificuldade dos alunos estava em ter que prestar atenção em todo o jogo quando fossem jogar uma carta, e não em dizer que não existia nenhum número, no jogo, que multiplicado por 6 dá 9.

Após algumas jogadas, os próprios alunos verificavam cada jogada realizada pelos seus parceiros para que não houvesse erro no jogo.

Alguns alunos diziam: “Professora, esse jogo é muito mais fácil que o Jogo das Apostas! E mais gostoso, também!”.

DATA: 24/09/97

O jogo foi iniciado e, durante toda a aula, os alunos jogaram incessantemente e não solicitavam a presença da professora, mesmo assim a professora percorreu os grupos enquanto jogavam.

DATA: 26/09/97

Nessa aula os grupos continuaram jogando o Jogo das Araras e, no final dela, começaram a demonstrar desinteresse pelo jogo.

E diziam: “Professora! Estamos enjoados e não queremos jogar na próxima aula, mas pelo contrato esse é o último jogo. Então, se não vamos mais jogar iremos fazer o quê? Não diga que não vamos mais poder sentar em grupo e teremos que copiar lição da lousa. Hii!! só falta a aula de Matemática ficar chata!”.

A professora respondeu: “Na próxima aula tudo em sala de aula continuará normal, como dito no contrato, apenas realizaremos uma atividade diferente do jogo, mas igualmente legal. Vocês trabalharão com papel sulfite ao invés do tabuleiro. Tenho certeza de que gostarão.” Em seguida colocou:

“Vamos combinar que na próxima aula, antes de formarmos os grupos menores, formaremos o “grupão” para podermos conversar e esclarecer alguns pontos”.

Todos os alunos concordaram com a professora e assim ficou combinado.

DATA: 29/10/97

Aula Suspensa. Motivo: Curso de Botânica para os alunos.

DATA: 01/10/97

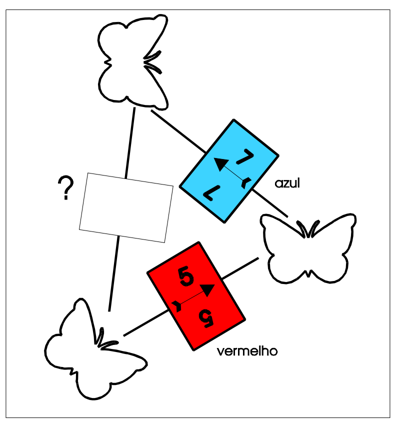
Nesse dia, como combinado anteriormente, encerrou-se a fase dos jogos e a classe formou o “grupão”. A professora iniciou pedindo que um aluno lesse, novamente, em voz alta, os itens 3 (normas) e 4 (avaliação) do contrato de trabalho. Após a leitura, relembrou que eles continuariam sentados em grupo de três ou quatro pessoas; que a avaliação continuaria a mesma, ou seja, que continuariam sendo avaliados diariamente (planilha de notas diária); que as atividades deveriam ser discutidas, conjuntamente, por todos do grupo e que o grupo seria prejudicado pelo não interesse ou interação de qualquer elemento, e também que as atividades seriam executadas em folha de sulfite; cada grupo receberia uma única folha de cada atividade, que seria entregue, diariamente, à professora, para ser corrigida. No dia seguinte seria devolvida, para que o grupo fizesse as correções necessárias e, após isto, as atividades seriam arquivadas na chamada “pasta do grupo” guardada, por sua vez, no armário da sala de Matemática.

Em seguida, perguntou se alguém queria colocar ou perguntar alguma coisa. O aluno Robson perguntou se as atividades em folha de sulfite tinham alguma coisa a ver com os jogos. Ela respondeu que as atividades tinham tudo a ver com os jogos e seriam uma extensão deles.

Então um outro disse: “Vamos começar logo para podermos ver as atividades!”.

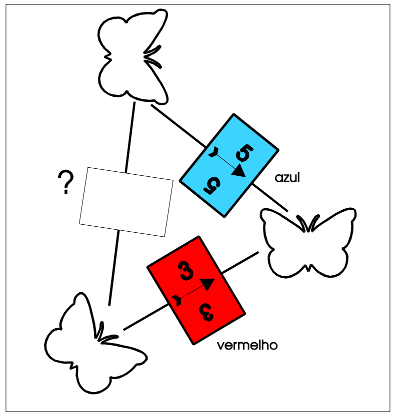
Os alunos estavam ansiosos para iniciar a nova atividade, e não quiseram fazer mais nenhuma pergunta; assim, o grupão foi desfeito e os grupos se formaram. Alguns alunos haviam mudado de grupo (os grupos não eram fixos); a esses foi entregue a primeira atividade de ensino (Atividade 1). Nessa primeira atividade, eram fornecidos seis circuitos do Jogo das Borboletas e pedia-se que esses fossem fechados sem a utilização dos botões, como era feito no jogo. Na atividade 1 não havia cartas com setas invertidas e tanto nessa atividade, como nas posteriores, foram utilizadas cartas com valores maiores que as existentes no jogo (cartas com valores acima de 5). Exemplo:

“Feche o circuito abaixo do Jogo das Borboletas sem utilizar os botões. Não esqueça de colocar a seta, a cor e o número da carta.”



A atividade foi feita muito rapidamente por todos os grupos sem pedir auxílio à professora; ao acabarem, queriam outra atividade com urgência e não tinham paciência de esperar que ela atendesse outros grupos. Havia divergência na resolução: alguns grupos (três) utilizavam a comparação da escada, outros (quatro) procediam da seguinte forma: “5V com 7A dá 2A portanto para fechar o circuito preciso de 2V” e apenas um grupo utilizava a compensação. Logo em seguida, a atividade 2 foi entregue: tratava-se do mesmo conteúdo da atividade

1, com a diferença de que na atividade 2 existiam circuitos com setas invertidas. Exemplo:



Essa atividade também foi feita com rapidez, a resolução dos circuitos que apresentavam cartas com setas invertidas era feita da seguinte maneira: substituíam uma das cartas, como no exemplo acima a carta 5A, por outra com seta e cor contrária e, com essa troca, fechavam o circuito como na atividade 1.

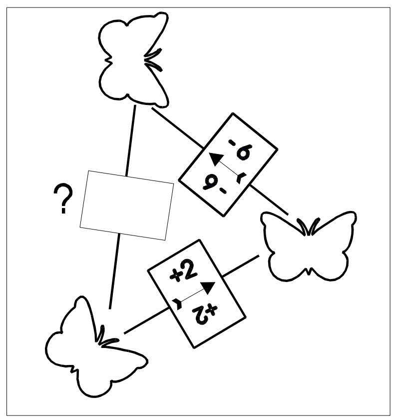
Durante toda a aula, a professora percorria os grupos para acompanhar a execução das atividades, esclarecer dúvidas e verificar o trabalho do grupo, se todos os elementos estavam trabalhando. A verificação era feita da seguinte maneira: A professora, a todo instante, fazia perguntas sobre as atividades aos elementos do grupo, com perguntas individuais, de forma que todos sempre falassem e explicassem a atividade, como por exemplo: “Leopoldo, explique por que, no exercício b) da atividade 2, o circuito foi fechado com essa carta”, ou desenhava no verso da folha outro circuito e pedia que o aluno fechasse o circuito e explicasse como havia feito.

A elaboração das atividades, por parte dos alunos, era mais rápida que o atendimento por parte da professora aos grupos, por isso era preciso mantê-los ocupados com novas atividades, uma vez que se optou por atividades com poucos exercícios, acarretando assim um número maior de atividades.

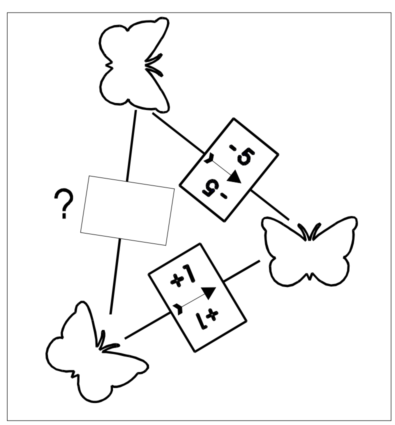
As próximas atividades (atividade 3, 4 e 5) também tratavam do mesmo conteúdo, com a diferença de que as cartas possuíam sinais (versão escolar abstrata) e não mais cor (versão recreativa abstrata); da mesma maneira, na atividade 3 só apareciam cartas com setas no mesmo sentido e nas atividades 4 e 5 apareciam todos os tipos de circuito.

Exemplo da Atividade 3:

“Feche o circuito abaixo do Jogo das Borboletas sem utilizar os botões. Não esqueça de colocar a seta, o sinal e o número da carta.”



Exemplo da Atividade 4 e 5:



Nenhum grupo apresentou problema com a troca das cartas: resolviam as atividades da mesma forma que resolviam as atividades 1 e 2, ou seja, três grupos pela comparação da escada (subi 2 e desci 6, então eu desci 4 e para fechar o circuito preciso subir 4), quatro grupos faziam: " $+2$ com -6 dá -4, portanto para fechar o circuito preciso de $+4$"e um grupo fazia a compensação (para zerar o circuito está faltando a carta $+4$).

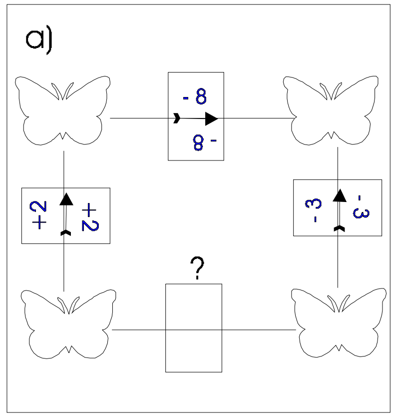
Nessa aula, a professora conseguiu estar com todos os grupos pelo menos uma vez.

Todos participavam dinamicamente e com muito interesse, como faziam com os jogos.

DATA: 03/10/97

Inicialmente a professora entregou aos grupos as atividades da aula passada, devidamente corrigidas. A correção era feita da seguinte maneira: não era atribuída nota na atividade, no exercício errado era colocado um ponto de interrogação; algumas vezes eram feitas observações tais como: "Não estou conseguindo entender qual é o sinal dessa carta!". Com isso os elementos do grupo poderiam discutir o que haviam feito e corrigir seus erros. Após corrigida a atividade, ela era discutida e comentada pelo grupo e pela professora e, em seguida, entregue novamente para ser arquivada na pasta do grupo.

Aos grupos que terminavam a correção era entregue a atividade 6, que abordava problemas de completamento de circuitos com maior número de cartas. A partir da atividade 6 trabalhou-se apenas com cartas com sinais. Exemplo de um circuito:



Inicialmente, ao receberem a atividade 6, os alunos ficavam surpresos por causa do desenho do circuito ser diferente das outras atividades e, num primeiro momento, perguntavam: “Será que saberemos fazer?” e recebiam a seguinte resposta: “Antes de reclamar, pensem e discutam, que eu tenho certeza de que vão chegar a uma conclusão”.

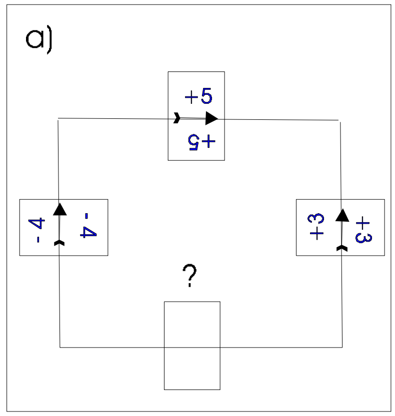
Após discutirem, todos os grupos fizeram a atividade com facilidade, e o procedimento utilizado por eles era o mesmo adotado anteriormente, ou seja:

1)”Subi 5 (+ 2 e + 3) e desci 8, ou seja, desci 3, então para fechar preciso subir 3;”

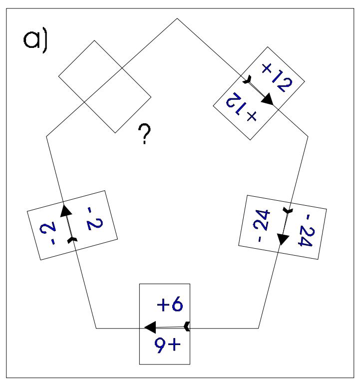
2)”+ 5 (+ 2 e + 3) com – 8 dá – 3, logo a carta é + 3;”

3) “Tenho + 5 e – 8 para compensar preciso de + 3.”

Fizeram também a atividade 7 que nada mais era que uma continuação da atividade 6. Já na atividade 8, houve o desaparecimento das Borboletas no desenho dos circuitos, o que foi notado pelos alunos, mas não interferindo na resolução da atividade. Exemplo da atividade:



Na atividade 8A foi aumentado o número de cartas do circuito; exemplo:



Novamente os alunos resolveram a atividade sem problema, procedendo da mesma maneira como nas atividades anteriores.

No decorrer da aula, a professora percorreu todos os grupos, questionando-os sobre as atividades; sua presença, aliás, era pouco solicitada, a não ser quando terminavam uma atividade. Quando encerrou a aula, apenas três grupos não haviam terminado a atividade 8A.

DATA: 06/10/97

Aula Suspensa. Motivo: Reunião de Pais e Mestres.

DATA: 08/10/97

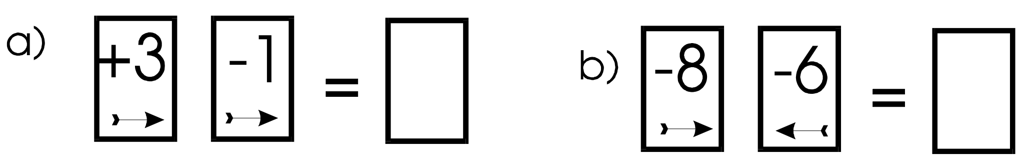
Os grupos receberam as atividades corrigidas e iniciaram sua correções. Não havia muitos erros, uma vez que, para discutir a atividade com a professora, faziam os exercícios cuidadosamente.

Aos grupos que terminavam a correção era entregue a atividade 9. A proposta dessa atividade era diferente das anteriores, uma vez que os circuitos do jogo haviam desaparecido e só restaram as cartas. Nessa atividade os alunos teriam que fazer a composição de duas cartas.

Logo que recebiam a atividade, alguns alunos percebiam a diferença dessa com as demais e diziam: “Olha! agora temos somente as cartas...”, a tais alunos era esclarecido: “Leiam a atividade cuidadosamente e discutam; em seguida, falaremos sobre o que entenderam”.

Exemplo da atividade 9:

“Nessa atividade não teremos mais os circuitos do Jogo das Borboletas, teremos apenas as cartas. Em cada uma das alternativas, substitua (troque) as duas cartas por uma única.”



Após chegarem a uma conclusão, os grupos chamavam a professora e explicavam como iriam fazer a atividade. O procedimento era semelhante ao utilizado nas outras atividades, com exceção de um grupo, ou seja,

1) Os três grupos que utilizavam a comparação da escada resolviam da seguinte maneira: “Subi 3 e desci 1, então eu subi 2, como não preciso mais fechar o circuito a resposta é + 2”;

2) o grupo que realizava a compensação percebeu, sem que a professora falasse, que nesse caso não poderia utilizá-la, pois sem o circuito não precisariam de que a soma das cartas desse zero e deram então a seguinte solução: “Devemos fazer como se fosse o dinheiro do Perdas e Ganhos + 3 (3 azul) com – 1 (1 vermelho) dá + 2 (2 azul)”;

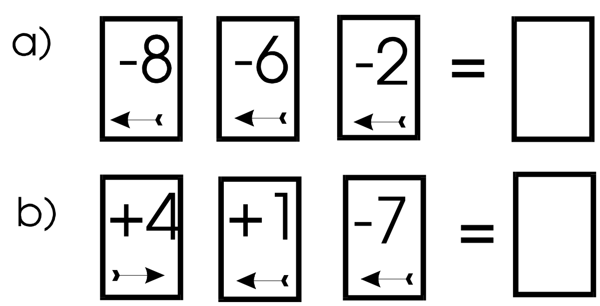
3) os outros quatro grupos: “+ 3 com – 1 dá + 2”.

Nenhum grupo apresentou problemas com as setas das cartas; colocavam a seta da carta resultante no mesmo sentido das outras duas, ou seja, no exemplo *a)* acima, a seta da carta resultante seria: →, e quando havia alguma seta invertida, como no exemplo *b)* acima, trocavam-na por outra com mesmo número mas seta e sinal invertido, ou seja, desse modo o exemplo *b)* poderia ser feito de duas maneiras:

1) Invertendo a carta – 8 e o resultado seria + 2 ← (+ 2 ← = – 2 →);

2) Invertendo a carta – 6 e o resultado seria – 2 → (– 2 → = + 2 ←).

Após a atividade 9 fizeram uma continuação desta, com a atividade 9A. Em seguida fizeram a atividade 9B, que tinha por objetivo a composição, agora, de três cartas. Exemplo da atividade 9B:



Os alunos resolviam essa atividade da seguinte forma:

Para o exemplo *a)* acima:

1) “desci ao todo 16 [(– 8) + (– 6) + (– 2)], portanto a resposta é – 16 ($\leftarrow$).”

ou

1A) “subi ao todo 16 (8 + 6 + 2), portanto a resposta é + 16 ($\rightarrow$).”

ou

2) “– 8 ,– 6 e – 2 dá – 16 ($\leftarrow$).”

ou

2A) “+ 8 ,+ 6 e + 2 dá + 16 ($\rightarrow$).”

para o exemplo *b)* acima:

1) “subi 11 (4 + 7) e desci 1, então eu subi 10, logo a resposta é + 10 ($\rightarrow$).”

ou

1A) “desci 11 (– 4 e – 7) e subi 1, então eu desci 10, logo a resposta é – 10 ($\leftarrow$).”

ou

2) “+ 11 (+ 4 e + 7) com – 1 dá + 10 ($\rightarrow$).”

ou

2A) “– 11 (– 4 e – 7) com + 1 dá – 10 ($\leftarrow$).”

Fizeram também, nessa aula, a continuação da atividade 9B e a atividade 9C.

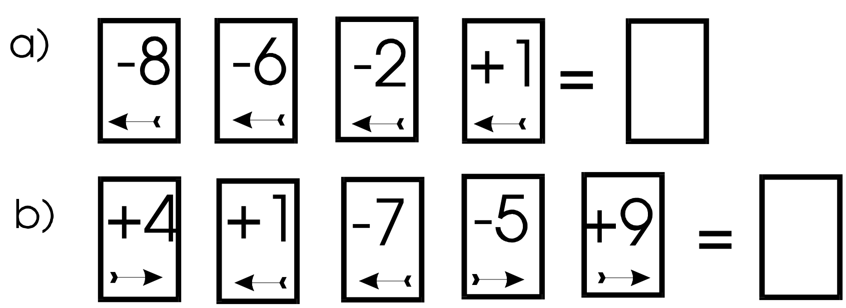
DATA: 10/10/97

Quando professora e alunos chegaram à sala de Matemática, encontraram-na cheia de cadeiras e carteiras velhas, que haviam sido usadas no bingo que a escola promovera, para arrecadação de verbas, como informaram à professora. Mesmo com um espaço limitado, os grupos foram feitos e as atividades foram entregues para correção. Durante este procedimento, a aula foi interrompida pelo diretor da escola, que perguntou à professora se ela podia fazer a gentileza de retirar as carteiras e cadeiras que haviam sido colocadas na sala, após o término do bingo. A professora pediu desculpas ao diretor e, justificando, disse que os alunos estavam em aula realizando atividades e, sendo assim, não poderia interrompê-los. O diretor agradeceu e se retirou da sala de aula.

A interrupção provocou uma pequena quebra no andamento da aula, pois os alunos estavam muito interessados na conversa do diretor com a professora.

Com a saída do diretor os grupos voltaram ao seu trabalho e, terminando a correção, iniciaram a atividade 10, que consistia em exercícios de composição de quatro e cinco cartas.

Exemplo da atividade 10:

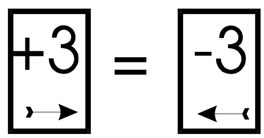


Essa atividade e sua continuação, a atividade 10A, foram feitas com rapidez, até mesmo os exercícios que continham números (valores) elevados.

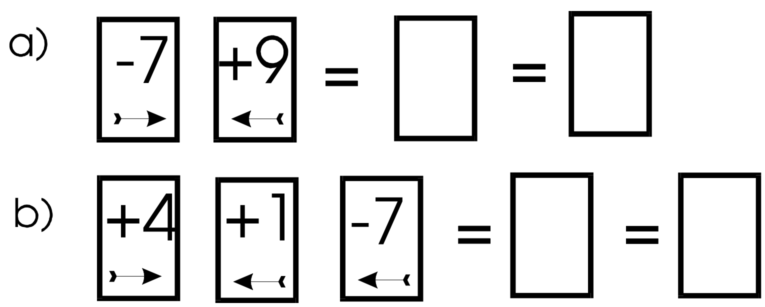
Quando alguns alunos iniciaram a atividade 11, a aula terminou e um deles comentou que não gostava de começar uma atividade e não terminá-la.

DATA: 13/10/97

Inicialmente, após a leitura das notas e algumas correções, alguns grupos recomeçaram e outros iniciaram a atividade 11, cujo objetivo era fazer a composição de duas e três cartas das duas maneiras possíveis. O intuito era salientar a igualdade das soluções, ou seja,

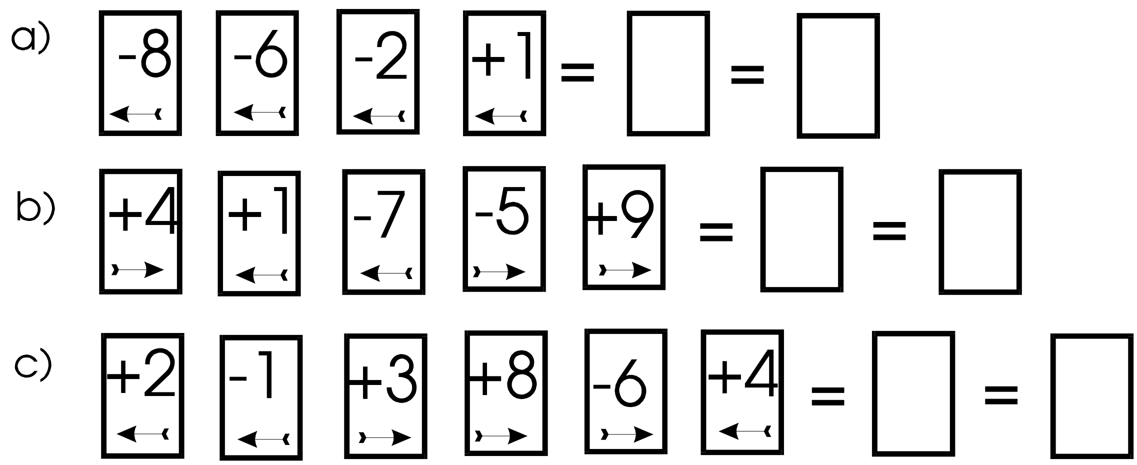


Exemplo da atividade 11:



Antes da leitura do enunciado da atividade, a professora solicitava que o grupo observasse a atividade e dissessem o que achavam que era para ser feito. Todos os grupos, após uma conversa rápida, respondiam que era para dar as duas soluções, ou seja, a solução onde todas as setas estão para a direita e a solução onde todas as setas estão para a esquerda.

Somente depois disso foi entregue e lido o enunciado da atividade 11. Em seguida, fizeram sua continuação, a atividade 11A. As atividades foram feitas com muita rapidez, uma vez que eram muito parecidas com as anteriores, e logo era solicitada outra. Fizeram as atividades 12 e 12A que tinham o mesmo objetivo da 11, porém, com um número maior de cartas (quatro, cinco e seis cartas) e que seriam as últimas atividades com esse objetivo. Exemplo das atividades 12 e 12A:



À medida que o grupos terminavam a atividade 12 e iniciavam a 12A, a professora fazia vários questionamentos, para cada elemento do grupo, sobre as últimas atividades.

DATA: 17/10/97

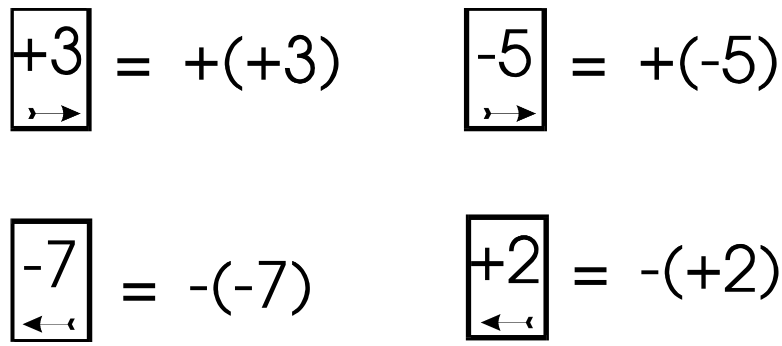
Nessa aula entregou-se, antes da atividade 13, uma folha com a seguinte mensagem:

“Faremos agora uma atividade diferente:

Iremos fazer sumir as cartas e no lugar delas uma notação matemática aparecerá. Vamos aprender como é essa notação!!

Para isso, substituíremos a carta por parênteses, a seta para direita ($\rightarrow$) pelo sinal $+$ e a seta para esquerda ($\leftarrow$) pelo sinal $-$, ambos fora dos parênteses”.

Por exemplo,



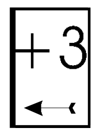
Em seguida foi entregue a atividade 13. Os alunos, ao lerem o enunciado, ficaram impacientes, pois queriam a presença da professora em seus grupos, a fim de que pudessem dizer a ela o que haviam entendido da leitura. Alguns grupos já haviam iniciado a atividade e a estavam cumprindo corretamente, enquanto outros ainda precisaram da presença da professora para iniciá-la. A professora dizia: “Ao invés de ficarmos desenhando a carta a todo momento, iremos escrever essa notação que facilitará muito a escrita”. Apesar de estarem inquietos e afobados, não tiveram dificuldade na substituição e fizeram as atividades 13 e 13A (continuação da 13).

As próximas atividades (14 e 14A) tinham por objetivo trabalhar com as seguintes igualdades: $-(-4) = +(+4)$ e $-(+6) = +(-6)$. Exemplo das atividades 14 e 14A:

“Substitua as cartas, como na atividade 13, completando as igualdades.”

Enquanto os grupos faziam a atividade 14 e 14A a professora percorria os grupos, propondo questões aos componentes, tais como:

“Substitua a carta (abaixo) e explique como você fez”, alertando os grupos que prestassem atenção nas igualdades, pois seriam importantes para a elaboração de futuras atividades.



Ainda nessa aula alguns grupos iniciaram a atividade 15, na qual era solicitado que se substituíssem as cartas das atividades 9, 9C,10 e 11 pela notação matemática. O objetivo dessa atividade era promover a familiarização com a notação matemática usual e com as igualdades:

$$-(-4) = +(+4) \text{ e } -(+6) = +(-6)$$

DATA: 20/10/97

Depois da correção alguns grupos continuaram fazendo a atividade 15, enquanto outros a iniciaram. Nessa aula fizeram também a atividade 16. Exemplo dessa atividade:

“Complete as igualdades: a) $-(-7) =$

b) $-(-23) = ...$”

Como já haviam trabalhado com as igualdades nas atividades 14, 14A e 15, não tiveram problemas em completar as igualdades, e todos os grupos, logo após terem recebido a atividade 16, já a resolviam corretamente, e diziam que a atividade era muito fácil.

A atividade 17 tinha por objetivo trabalhar com a redução a sinais predicativos, que consiste em obter apenas sinais positivos fora dos parênteses, cuja finalidade era chegar à resolução de expressões como: $-(+7) + (-3)$. Exemplo da atividade 17:

"1) Utilizando as igualdades da atividade 16, faça com que nas expressões abaixo tenhamos apenas sinais positivos, do lado de fora do parênteses."

a) $-(-9)+(-12)-(+10)=$

b) $+(+3)-(+19)+(-4)=$

$\vdots$

"2) Agora resolva as expressões acima, utilizando a mudança feita."

Na entrega da atividade 17 pedia-se que ela fosse lida e discutida cuidadosamente. Terminadas a leitura e a discussão, todos os grupos solicitaram a presença da professora, uma vez que se tratava de algo novo para eles. Seis grupos já estavam fazendo a atividade corretamente, mas os outros dois estavam somente utilizando as igualdades e esquecendo dos sinais positivos do lado de fora dos parênteses, ou seja, procediam da seguinte maneira: "$-(-9)+(-12)-(+10)=+(+9)-(+12)+(-10)$".

Quando a professora viu o que estavam fazendo, questionou: "Vocês leram o enunciado? Então me expliquem o que está sendo pedido". Nos dois grupos a reação foi a mesma: um dos elementos do grupo leu novamente o enunciado. Em seguida a professora pediu: "Leia mais uma vez o enunciado para todos". E após a leitura: "O enunciado fala alguma coisa sobre o sinal do lado de fora dos parênteses; vocês sabem de que sinal se trata?". Eles apontaram corretamente o sinal. "O que está sendo pedido em relação a esses sinais?". Resposta do grupo: "Que sejam positivos". Professora: "E na resposta que vocês deram, todos os sinais do lado de fora dos parênteses são positivos?". Todos responderam que não; então pediu-se que pensassem novamente e refizessem a atividade. Depois de um certo tempo chamaram a professora no grupo e perguntaram: "Então, quando já tem sinal positivo do lado de fora dos parênteses não precisamos fazer nada, ou seja, não precisamos mexer no $+(-12)$ da expressão $-(-9)+(-12)-(+10)$, e o resultado é $-(-9)+(-12)-(+10) = +(+9)+(-12)+(-10)$?”. A resposta da professora foi afirmativa.

Depois da explicação a esses dois grupos, todos fizeram corretamente a parte 1 da atividade 17 e iniciaram a parte 2, na qual tinham como missão resolver as expressões que, na parte 1, haviam sido reduzidas a sinais predicativos. Como do lado de fora dos parênteses havia apenas sinais positivos, os grupos fizeram a composição dos números de dentro dos parênteses, como faziam a composição das cartas das atividades de 9 a 12A.

Fizeram também as atividades 17A, 17B e 17C, nas quais era pedido que se resolvessem as expressões como havia sido feito na atividade 17, enquanto a professora percorria os grupos questionando as atividades. Nenhum grupo apresentou problema na resolução dessas atividades, e todos participaram intensamente. Alguns grupos (quatro) perguntaram à professora se a seguinte igualdade era verdadeira: $+(-2) = -2$. A resposta foi afirmativa e explicou que era verdadeira porque a escrita do sinal positivo pode ser omitida, ou seja, pode-se escrever $+7$ ou somente 7, $+(-19)$ ou -19.

Em seguida, um desses grupos colocou esse assunto para o restante da classe.

DATA: 22/10/97

Aula suspensa. Motivo: Reunião na Delegacia de Ensino para o projeto: “Educação Continuada”.

DATA: 24/10/97

Nessa aula, iniciaram-se as correções que tratavam de pequenos erros nas operações efetuadas, tais como:

$+ (-12) - (+19) = + (-12) + (-19) = + (-30)$?? (resposta correta $+ (-31)$).

Em seguida, fizeram a atividade 18, na qual se pedia que o grupo escrevesse como fariam o seguinte exercício:

“Resolva a seguinte expressão: $+ (-5) - (-7) + (+13) - (+9)$.”

Essa atividade tinha o objetivo de fazer com que os alunos chegassem a uma conclusão do que significa resolver uma expressão e como fazê-lo; e depois dessa atividade foram propostas as atividades 18A e 18B, que também consistiam na resolução de algumas expressões.

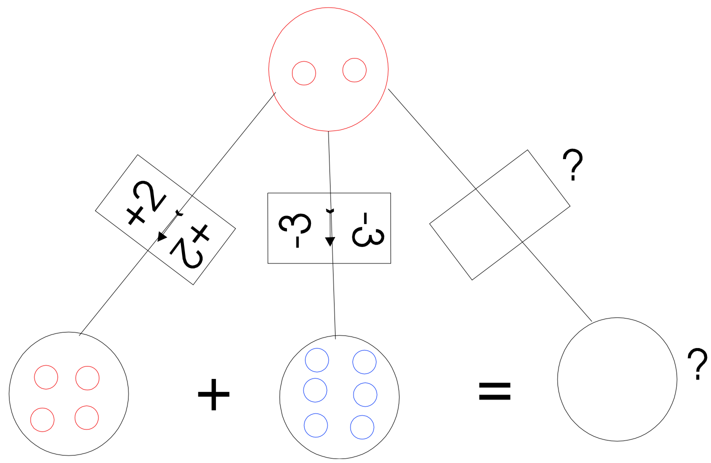
No decorrer da aula, a professora percorreu todos os grupos, questionando os seus componentes a respeito de como resolver uma expressão, de forma que escrevessem e verbalizassem individualmente o que era pedido nas atividades dessa aula.

Como a escrita da atividade 18 foi uma atividade mais demorada, a aula acabou sem que nenhum grupo houvesse iniciado a atividade 19.

DATA: 27/10/97

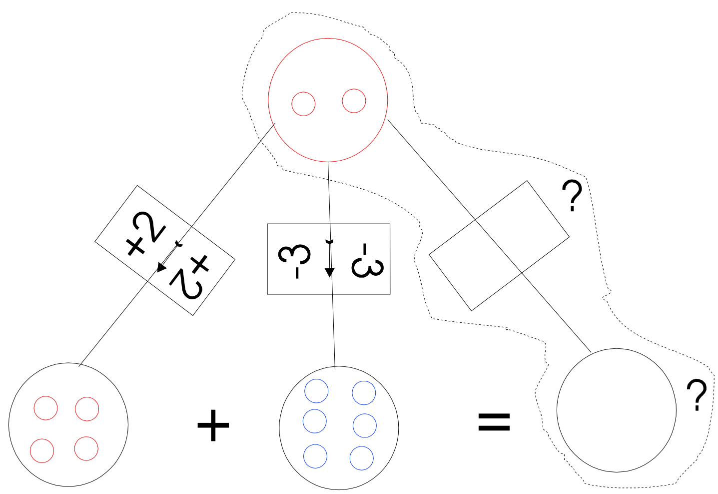
Após a correção foi entregue a atividade, que abordava problemas de completamento de circuitos do Jogo das Araras. Exemplo da atividade 19:

“Complete os circuitos aditivos do Jogo das Araras:”



Os grupos tiveram facilidade em resolver a atividade, pois lembravam muito bem das regras do jogo e a fizeram muito rapidamente, também porque nessa atividade havia apenas quatro circuitos. Logo em seguida, fizeram uma continuação dessa atividade, as atividades 19A e 19B.

Nas atividades, diferentemente da situação do jogo, havia apenas circuitos para se completar o ramo da igualdade, ou seja,



Durante a resolução dessas atividades, seis grupos disseram à professora que não era necessário fazer as contas pelos botões para se achar a carta que fechava o circuito; podia-se achar essa carta através das já existentes no circuito, ou seja, para o exemplo acima, teríamos duas maneiras de achar a carta e a quantidade de botões da arara branca vazia. Para explicar para a professora utilizavam a expressão “pelos botões e pelas cartas”, ou seja:

Pelos botões: 4 botões vermelhos + 6 botões azuis = 2 botões azuis.

Então, a carta que fecha o circuito é – 1, pois

(– 1) x (2 botões vermelhos)= 2 botões azuis ou,

Pelas cartas: (+ 2) + (– 3) = – 1.

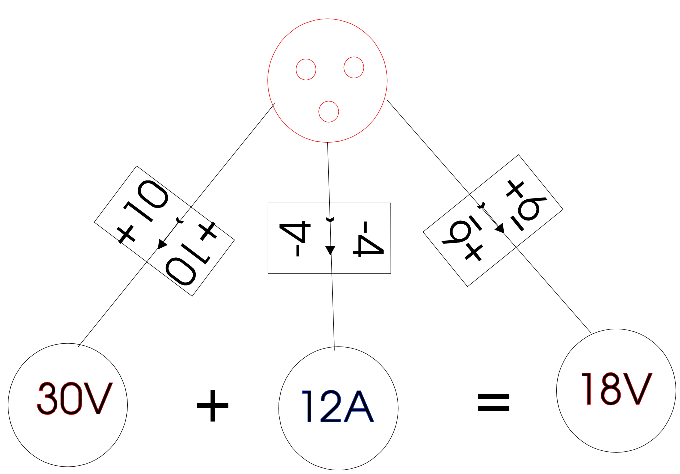
Logo, a carta que fecha o circuito é – 1, portanto a quantidade de botões na arara branca vazia seria de (– 1) x (2 botões vermelhos) = 2 botões azuis.

Ao terminar a explicação para a professora, um grupo disse: “Tanto faz fazermos pelas cartas ou pelos botões, que o resultado é o mesmo”. Todos os grupos salientavam a igualdade das duas formas.

A professora pediu que dois desses grupos colocassem o que haviam dito para os outros dois grupos que não tinham percebido esse fato, e o fizeram pausadamente, sem atropelar os elementos do outro grupo.

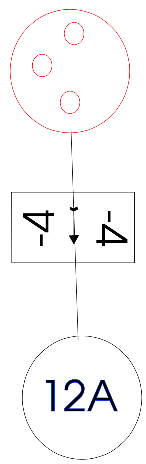
Depois disso foi cumprida a atividade 19C e iniciaram a atividade 19D, que não foi concluída nesse dia.

Nas atividades 19B, C e D, aproveitando a notação dos próprios alunos, quando a quantidade de botões dentro da arara era maior que quatro botões, o desenho desses foi substituído pela “escrita da quantidade”, ou seja,



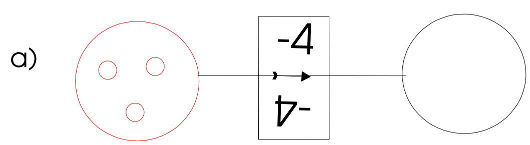
DATA: 29/10/97

Os grupos, nesse dia, terminaram a atividade 19D e, após a correção, iniciaram a atividade 20, onde iriam trabalhar não mais com o circuito todo e sim com um ramo dele, ou seja:



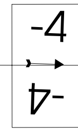
Exemplo da atividade 20:

Resolva:

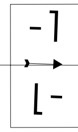


Ao receberem a atividade não apresentaram nenhuma dúvida para resolvê-la, fazendo-a rapidamente. Com isso, logo iniciaram a atividade 20A, que apresentava o desaparecimento das araras no desenho do "ramo do circuito". Exemplo da atividade 20A:

Resolva:

a) (7 botões azuis) 

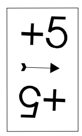
( )

b) (10V) 

( )

Em seguida, completaram a atividade 20B e 20C, em que não havia mais o desenho da trajetória. Exemplo:

Resolva:

a) (2V) X 

=

Nessas atividades alguns grupos (três) já colocavam como resposta o número com o sinal e não mais com a cor, ou seja, para os exemplos a) e b) acima, as respostas desses grupos seriam respectivamente – 28 e – 10. Todos os grupos procediam da mesma maneira para dar a resposta: “5 vezes 2 (ou 2 vezes 5) é 10, como a carta é de ‘mais’ então continua sendo vermelho”, mas para os três grupos mencionados anteriormente, vermelho significa negativo.

A aula terminou sem que os grupos tivessem iniciado a atividade 21.

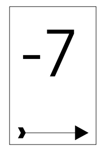
DATA: 31/10/97

Aula suspensa. Motivo: Reunião de Pais e Mestres.

DATA: 03/11/97

Foi entregue aos grupos a atividade 21, em que as cartas eram substituídas por parênteses. Exemplo da atividade:

“Agora substituíremos as cartas por parênteses, ou seja,



= (-7)"

1) *Resolva*

a) (2A) x (– 1) = *n) (32V) x (– 4) =*

b) (6V) x (– 4) = *o) (50A) x (+ 5) =*

⋮

A resolução da atividade foi feita sem problemas, a professora acompanhou e fez perguntas sobre ela a todos os grupos. Na próxima atividade, a 22, as cores foram substituídas por sinais (azul por +, vermelho por –). Exemplo da atividade:

“Agora substituíremos as cores por sinais, ou seja, azul por + e vermelho por –.

(2A) = + 2

(2V) = – 2”

1) Resolva

a) (+ 4) x (– 3) = *o) (0) x (– 9) =*

b) (– 7) x (+ 5) = *p) (+ 5) x (+ 12) =*

⋮

Essa atividade era resolvida da seguinte maneira:

Exemplo a) acima: “4 vezes 3 (ou 3 vezes 4) é 12 e troca o sinal de “mais” porque o 3 é “de menos”, então é – 12”.

Todos os grupos chamaram a atenção da professora para o fato de que poderiam resolver os exercícios de 2 maneiras:

1º) como a enunciada anteriormente;

2º) "4 vezes 3 é 12 e não troca o sinal de menos porque o 4 "é de "mais", então é – 12".

Foi feita também uma continuação dessa atividade, as atividades 22A e 22B. Durante a resolução da atividade 22A, seis grupos disseram à professora que, quando os sinais eram repetidos, a resposta sempre dava "mais" e quando eram diferentes dava "menos". O grupo da Edjane, Tiago, Camila e Francileide disseram o seguinte: "Olha, professora, o que nós descobrimos: se o sinal for repetido como esses", (e apontava para exercício do tipo $(+5) \times (+12)$, $(-3) \times (-9)$) "a resposta é de 'mais' (+), mas se eles não se repetirem como esses", (e apontava para exercício do tipo $(-3) \times (+15)$, $(+5) \times (-2)$) "então é de 'menos' (–). Professora , desse jeito não precisamos mais pensar se troca ou não o sinal".

Foi pedido que o grupo acima, juntamente com os outros, colocassem o que tinham descoberto para os dois grupos que não haviam se manifestado sobre esse fato.

Após darem esta explicação, a professora solicitou que os dois grupos expusessem para ela o que haviam entendido.

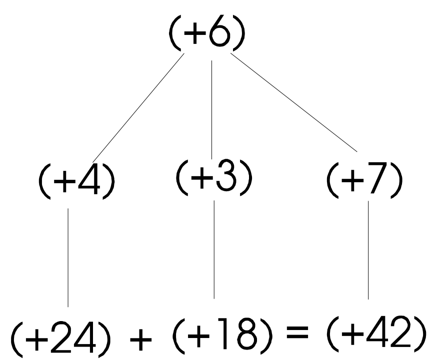
DATA: 05/11/97

Quando a professora entrou na sala de aula, como de costume, os alunos já haviam montado seus grupos; entregou a eles a planilha de notas; em seguida, as atividades para correção. À medida que os grupos terminavam a correção era entregue a atividade 23, cujo objetivo era trabalhar com a propriedade distributiva. Para isso, retornou-se ao circuito do Jogo das Araras. Nessa atividade, foram inicialmente fornecidos como modelo, dois circuitos do

Jogo das Araras (somente circuitos com a operação de adição), com o registro das duas formas de se fechar o circuito do Jogo das Araras, que os próprios alunos chamaram, nas atividades 19, 19A..., de “pelas cartas e pelos botões” e, em seguida, foi dado um circuito para que eles escrevessem as duas formas. Exemplo da atividade 23:

Modelo:

Vejamos o circuito abaixo do Jogo das Araras:



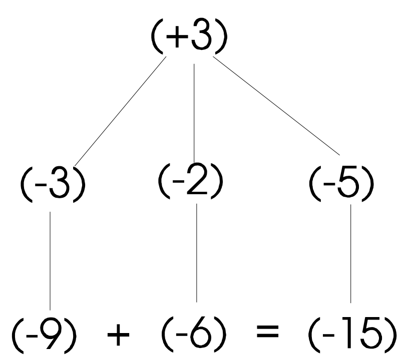
Escrevamos, agora, as duas formas para se fechar esse circuito:

1ª) Pelas cartas: $(+6) \times ((+4) + (+3)) = (+6) \times (+7) = (+42)$

2ª) Pelos botões: $(+6) \times (+4) + (+6) \times (+3) = (+24) + (+18) = (+42)$

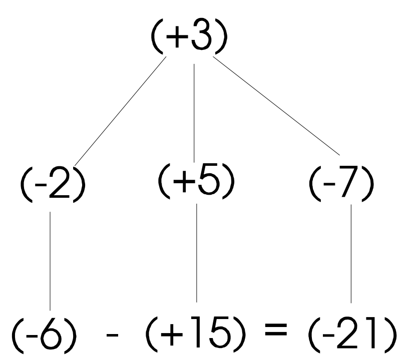
$\vdots$

Faça os exercícios abaixo, seguindo os modelos:



Ao terminarem de ler a atividade os grupos diziam: “Essa atividade é muito difícil, nós não sabemos fazer” e a professora respondia: “Não adianta reclamar e resmungar, pois não aceitarei “não sei” como resposta, tratem de ler novamente, discutir e fazer o exercício proposto. A atividade é simples e eu tenho certeza de que vocês são capazes de fazê-la.” Imediatamente após ouvirem a professora, iniciaram uma leitura e um estudo mais profundo da atividade. Depois de um certo tempo todos os grupos estavam fazendo a atividade corretamente e a professora disse a eles: “Viram como vocês eram capazes de fazer a atividade?”.

Fizeram também a continuação da atividade 23, a 23A e 23B, que nada mais eram que uma continuação das anteriores, agora para circuitos com a operação de subtração, além da 23C, que apresentava os dois tipos de circuitos. Exemplo da atividade 23B:



1ª) Pelas cartas: $(+3) \times ((-2) - (+5)) = (+3) \times (-7) = (-21)$

2ª) Pelos botões: $(+3) \times (-2) - (+3) \times (+5) = (-6) - (+15) = +(-6) -$
$- (+15) = +(-21) = -21$

DATA: 07/11/97

Aula suspensa. Motivo: Reunião na Delegacia de Ensino para o projeto: “Educação Continuada”.

DATA: 10/11/97

Inicialmente a aula foi interrompida pela vice - diretora, que indagou se os alunos podiam preencher um questionário sobre a AIDS, que precisava ser entregue, no mesmo dia, à Delegacia de Ensino. A professora respondeu que se não fosse muito demorado poderiam realizá-lo. A duração do questionário foi de vinte minutos, em seguida, os grupos iniciaram a correção das atividades da última aula e, ao terminarem, iniciaram a atividade 24.

Nessa atividade pedia-se o inverso da atividade anterior, ou seja, que através da escrita das duas formas: “pelas cartas e pelos botões” fosse montado o circuito do Jogo das Araras. Também inicialmente foi dado um exemplo de modelo.

Os grupos tiveram muita facilidade em resolvê-la, e logo iniciaram a atividade 24A (continuação da 24); fizeram também a atividade 25, que englobava exercícios das atividades 23 a 24A.

Quando a aula terminou um grupo comentou: “Nossa, essa aula terminou muito rápido! Fizemos tão pouca coisa!”.

DATA: 12/11/97

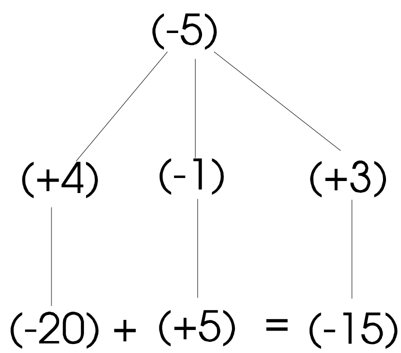
Aula suspensa. Motivo: Enxame de abelhas que atacou alunos e professores.

DATA: 14/11/97

A primeira atividade a ser realizada no dia foi a 26, onde se iria trabalhar com a igualdade das duas formas: “Pelas cartas = Pelos botões”. Para isso era dado um circuito do Jogo das Araras (inicialmente, um modelo) e pedia-se que fosse feita a igualdade. Exemplo da atividade:

Veja o Modelo:

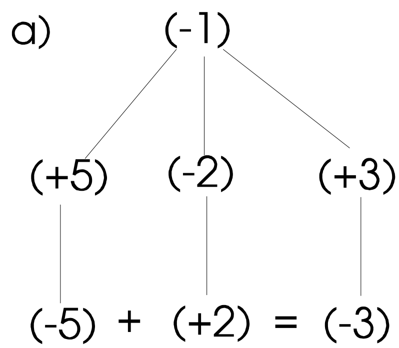
Para o circuito abaixo do Jogo das Araras



Façamos a igualdade: Pelas cartas = Pelos botões, ou seja,

$(-5) \times ((+4) + (-1)) = (-5) \times (+4) + (-5) \times (-1) = (-20) + (+5) + (- -15) = (-15)$

Façamos, agora, a igualdade para os circuitos abaixo:



Fizeram as atividades 26 e 26A (continuação) sem dificuldades, e iniciaram a atividade 27, cujo objetivo era trabalhar com a propriedade distributiva. Nessa atividade não havia mais o circuito do jogo. Exemplo da atividade 27:

Veja o Modelo:

$$(-2) \times ((+4) + (+1)) = (-2) \times (+4) + (-2) \times (+1) = (-8) + (-2) =$$
$$= + (-10) = -10$$

Façamos, agora, os exercícios abaixo:

a) $(+4) \times ((-5) + (+1)) =$

$\vdots$

Foi feita também a atividade 27A (continuação da 27). Foi notado que os grupos fizeram as atividades 27 e 27A em ritmo mais lento, mas não apresentaram dúvidas e, durante as questões propostas pela professora aos componentes dos grupos, todos participaram e tiveram ótimo desempenho.

DATA: 17/11/97

Aula suspensa. Motivo: Passeio dos alunos ao Lago Azul.

DATA: 19/11/97

Nessa aula, quando a professora entrou na sala, os alunos haviam feito o grupão pois queriam combinar um dia para a prova. Após conversarem, a prova ficou marcada para o dia 26/11/97.

O grupão foi desfeito e formaram-se os pequenos grupos. Após a correção, iniciaram a atividade 28, que consistia numa reunião de várias atividades anteriores. Exemplo da atividade 28:

1) *Resolva:*

a) $+(-3)-(+1)=$

b) $+(-7)-(-2)-(+9)=$

$\vdots$

2) *Resolva:*

a) (-5) x $(+4)=$

b) $(+2)$ x $(+3)=$

$\vdots$

3) *Desenvolva e Resolva:*

a) $(-2)\times((+1)+(-3))=$

b) $(+4)\times((-3)+(+2))=$

$\vdots$

4) *Resolva:*

a) $-(-3)+(-2)-(+7)=$

b) $(+4)\ x\ (-2)=$

c) $(-3)\times((+7)-(+3))=$

$\vdots$

A atividade foi muito bem aceita pelos grupos que diziam: "Agora vai ser legal, tem exercício de todo tipo para fazer". Nenhum grupo apresentou problemas com os exercícios das atividades iniciais (composição de operadores aditivos e a multiplicação), e ao terminarem queriam rapidamente outra atividade. Fizeram a atividade 29 que também reunia várias atividades anteriores, com a diferença de que nessa, os exercícios encontravam-se misturados (como na questão 4 da atividade 28). Exemplo da atividade 29:

Resolva:

a) $-(+4)+(-2)=$

b) $-(-3)+(+7)-(+5)=$

c) $(-2)\times((+4)+(-3))=$

d) $(-4)\ x\ (+2)=$

$\vdots$

A aula terminou sem que tivessem iniciado a atividade 29A.

DATA: 21/11/97

Quando a professora chegou à sala de aula, havia um senhor consertando a porta e os ventiladores, e o barulho da furadeira incomodava muito. A professora questionou o funcionário a respeito da demora do trabalho, pois precisava dar aula, mas com o barulho ficava impossível. A resposta foi de que ele iria colocar apenas a porta novamente no lugar e voltaria mais tarde para terminar o serviço. Professora e alunos esperaram cerca de trinta minutos para iniciar a aula, em que os alunos fizeram as atividades 29A e 29B, que consistiam em uma continuação da atividade 29. Alguns alunos estavam preocupados com a prova que iria ocorrer na próxima aula: “A prova vai ser difícil, professora? Será que vamos conseguir nota?”. A professora percorreu todos os grupos fazendo perguntas sobre as atividades e novas questões a cada elemento do grupo.

DATA: 24/11/97

Aula suspensa. Motivo: Reunião na Delegacia de Ensino para o projeto: “Educação Continuada” por disciplina.

DATA: 26/11/97

Todos compareceram para fazer a prova e, ao chegarem, sentaram-se individualmente como combinado.

DATA: 28/11/97

Os alunos chegaram à aula ansiosos para saber a nota que haviam tirado na prova, se o conceito do grupo já havia sido computado e, por fim, a média do bimestre. Sentaram-se em grupo e as provas foram entregues. Solicitou-se que as correções fossem feitas pelo próprio grupo, que discutiria e entregaria a correção de todos os elementos, caso fosse necessário. Durante a correção a professora percorreu os grupos, discutindo os erros cometidos. Os alunos haviam tido um desempenho muito bom na prova: todos acertaram mais de cinqüenta por cento do total.

A correção da prova foi feita durante a primeira aula e na seguinte, foram entregues as notas de grupo de cada indivíduo. As notas dos elementos dos grupos se diferenciavam, pois os grupos não eram necessariamente fixos e a falta era individual. Em seguida foram entregues as médias bimestrais.

Depois de saberem suas notas, a preocupação dos alunos era saber se estavam ou não em recuperação de Matemática. A professora perguntou se não sabiam suas notas dos outros bimestres e eles disseram que haviam esquecido. A professora propôs o seguinte: “Passarei a nota de cada um de vocês, mas caberá a vocês discutirem no grupo se as notas que tiraram é ou não suficiente”. Os alunos aceitaram.

As notas anteriores foram dadas e os grupos iniciaram as discussões. Quando tinham dúvidas chamavam a professora para esclarecê-las.

Naquele dia todos ficaram sabendo quais os promovidos e retidos e a novidade: nenhum aluno ficara para recuperação.

ANÁLISE DA INTERVENÇÃO

Segundo o dicionário Aurélio, temos:

> *Didático: adj. 1. Relativo ao ensino ou à instrução, ou próprio deles. 2. Próprio para instruir; destinado a instruir. 3. Que torna o ensino eficiente. 4. Típico de quem ensina, de professor, de didata.*
>
> *Pedagógico: adj. Da, ou respeitante à pedagogia (Pedagogia: s.f. Conjunto de doutrinas, princípios e métodos de educação e instrução que tendem a um objetivo prático).* (Ferreira, 1988, "grifos nossos")

Durante todo o trabalho buscou-se esclarecer a pergunta diretriz: Qual é a eficácia didático - pedagógica desses quatro jogos? (Jogo das Borboletas, Jogo de Perdas e Ganhos, Jogo das Apostas e Jogo das Araras). Assim, os jogos e as atividades escritas se tornam uma ferramenta didática, e a forma pela qual os aplicamos, um recurso pedagógico com objetivo prático. Neste tópico procurar-se-á traçar um esboço das observações realizadas durante todo o período da intervenção realizada nas salas de aula. Vale salientar que estamos lidando com um objeto amplo, multidisciplinar e complexo, que permite uma vasta gama de interpretações.

O contrato de trabalho

Analisaremos os parâmetros abordados nas intervenções, de modo a procurar avaliar a pedagogia utilizada, os resultados obtidos com a utilização de recursos, tais como a proposta de um contrato de trabalho, a formação de grupos, aplicação de jogos e atividades escritas, e o sistema de avaliação. Será discutida também a reação dos alunos frente às novas propostas didáticas.

A efetivação do contrato de trabalho permitiu o estabelecimento de normas e parâmetros que nortearam o decorrer de toda intervenção, possuindo como característica marcante o caráter democrático que a permeou. O contrato de trabalho foi necessário para que se garantissem os resultados do jogo.

Através dele foram criadas condições para que se definissem e se respeitassem as relações entre os alunos, entre os grupos, entre a docente e os alunos e entre a docente e a escola. O episódio do dia 21/05/97, quando duas alunas chegam atrasadas e são questionadas, pela direção, quanto ao material utilizado em sala de aula, ilustra a importância do contrato de trabalho para respaldar a atuação da professora junto aos pais e à instituição.

> *"...Duas alunas chegaram atrasadas (15 minutos) à aula, e não puderam entrar. Na diretoria, a vice - diretora pediu o caderno delas; elas disseram que a professora de Matemática não utilizava caderno, que apenas jogava. A vice foi perguntar à professora que confirmou utilizar, como o diretor já sabia, um material didático composto por quatro jogos, mas que, se houvesse alguma dúvida por parte da direção e dos pais dos alunos, todos poderiam ver o contrato de trabalho assinado e lido (como esperado) pelos alunos. A professora esclareceu ainda que o conteúdo, a forma de trabalho e a avaliação estavam claramente colocados, além de que, no dia em que esse contrato foi entregue, fora solicitado que, se algum aluno discordasse de algum ponto, poderia se manifestar mas isso não ocorrera. Também foi dito que o contrato foi lido e discutido pela professora e pelos alunos, portanto, quem tivesse dúvida da seriedade do trabalho que estava sendo desenvolvido, poderia assistir à aula. ..."* (21/05/97, p.108)

Salientamos que numa primeira instância, na qual se apresentou o contrato de trabalho, os alunos não opinaram e o acataram sem maiores questionamentos, fato que reflete um hábito de não reflexão por parte do aluno em relação ao que os docentes "impõem". Com o decorrer da intervenção, notou-se que a característica de não participação dos alunos começou a desaparecer e que o interesse foi progressivo, com os alunos discutindo e opinando a respeito das regras dos jogos, do material de confecção e das atividades escritas.

A relação entre o contrato de trabalho e os jogos contribuiu para que os alunos se mantivessem em diálogo com a docente, possibilitando que fossem efetuadas intervenções didático - pedagógicas que surtissem real efeito. As proposições por parte da docente eram assimiladas pelos alunos, que as associavam com o contrato de trabalho, participando junto com a professora da situação de ensino - aprendizagem, denotando uma cumplicidade entre docente - aluno, selada pelo contrato. A seguinte passagem mostra como o contrato possibilitou diluir o individualismo diante da necessidade do grupo continuar jogando.

> *"... O fato do primeiro jogador iniciar com uma quantidade alta de botões na borboleta (dois botões pretos, por exemplo) gerou discussão na maioria dos grupos pois, com isso, a probabilidade de terem circuitos fechados apenas com o curinga aumentava.*
>
> *Para eles, esse jogador estava "travando" a jogada. A professora disse a esses grupos que eles tinham que "entrar em um acordo" e achar uma solução pois, com a discussão eles não estavam jogando, portanto não estavam participando da aula. Com isso, o grupo não teria nota de participação.*
>
> *Alguns grupos (sete) deram a seguinte solução: (...). Os outros grupos (dois) preferiram adotar como regra a seguinte solução: (...).*
>
> *Feito isso, passaram a jogar sem ter problemas no grupo. ..."* (23/04/97, p. 98)

Por outro lado, há o caráter democrático, no qual as opiniões dos alunos passaram a ser valorizadas. Citamos o exemplo de quando os alunos reclamaram do Jogo das Apostas: na aula seguinte a docente apresentou uma versão refeita, com modificações estudadas para sanar as ansiedades exibidas. Isto possibilitou um respeito mútuo, os alunos passaram a ter importância dentro do contexto, com suas opiniões sendo devidamente consideradas pela docente. Assim, suas proposições também ganharam mais receptividade por parte da classe. Vemos isto no episódio ocorrido no dia 01/10 quando, após a releitura do contrato de trabalho, um dos alunos coloca com entusiasmo: *"Vamos começar logo para podermos ver as atividades!"* e o restante da classe se mostra bastante ansioso para iniciar a nova atividade.

Pode-se notar duas fases bem distintas no comportamento dos discentes em relação ao contrato - jogo: em um primeiro instante, houve dúvidas e muitas perguntas quanto ao cumprimento das regras. A partir do momento que as assimilam e passam a jogar, houve uma apropriação das regras por parte deles, com mais autonomia.

Um dos parâmetros apontados no contrato de trabalho foi a formação de grupos de até quatro alunos. Esta forma de trabalho, até então inédita aos discentes, permitiu um contato direto docente - aluno, e a interação dos membros do grupo, com troca de informações e de experiências, além de possibilitar a intervenção didático - pedagógica do professor, que supria as informações solicitadas pelo grupo. Esta característica também possibilitou que cada grupo gerasse seus questionamentos. A cada intervenção em diferentes grupos a docente abordava questões diferentes. O seguinte trecho mostra como o conhecimento existente entre os elementos do grupo pôde ser aproveitado, sem necessidade de explicação da professora.

> *"... A professora, nessa aula, percorrendo os grupos notou que, em todos eles, pelos menos um elemento sabia operar com o zero, o que impedia que a carta zero fosse usada de maneira errada, pois esse elemento não permitia sua utilização em qualquer circuito. Isso gerava discussão nos grupos e constante solicitação da professora. ..."* (25/04/97, p. 99)

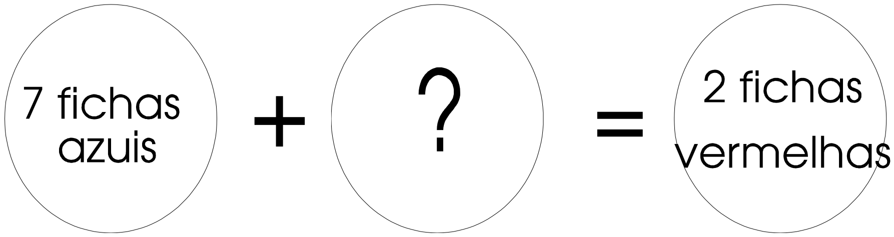
Outro ponto abordado pelo contrato de trabalho foi a avaliação diária dos grupos, que foi de extrema importância para o desenvolvimento progressivo do trabalho, pois à medida que os alunos recebiam a planilha com os pontos já estipulados no contrato, percebiam que seu empenho, sua participação dinâmica, estavam sendo valorizados e que, caso contrário, o baixo interesse e conseqüentemente baixo desempenho também seriam notados. Essa avaliação diária estabeleceu um ambiente de confiança entre alunos - professor, pois perceberam que realmente se tratava de um trabalho idôneo, que o contrato seria cumprido. A assiduidade, como parte integrante da avaliação, contribuiu para que os alunos faltassem muito pouco às aulas, procurando inclusive justificar suas faltas, através de seus pais.

Já a avaliação individual dada aos alunos através de uma prova foi importante porque permitiu ao professor - pesquisador ter o controle dos grupos, ou seja, se os grupos estavam realmente trabalhando em conjunto ou se havia algum aluno que estivesse conseguindo burlar o contrato. Os registros permitiram que o professor tivesse uma visão de como cada aluno progrediu no trabalho.

A correção diária das atividades escritas foi de suma importância para nossa intervenção, pois possibilitou que todas as dificuldades encontradas durante a sua resolução fossem discutidas e resolvidas em cada grupo, possibilitando assim um avanço no desenvolvimento dessas atividades. Isto também reforçou o estabelecimento da relação de confiança, pois os alunos exibiam demasiado interesse em saber se o professor corrigiu ou não as atividades, curiosos quanto aos seus acertos e o porquê de seus erros. Tudo isso possibilitou um contato muito grande entre professor - alunos, debates importantes e maior autonomia dos grupos pois, à medida que o tempo passava, estes se tornavam mais críticos, com maior entrosamento entre seus componentes, fato que gerava boas discussões entre todos.

Durante toda a intervenção a professora - pesquisadora monitorou e orientou os grupos propondo encaminhamentos que eram resolvidos por eles próprios. Sempre que surgiam questionamentos, essas questões eram reformuladas e devolvidas ao próprio grupo, de forma a estimular a criatividade e o espírito crítico dos componentes. Esses encaminhamentos eram reduzidos, de forma a não fornecer respostas prontas aos grupos, e, sim, a induzi-los a responder suas próprias questões, evitando assim o automatismo tão vivido nas escolas hoje em dia. Este fato pode ser observado nas descrições de trabalho em sala de aula, no qual a professora fazia seu encaminhamento, solicitando que os alunos lessem as regras e anotassem suas dúvidas - único ponto a ser discutido posteriormente - pois seria a única forma de aprender a jogar. O seguinte trecho é típico dessa situação:

> Durante o Jogo das Apostas alguns grupos apresentaram dúvidas ao realizarem a seguinte operação:



> *"... Esta dúvida foi resolvida pelo próprio grupo quando a professora questionou o que estava sendo pedido. Eles responderam que precisavam achar uma quantidade que, juntando com 7 azuis, resultasse em 2 vermelhos. "E para isso, como devo pensar?", perguntou a professora. "Ah! tenho que acrescentar alguma coisa que pague os 7 azuis, para que esse desapareça, e ainda sobrem 2 vermelhos. Lógico! tenho que colocar 7 vermelhos mais os 2 vermelhos, ou seja, 9 vermelhos". Apenas com essa intervenção, os grupos não apresentaram mais problemas com a adição. ..."* (11/08/97, p. 120)

A postura de respeito assumida pela docente, prontamente aceitando as sugestões e críticas dos alunos em relação aos jogos e às atividades escritas, como por exemplo no caso da mudança no Jogo das Apostas, possibilitou o desenvolvimento da auto - estima dos alunos e do interesse deles em participar de toda a situação de aprendizagem, pois suas opiniões eram de grande importância para o desenvolvimento da intervenção[1], estabelecendo mais uma vez uma relação de cumplicidade na sala de aula. Essa postura é vista também no dia 16/06/97:

O seguinte trecho mostra que o contrato ofereceu contraste e, talvez, solução, ao estado de depredação sistemática em que vivem as escolas públicas:

> *"... No final da aula, uma aluna sugeriu que cada grupo tivesse seu material fixo e que, se alguma coisa acontecesse ao material, a responsabilidade seria do grupo. A professora e o resto da classe aceitaram sua sugestão e combinaram que na próxima aula os materiais seriam marcados com um número e cada grupo teria o seu. ..."* (18/06/97, p. 112)

Graças ao fato das atividades escritas serem dirigidas aos grupos, sempre houve a possibilidade de que um ou mais componentes dos grupos não

---

[1] Um dos objetivos gerais de Matemática para o ensino fundamental, enunciado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), é levar o aluno a sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto - estima e a perseverança na busca de soluções.

participasse efetivamente da resolução do problema proposto, deixando a maior parte do trabalho sob a responsabilidade dos colegas. Para coibir essa atitude, a professora - pesquisadora, seguindo o contrato, assumiu a postura de sempre estar dirigindo questões sobre a atividade a membros aleatórios do grupo, e caso algum aluno demonstrasse estar alheio ao processo que estava sendo desenvolvido pelo grupo, o conceito baixo seria destinado ao grupo todo. Essa atitude fazia com que todos se empenhassem conjuntamente, buscando soluções e respostas para as questões propostas.

As questões feitas aos elementos do grupo, variavam desde perguntas sobre como estavam sendo resolvidas as atividades, até as justificativas de tal resolução e outros exercícios - semelhantes aos que estavam sendo propostos nas atividades - que eram resolvidos e justificados pelo aluno. Não se cobravam respostas certas ou erradas do aluno mas sim, uma participação efetiva nas decisões e resoluções do seu grupo.

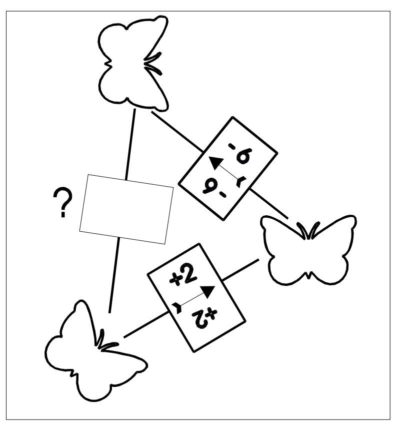
Com a cobrança realizada pela professora, assegurada pelo contrato de trabalho, de que os alunos trabalhassem em grupo e mantivessem uma postura de participação ativa e de autonomia em relação ao conteúdo, o trabalho apresentou um ganho muito importante, com os alunos passando a ter reações e comportamentos diferentes dos habituais, tais como o fato deles próprios assumirem a tarefa de buscar o jogo no automóvel da docente, a fim de agilizarem a tarefa e aproveitarem ao máximo o tempo disponível para jogar. Aceitavam trocar de sala de aula, quando necessário, e tomavam as decisões em relação à distribuição espacial dos grupos na sala. O fato dos alunos tomarem suas próprias atitudes e decisões mostra um interesse que não se observa nas aulas tradicionais.

> *"... Quando a professora entrou na sala de aula,* ***como de costume****, os alunos já haviam montado seus grupos; entregou a eles a planilha de notas; em seguida, as atividades para correção. ..."* (05/11/97, p. 156)

O objetivo didático

Esse comportamento se deve à junção do jogo ao contrato de trabalho. Com todos esses procedimentos pedagógicos os jogos sem dúvida se tornaram uma excelente ferramenta didática. Os jogos foram elaborados e reelaborados de modo que os alunos pudessem resolver em ação as quatro perguntas: Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes? Resolver em ação foi entendido como significando proporcionar aos jogadores um conjunto de atividades de caráter recreativo nas quais as quatro perguntas citadas aparecessem sob forma de situações - problema grupais. Procuraremos mostrar como essas perguntas foram vivenciadas na sala de aula durante a fase do jogo.

A primeira pergunta: Como tirar o maior do menor? apareceu pela primeira vez na versão abstrata do Jogo das Borboletas, quando os grupos precisaram fechar o circuito sem lançar mão dos botões. Veja abaixo um exemplo:



“+ 2 seguido de – 6 quanto dá?”

Inicialmente os alunos tiveram uma certa dificuldade para resolver essa situação - problema. Mas quando foram instigados pela professora a jogar, começaram a discutir entre eles para conseguirem uma resposta para essa situação. Três grupos responderam: *"Vamos imaginar uma quantidade de botões na borboleta"*, mas esta estratégia foi reprimida pela professora da seguinte forma: *"Vocês não podem usar nem pensar nos botões! Usem outra estratégia. Os botões não existem mais"*. Após discutirem, um grupo lançou uma nova maneira de se fechar o circuito:

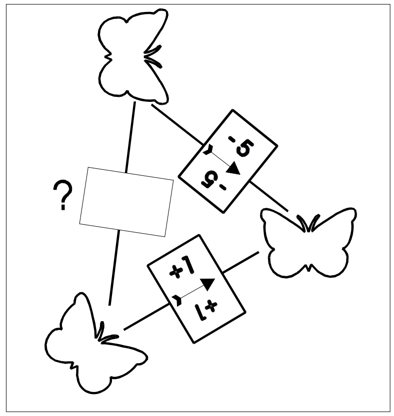
> *"... É preciso compensar, ou seja, o número de vermelhos e azuis tem que ser o mesmo". A professora pediu que eles mostrassem no tabuleiro. "Por exemplo, professora, se há no circuito (abaixo) 3 azuis e 2 vermelhos, para compensar o número de vermelhos, falta 1 vermelho, logo, é essa carta que fecha o circuito. ..."* (05/05/97, p.102)

E para os grupos com dificuldade a professora fez um encaminhamento através de uma comparação:

> *"... Se o circuito fosse uma escada, e tivéssemos que descê-la dois degraus (no caso, a carta vermelha) e posteriormente subi-la três degraus (representados pela carta azul), essa ação seria equivalente a quê? Ao invés de ficarmos subindo e descendo o que poderíamos fazer para chegar onde chegamos? ..." (05/05/97, p. 104)*

Em seguida, pediu para que o primeiro grupo socializasse sua estratégia com os demais. Encontrada uma solução para o problema, todos a utilizaram no jogo facilmente.

A segunda pergunta: Como subtrair um negativo? também apareceu, pela primeira vez, sob forma de situação grupal na versão abstrata do Jogo das Borboletas, quando precisaram resolver circuitos da seguinte forma:



"+ (+ 1) – (– 5) quanto dá?"

Essa situação é resolvida pelos grupos trocando-se a carta invertida (por exemplo – 5) por outra carta de mesmo valor, mas com sinal contrário e seta invertida. Alguns grupos, ao invés de substituírem a carta invertida por outra resolveram, para não mexer nas cartas do jogo, que iriam fechar o circuito imaginando a carta a ser invertida, com seta e sinal contrários. Isso gerou inicialmente uma certa dificuldade para alguns alunos, pois imaginar a carta e realizar a composição era um processo inicialmente complicado para eles. Pensavam da seguinte forma:

> *"Subi 3 (agora inverto essa carta) então subirei mais 5, logo subi 8. Então devo descer 8 para fechar o circuito."*

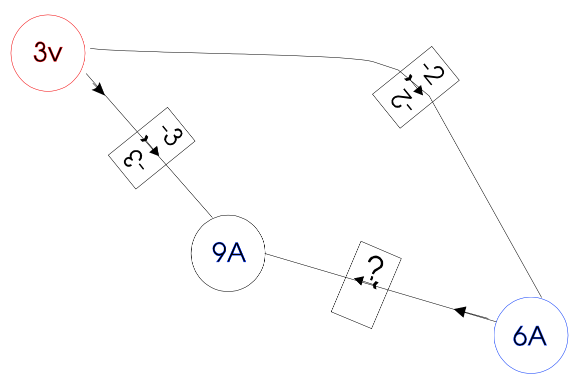
O fato de estarem acostumados à automação levava alguns, ao concluírem seus pensamentos, a confundir para que lado a seta apontaria. Mas, à medida que jogavam, essa dificuldade foi desaparecendo e, mais uma vez eles conseguiram dar uma solução para a situação - problema que se originou durante o jogo.

A pergunta como subtrair um negativo apareceu pela segunda vez no Jogo de Perdas e Ganhos. Esse raciocínio foi vivido em ação grupal, quando num determinado momento do jogo, ao retirar um cartão de sorteio, um jogador A, devia passar a outro jogador B, uma certa quantia em dinheiro vermelho. O debate que se instalava entre os jogadores evidenciava a situação - problema. Com a insistência por parte da professora que a instrução do cartão fosse cumprida, os grupos terminavam dando a seguinte solução: *"o jogador A faz um empréstimo, contrai uma dívida com o banco e transfere essa dívida ao jogador B"* e ficavam surpresos com a constatação: *"Ele acaba saindo ganhando!"*. Com isso resolveu-se o segundo problema, agora conservando o sentido de tirar.

Com o passar do tempo os jogadores não realizavam mais empréstimos ao banco, procedendo da seguinte maneira ao se deparar com a situação acima: *"O banco dava R$10,00A ao colega da esquerda (ou direita) no caso onde o cartão mandava que os R$10,00V fossem entregues ao banco, ou o jogador, que retirou o cartão, dava R$10,00A ao colega no outro caso".*

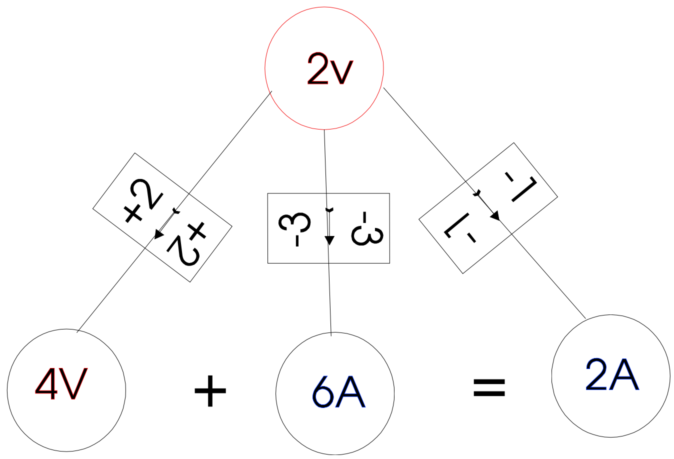
Resolveu-se assim o seguinte teorema em ação: Retirar uma dívida é dar um ganho.

O terceiro problema: Por que menos por menos dá mais? não foi vivenciado durante a fase do jogo, uma vez que a composição desejada se encontrava nos circuitos multiplicativos do Jogo das Araras (abaixo) e para completá-los, os alunos o faziam através dos botões e não das cartas. Portanto, em nenhum momento do jogo, ocorreu a composição de dois operadores negativos.



Nessa fase eles apenas vivenciaram um operador negativo atuando sobre um estado negativo, portanto, trabalharam com a composição de um operador multiplicativo com um operador troca de sinal. Essa vivência com o operador troca de sinal foi de suma importância para a posterior aprendizagem durante a fase das atividades escritas, onde eles finalmente concluíram que menos por menos dá mais.

Já a quarta pergunta: O que significa menos vezes? apareceu, no circuito aditivo (abaixo) dos Jogo das Araras, quando os alunos faziam a composição das cartas. Exemplo:



Ou seja, para o circuito acima temos "+ 2 vezes" mais "– 3 vezes" igual a "– 1 vez", identificando o inteiro negativo com o operador composto, formado pelo operador multiplicativo natural seguido do operador troca de sinal.

Porém, o fato dos alunos anteriormente terem jogado o Jogo das Apostas, que foi elaborado para facilitar esses cálculos, e também a imposição de que o segundo jogador a preencher o circuito deveria também preencher a terceira arara branca (para que tivéssemos apenas números inteiros), fizeram com que os alunos, durante a fase do jogo, fizessem sempre os cálculos através das araras, e não através das cartas.

Com os jogos elaborados dessa forma tínhamos um objetivo. Pretendíamos, pela estrutura do jogo, transferir ao estudante a responsabilidade da situação de aprendizagem, e também responder as questões do problema didático já citado acima.

Sobre a pedagogia

Para a realização do nosso objetivo foram discutidas, no capítulo Trajetória de Pesquisa, as questões sobre como instituir os jogos na sala de aula de Matemática e como passar deles para o conhecimento formal. Para estas questões obtivemos três respostas de caráter normativo. A meta a ser atingida agora é mostrar como foi desenvolvida esta questão durante a intervenção.

O binômio contrato de trabalho - jogo proporcionou a efetivação da primeira resposta de caráter normativo, que reza que *"as leis da sala de aula e da escola devem abrir o espaço da paixão pelo jogo que se quer instituir"* (Baldino & Cabral, 1993). Assim, pôde-se observar o interesse dos alunos no desenrolar do jogo, com um ambiente de total liberdade, o que permitiu que a paixão pelo jogo não fosse podada. Este é um fato que pode ser observado na fala dos alunos - *"Que jogo legal!", "Não acredito, já acabou a aula!?", Não vai ter mais jogo? Hii!! só falta a aula de Matemática ficar chata!"* e em manifestações, como quando os alunos quiseram reproduzir o jogo para brincar em suas casas.

A segunda resposta de caráter normativo, que diz que *"as ações vividas, suscitadas pelo jogo, devem-se integrar no processo didático geral, como base para futura abstração"* (Baldino & Cabral, 1993), foi desenvolvida satisfatoriamente, pois todas as respostas, observações, dúvidas, propostas e comentários gerados a partir do desenrolar do jogo pelos alunos, voltavam em forma de encaminhamentos e atividades escritas, de modo a conduzir a intervenção de forma mais adequada à realidade vivida na sala de aula. Os alunos eram levados a abstrair os conceitos das operações que eles próprios estavam gerindo e a obter suas próprias respostas. Isto pode ser notado, por exemplo, na páginas 151 e 156, onde lemos:

> *"... Nas atividades 19B, C e D, aproveitando a notação dos próprios alunos, quando a quantidade de botões dentro da arara era maior que quatro botões, o desenho desses foi substituído pela "escrita da quantidade..."* (27/10/97, p. 151)

> *"... Nessa atividade, foram inicialmente fornecidos como modelo, dois circuitos do Jogo das Araras (somente circuitos com a operação de adição), com o registro das duas formas de se fechar o circuito do Jogo das Araras, que os próprios alunos chamaram, nas atividades 19, 19A..., de "pelas cartas e pelos botões" e, em seguida, foi dado um circuito para que eles escrevessem as duas formas. ..."* (05/11/97, p. 156)

Para a terceira resposta de caráter normativo - *"A passagem do jogo ao saber formalizado, deve se fazer pela suspensão da paixão do jogo através da fase lúdica, substituindo o jogo por seu modelo, registrando as operações e impondo os significados culturais estabelecidos"* (Baldino & Cabral, 1993) - optou-se pela introdução das atividades escritas. As atividades escritas foram elaboradas, inicialmente extraindo-se recursos dos jogos e posteriormente reduzindo-se as implicações do jogo, sendo que os elementos concretos destes foram progressivamente substituídos por um modelo abstrato (sem o jogo). Utilizou-se para a elaboração de algumas atividades escritas, como dito anteriormente, a linguagem dos alunos.

Essas atividades foram aplicadas de forma que se mantivesse o interesse dos alunos pelo trabalho desenvolvido, gerado pela combinação jogo - contrato de trabalho, criando assim, um novo ambiente, no qual as atividades escritas tornaram-se uma "forma diferente" de jogar.

As atividades

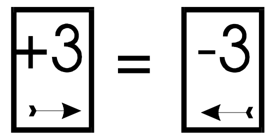
Durante a intervenção, as atividades escritas iniciaram-se com exercícios de completamento de circuitos, da versão abstrata do Jogo das Borboletas. Nas duas primeiras utilizamos cartas da versão recreativa e, a partir da terceira, apenas cartas da versão escolar, de modo que os alunos já fossem se familiarizando com a notação matemática. Nessas atividades eles não apresentaram dificuldade. Nas próximas atividades escritas trabalhou-se com circuitos maiores, ou seja, com mais de três cartas (quatro e cinco), portanto, com desenhos diferentes. A partir da oitava atividade omitiu-se o desenho das borboletas no circuito para que, aos poucos, o concreto fosse desaparecendo. Inicialmente, os alunos ao receberem a primeira dessas atividades mostraram-se apreensivos e disseram: *"Será que saberemos fazer?",* mas foram assim interpelados pela professora: *"Antes de reclamar, pensem e discutam, que eu tenho certeza que chegarão a uma conclusão"*. Essa conclusão foi alcançada pelos grupos sem problemas e com certa rapidez.

Nas atividades posteriores suprimiu-se algo de mais concreto - os desenhos dos circuitos - obtendo-se assim, apenas o desenho das cartas. O objetivo dessas atividades era que fosse realizada a composição dos operadores através das cartas, o que foi atingido satisfatoriamente pelos grupos que forneceram a seguinte resposta:

> *"... 1) Os três grupos que utilizavam a comparação da escada resolviam da seguinte maneira: 'Subi 3 e desci 1, então eu subi 2, como não preciso mais fechar o circuito a resposta é $+2$';*
>
> *2) o grupo que realizava a compensação percebeu, sem que a professora falasse, que nesse caso não poderia utilizá-la, pois sem o circuito não precisariam de que a soma das cartas desse zero e deram então a seguinte solução: 'Devemos fazer como se fosse o dinheiro do Perdas e Ganhos $+3$ (3 azul) com -1 (1 vermelho) dá $+2$ (2 azul)';*
>
> *3) os outros quatro grupos: '$+3$ com -1 dá $+2$'. ..."* (08/10/97, p. 139)

Portanto, sete grupos continuaram utilizando a mesma estratégia que utilizavam no fechamento do circuito. Apenas um grupo produziu uma nova estratégia para o problema proposto, uma vez que a antiga não se adequava. Para isso utilizaram o Jogo de Perdas e Ganhos, mostrando que eles não estavam presos somente a um jogo. Todas as respostas dadas pelos grupos vieram do que foi vivido durante os jogos, o que nos mostra uma apropriação e transporte, por parte deles, das estratégias anteriormente desenvolvidas.

A composição foi realizada, inicialmente, com duas cartas, e depois com até seis cartas. Em algumas delas (atividades finais) trabalhou-se também a igualdade das soluções para salientar que:



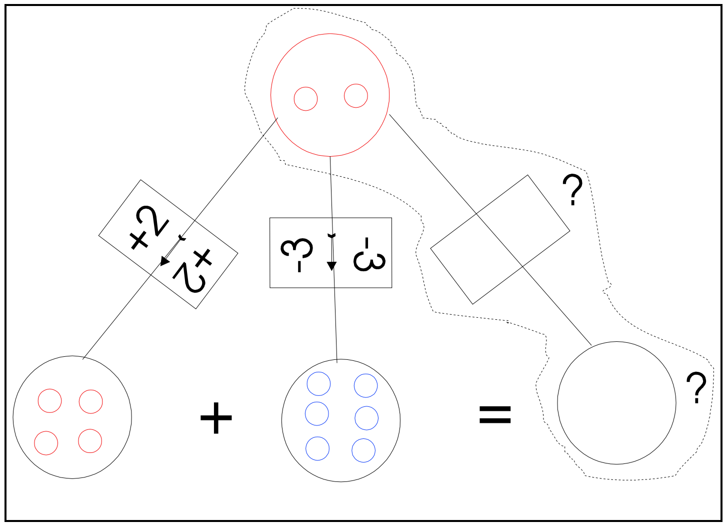
Em seguida, substituímos as cartas por parênteses e a seta por sinais, de forma a introduzir a notação matemática desejada, ou seja, $-(-3)$; trabalhamos com as igualdades $-(-4) = +(+4)$ e $-(+6) = +(-6)$ e por fim chegamos à resolução de expressões como: $-(+7) + (-3)$, através da redução a sinais predicativos, o que consiste em obter apenas sinais positivos do lado de fora dos parênteses, da seguinte maneira:

$$-(+7) + (-3) - (-8) = +(-7) + (-3) + (+8) = +(-10) + (+8) = +(-2) = -2.$$

Após realizarem a redução a sinais predicativos, faziam a composição dos números inteiros sem nenhuma dificuldade, pois era o mesmo que realizar a composição das cartas. Além disso, alguns grupos concluíram a igualdade $+(-2) = -2$.

Continuando com as atividades escritas recorremos aos circuitos do Jogo das Araras. Nessas, os alunos iriam fechar circuitos aditivos como no Jogo das Borboletas.

Os grupos tiveram facilidade em resolver as atividades, pois se lembravam muito bem das regras do Jogo das Araras. Durante a primeira atividade seis grupos concluíram que:



"... não era necessário fazer as contas pelos botões para se achar a carta que fechava o circuito, podia-se achar essa carta através das já existentes no circuito, ou seja, para o exemplo ao lado, teríamos duas maneiras de achar a carta e a quantidade de botões da arara branca vazia. Para explicar a professora utilizavam a expressão "pelos botões e pelas cartas", ou seja:

Pelos botões: 4 botões vermelhos + 6 botões azuis = 2 botões azuis.

Então, a carta que fecha o circuito é − 1, pois

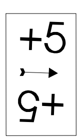
(− 1) × (2 botões vermelhos) = 2 botões azuis ou,

Pelas cartas: (+ 2) + (− 3) = − 1

Logo, a carta que fecha o circuito é − 1, portanto a quantidade de botões na arara branca vazia seria de (− 1) × (2 botões vermelhos) = 2 botões azuis.

Ao terminar a explicação para a professora, um grupo disse: 'Tanto faz fazermos pelas cartas ou pelos botões, que o resultado é o mesmo". Todos os grupos salientavam a igualdade das duas formas'. ..." (27/10/97, p. 150)

Nas próximas atividades escritas os alunos iriam trabalhar não mais com todo o circuito aditivo, e sim com um ramo dele. Na segunda dessas atividades houve o desaparecimento das araras no desenho do circuito, e na terceira e quarta, não havia mais o desenho da trajetória, desaparecendo assim, aos poucos, o aspecto concreto. Nessas últimas atividades, três grupos já colocavam como resposta o número com o sinal, e não mais com a cor. Exemplo:

a) (2V) X  =

"... Todos os grupos procediam da mesma maneira para dar a resposta: "5 vezes 2 (ou 2 vezes 5) é 10, como a carta é de 'mais' então continua sendo vermelho", mas para os três grupos mencionados anteriormente, vermelho significa negativo (− 10). ..." (29/10/97, p. 153)

Em seguida, foi realizada a substituição da carta por parênteses e das cores por sinais, ou seja, para o exemplo acima teríamos: $(-2) \times (+5)$. Obtendo, assim, a notação matemática usual. Todos os grupos disseram à professora que essa atividade poderia ser feita de duas maneiras. Por exemplo para $(+4) \times (-3) = ?$ teríamos

> *1º) "4 vezes 3 (ou 3 vezes 4) é 12 e troca o sinal de "mais" porque o 3 é "de menos", então é − 12;*
> *2º) 4 vezes 3 é 12 e não troca o sinal de menos porque o 4 "é de "mais", então é − 12."* (31/10/97, p. 155)

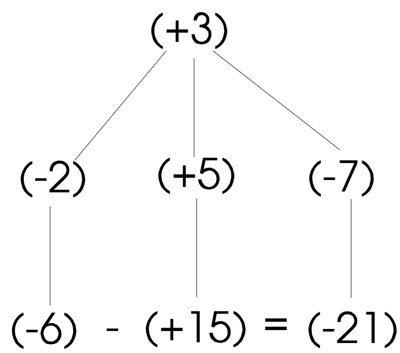
Ou seja, a comutatividade da qual seria necessário partir, na sugestão de Freudenthal, foi obtida em ação. Além disso, durante a resolução das atividades seis grupos disseram à professora:

> *"... que, quando os sinais eram repetidos, a resposta sempre dava "mais" e quando eram diferentes dava "menos". O grupo da Edjane, Tiago, Camila e Francileide disseram o seguinte: "Olha, professora, o que nós descobrimos: se o sinal for repetido como esses", (e apontava para exercício do tipo $(+5) \times (+12)$, $(-3) \times (-9)$) "a resposta é de 'mais' (+), mas se eles não se repetirem como esses", (e apontava para exercício do tipo $(-3) \times (+15)$, $(+5) \times (-2)$) "então é de 'menos' (−). Professora , desse jeito não precisamos mais pensar se troca ou não o sinal. ..."* (03/11/97, p.155)

Após darem esta explicação, pediu-se que um dos grupos expusesse para o restante da classe o que haviam concluído. As próximas atividades tinham por objetivo trabalhar a propriedade distributiva. Para isso, utilizou-se a conclusão dada pelos alunos nas atividades de completamento de circuitos aditivos, do Jogo das Araras, ou seja, a igualdade da operação realizada através dos botões e das cartas (enunciada anteriormente).

Inicialmente os alunos se mostraram arredios, pois diziam ser a atividade muito difícil. Mas recebiam a seguinte resposta da professora: *"Não adianta reclamar e resmungar, pois não aceitarei 'não sei' como resposta, tratem de ler novamente, discutir e fazer o exercício proposto. A atividade é simples e eu tenho certeza de que vocês são capazes de fazê-la"*. Imediatamente após ouvirem a professora, iniciaram uma leitura e um estudo mais profundos da atividade. Depois de um certo tempo, todos os grupos estavam fazendo as atividades corretamente e a professora disse a eles: *"Viu, como vocês eram capazes de fazer a atividade?"*.

Esse episódio mostra a importância pedagógica de um desafio adequado, nem além, nem aquém do que os alunos podem alcançar. Nas primeiras atividades trabalhou-se a escrita da operação, realizada para obter a quantidade de botões desejada, através das cartas e dos botões, ou seja:



1ª) Pelas cartas: $(+3)\times((-2)-(+5))=(+3)\times(-7)=(-21)$

2ª) Pelos botões: $(+3)\times(-2)-(+3)\times(+5)=(-6)-(+15)=+(-6)-$

$-(+15)=+(-6)+(-15)=+(-21)=(-21)$

Em seguida, trabalhou-se a igualdade das formas, pelas cartas e pelos botões, ou seja, a lei distributiva: $(+3)\times((-2)-(+5))=(+3)\times(-2)-$ $-(+3)\times(+5)=(-6)-(+15)=+(-6)-(+15)=+(-21)=-21$.

Nas atividades finais, os alunos aplicavam a lei distributiva sem recorrer visualmente ao circuito do Jogo das Araras. As últimas atividades, realizadas com os grupos, consistiam numa reunião de várias atividades anteriores e abordavam a composição de números inteiros, a multiplicação de números inteiros e a propriedade distributiva. As atividades foram muito bem aceitas pelos grupos que diziam: *"Agora vai ser legal, tem exercício de todo tipo para fazer"*. Nenhum grupo apresentou problema com os exercícios das atividades iniciais e, muito menos, com os das finais.

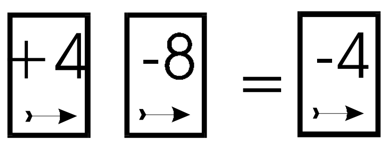
O cumprimento dos objetivos

Com o término da etapa das atividades escritas, foi aplicada uma prova individual que abordava exercícios das últimas atividades. Todos os alunos tiveram excelente desempenho.

Com os fatos relatados até o momento, pudemos concluir que, da maneira que foi realizada a intervenção, o nosso objetivo foi atingido. Vejamos por que:

Nosso objetivo, como dito anteriormente, era transferir ao estudante a responsabilidade da situação de aprendizagem e também responder as questões do problema - didático.

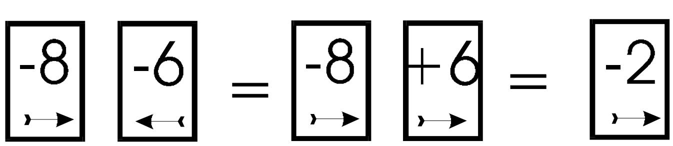
O primeiro problema: Como tirar o maior do menor? foi resolvido pelos próprios alunos ao fornecerem respostas para a composição das cartas do Jogo das Borboletas, ou seja,



E formalizado ao resolverem expressões como

$+ (+ 4) + (- 8) = + (- 4) = - 4$

O segundo problema: Como subtrair um negativo? Foi resolvido em três oportunidades, quando os alunos jogaram Perdas e Ganhos e concluíram que: “Retirar uma dívida é dar um ganho”; quando realizaram a composição das cartas:

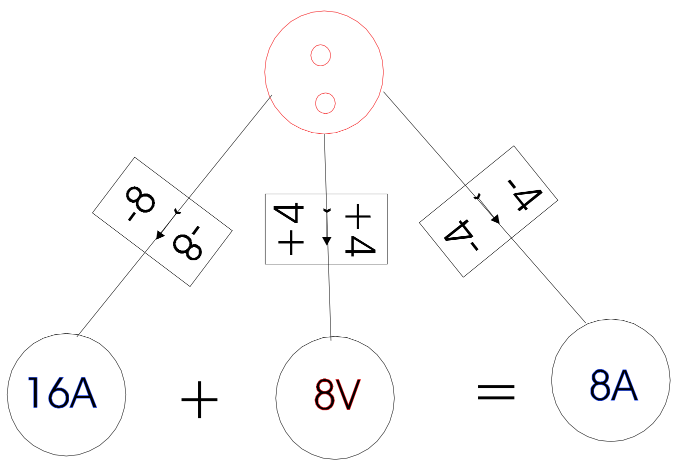


e, finalmente quando resolveram expressões como:

$+ (-8) - (-6) = + (-8) + (+6) = + (-2) = -2$, agora já formalizadas.

O terceiro problema: Por que menos por menos dá mais? os alunos o resolveram quando passaram a enunciar, sem sugestão da professora, que: *"Quando os sinais eram repetidos, a resposta sempre dava "mais" e quando eram diferentes dava "menos", portanto, desse jeito, não precisavam mais pensar se trocavam ou não o sinal"* e quando passaram a resolver exercícios como: $(-3) \times (-4) =$ $= + 12$ sem utilizar o operador troca de sinal.

O quarto problema: O que significa menos vezes? os alunos resolvem quando nas atividades de completamento de circuitos aditivos do Jogo das Araras passam a resolver o circuito pelas cartas e não pelos botões. Exemplo:



"$(-8) + (+4) = (-4)$"

Formalizam a solução nas atividades que envolvem a distributiva realizando a seguinte operação:

Pelas cartas: $(+6) \times (\,\mathbf{(+2)} - \mathbf{(+5)}\,) = (+6) \times (-\mathbf{3}) = -18$, ou seja, "2 vezes menos 5 vezes são menos 3 vezes".

Portanto, conseguimos através da pedagogia e da ferramenta didática utilizada, transferir a responsabilidade da aprendizagem ao aluno para que respondesse os quatro problemas didáticos; conseguimos também, que essa transferência fosse realizada em um ambiente prazeroso e de total cooperação tanto entre aluno e professor, quanto entre os alunos.

DISCUSSÃO DOS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Freudenthal (1983), como vimos anteriormente, termina o capítulo de sua obra propondo que se ensinem as regras das operações com inteiros sob o argumento de que elas são quase nada, comparadas com as regras que uma criança tem que aprender para conquistar as operações aritméticas por coluna. E acrescenta que o método mais eficaz de “programar o aprendiz” (programme the learner, sic) é com essas regras, porque o ensino dos números negativos para ser bem sucedido, deve levar ao automatismo.

Como professores de Matemática sabemos que o argumento citado por Freudenthal, em prol do ensino das regras, não é válido. Ensinar regras, na escola atual, não é mais suficiente para que a aprendizagem ocorra. Portanto, esse não pode ser o método **mais** eficaz para o ensino dos números inteiros e, além disso, nossa pesquisa aponta o contrário. Mais de que sua eficácia para o ensino de números inteiros - discutida no capítulo 8 - onde o aluno não é “programado”, e sim responsabilizado pela sua aprendizagem, de maneira a se envolver integralmente no processo de ensino - aprendizagem, o método em questão não leva ao automatismo[25], uma vez que após o processo de abstração reflexiva (Piaget, 1976), o aluno utiliza os conceitos aprendidos[26] com muita naturalidade, sem se dar conta em que momento aprendeu o quê.

Ao contrário das soluções clássicas para o ensino dos números inteiros, nossa pesquisa não está fundamentada em torno de significantes tais como instrução, visualização, explicação, convencimento, automatização, extensão, regras, modelo, e sim de significantes como cumplicidade, interesse, desejo, ação, experimentação, responsabilidade, participação, devolução, transferência,

---

[25] Estamos utilizando aqui o seguinte conceito de automatismo: Prática de atos sem orientação consciente por parte daquele que os executa (FERREIRA, 1988).
[26] Essa discussão será feita na p. 197.

descobertas, reflexão, abstração, que através da associação do jogo com o contrato de trabalho[27] (seriamente cumpridos) foi possível obter.

As estratégias didáticas centradas na idéia de ensino, como por exemplo o ensino de regras, já foram muito criticadas:

> *"Frente a objeções que surgem em oposição a 'situações de ensino', principalmente após certas tentativas denominadas de reformas formalistas, buscou-se na medida do possível transformar situações de ensino em 'situações de aprendizagem'. "* (Brousseau, 1988, p. 324)

A estratégia didática que originou a nossa pesquisa está baseada em uma concepção de aprendizagem segundo Brousseau: *"A aprendizagem se faz pela experimentação de concepções sucessivas, provisórias e relativamente boas, que é necessário rejeitar sucessivamente ou retomar, numa verdadeira nova gênese de cada vez"*. (Brousseau, 1983, p. 171)

De acordo com a teoria de situações de Brousseau (1983), durante toda a intervenção, organizamos o ambiente de sala de aula em uma situação na qual as concepções com inteiros puderam ser exercitadas, além de outras concepções, tal como o conceito do número zero, até então praticamente desconhecido para alguns alunos. O que permitiu efetivarmos essa organização foi:

- A estrutura dos jogos e das atividades escritas, que foram projetados para que as concepções com inteiros fossem trabalhadas;
- A postura da professora em sala de aula realizando encaminhamentos que propiciaram a experimentação, a rejeição e a retomada de concepções;
- A divisão da sala de aula em grupos, que através das discussões, das conclusões realizadas pelos elementos do grupo, favoreceu a experimentação, a rejeição e a retomada de concepções;

---

[27] O contrato de trabalho (Cabral, 1992) desenvolvido com os alunos encontra-se no Volume do Professor, p. 108.

- O entusiasmo dos alunos que, à medida que jogavam se aprofundavam e se interessavam, cada vez mais, pelas regras do jogo;
- A cumplicidade (professor - aluno) que se instalou durante a intervenção, devido à realização de um trabalho no qual os alunos eram diariamente avaliados enquanto grupo e enquanto indivíduo, proporcionando uma busca e um desafio constante pela aprendizagem.

No caso das concepções com inteiros podemos lembrar que, para realizar a composição de operadores aditivos durante a fase do jogo, os alunos tiveram que abandonar muitas concepções, tais como lançar mão do preenchimento das borboletas como ferramenta para fechar o circuito. Houve uma relutância em abandonar o que antes dava certo, sempre com insistência em justificarem suas afirmações a partir das noções que deviam ser deixadas de lado[28]. É preciso rejeitar certas concepções porque elas não funcionam bem, porque levam a erro, porque ao justificar suas afirmações desse modo, o sujeito sofre uma rejeição por parte do outro, para quem exerce sua justificação. *"Os erros (...) são o efeito de um conhecimento anterior que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que, agora, se revela falso ou simplesmente inadaptado"* (Brousseau, 1983, p. 171), um exemplo de que essa rejeição por parte do outro é importante é o episódio, já citado acima, da dificuldade de alguns alunos para utilizarem a carta zero.

> *"... Uma outra dificuldade da maioria dos grupos foi a de trabalhar (operar) com o zero: eles acreditavam que o zero era como um curinga, ou seja, tinha a mesma função no jogo. ..."* (23/04/97, p. 99)

Após vivenciarem e exercitarem a questão através das jogadas realizadas e de encaminhamentos realizados pela professora:

> *"... Eles respondiam: 'Para sair de dois e chegar em dois eu não posso somar e nem subtrair nada. Ah! lógico, agora é o zero'.*
>
> *Como em toda aula eram jogadas várias partidas, **os alunos passaram, através do impedimento do colega, a prestar atenção quando colocariam ou não a carta zero** no jogo, e a formar o conceito do que isso representava para eles.*

[28] Maiores informações sobre esse episódio estão descritas no capítulo 7, p. 101-104.

Esses ***alunos começaram a encarar tal dificuldade como uma desvantagem no jogo, o que lhes proporcionou uma busca para resolvê-la.***

No final da aula, todos estavam utilizando a carta zero sem problemas e sem discussões. ...” (25/04/97, p. 100)

Portanto, durante toda a aplicação, ao rejeitarem as antigas concepções, as novas passaram a ser exercitadas, e muitas retomadas foram feitas até que a aprendizagem ocorresse:

“... Os alunos continuaram jogando a versão abstrata recreativa do Jogo das Borboletas. Alguns deles diziam que essa versão era mais difícil do que a outra, pois tinham que pensar mais. ...” (12/05/97, p. 106)

“... Todos os grupos trabalhavam bem com a carta zero nesse estágio do jogo. Três grupos (da Camila, da Fabiana e do Leopoldo) apresentavam dúvidas em saber qual a carta que fecharia o circuito quando havia uma seta invertida. ...” (14/05/97, p. 107)

“... Os alunos continuaram jogando a versão escolar abstrata nessa aula. Inicialmente, a professora percorreu os grupos que apresentaram dificuldades durante a aula passada. Esses e os demais jogavam sem problemas. ...” (19/05/97, p. 107)

Os exemplos acima demonstram, também, a nossa crença de que *“o conhecimento dos jogadores ocorre nas estratégias de jogo, nos meios desenvolvidos para vencê-lo ou no aperfeiçoamento das chances de ganhá-lo”* (Brousseau, 1988, p.14). Nos trechos a seguir podemos ver a obtenção, durante o Jogo de Perdas e Ganhos, do segundo problema didático: Como tirar o maior do menor.

“... Os alunos iniciaram jogando Perdas e Ganhos. (...). A dificuldade maior dos alunos era interpretar o cartão que diz o seguinte: “retire R$10,00V de seu colega à esquerda (ou direita)”, quando esse colega não tinha os 10V. Após a insistência por parte da professora que o cartão tinha que ser cumprido, todos os grupos disseram que era necessário fazer um empréstimo do banco para que o colega tivesse 10V para ser retirado. Após efetuarem o que o cartão pedia, ficavam surpresos, porque o colega que não tinha os 10v acabava saindo ganhando. ...” (16/06/97, p. 111)

“... Os alunos continuaram jogando Perdas e Ganhos, sem nenhuma dificuldade. Executavam sem problemas o que era pedido no cartão de sorteio. ...” (18/06/97, p. 112)

“... A execução dos cartões, a negociação de dinheiro com o banco, a construção de casas, tudo isso ficava muito mais rápido e hábil à medida que continuavam a jogar.

Para executar o cartão: "Retire R$10,00V de seu colega à esquerda (ou direita) e entregue-os ao banco (ou fique com eles)", quando esse colega não tinha os 10V, não realizavam mais empréstimos do banco. Procediam da seguinte maneira: o banco dava R$10,00A ao colega da esquerda (ou direita) no caso onde o cartão mandava que os R$10,00V fosse entregue ao banco, ou o jogador, que retirou o cartão, dava R$10,00A ao colega no outro caso. ..." (23/06/97, p. 114)

Com essa estratégia didática conseguimos atingir nossa pretensão, enunciada anteriormente: transferir ao estudante não somente a responsabilidade da situação de aprendizagem, mas também, a responsabilidade de responder as questões do problema didático[29].

Além da fundamental associação - jogo e contrato de trabalho - outro fator que possibilitou atingir nosso objetivo foi a ida à sala de aula já com um material intencionalmente planejado, que possuía em sua estrutura toda a informação didática necessária[30].

Essa intencionalidade planejada pode ser vista nos critérios normativos[31], no contrato de trabalho, na estratégia didático - pedagógica utilizada na intervenção e nos pressupostos teóricos dos jogos. A importância dos três primeiros itens, para o nosso trabalho, já foi discutida no capítulo 8. Vamos nos deter, nesse momento, na importância dos pressupostos teóricos dos jogos.

O fato de iniciar a intervenção com o objetivo - fundado no conceito de devolução de Brousseau (1988) - de responsabilizar o aluno pela situação de aprendizagem, de forma que esse aceitasse, por si mesmo, as conseqüências dessa transferência, possibilitou-nos a obtenção de um objetivo (uma meta) a ser atingido, durante a intervenção, que resultou na adoção de uma pedagogia

[29] Discutida no capítulo anterior.

[30] Acreditamos que uma situação de ensino - que desencadeie o processo de produção de significado - não possa estar totalmente depurada da informação desses significados.

[31] Os critérios normativos apresentados inicialmente no capítulo 2 são: 1) As leis da sala de aula devem abrir o espaço da paixão pelo jogo que se quer instituir; 2) As ações vividas, suscitadas pelo jogo, devem-se integrar no processo didático geral, como base para futura abstração;. 3) A passagem do jogo ao saber formalizado deve-se fazer pela suspensão da paixão do jogo através da fase lúdica, substituindo o jogo por

em sala de aula (uma postura) muito bem definida; proporcionou um ambiente de cumplicidade, de responsabilidade, de cooperação e, proporcionou também o surgimento de vários teoremas em ação (Vergnaud, 1982) que possibilitaram responder as quatro questões do problema didático. Podemos exemplificar alguns desses momentos com os seguintes fatos que ocorreram durante a intervenção:

1) Para garantir que os alunos não perdessem o entusiasmo pelo jogo, ao encontrar o primeiro obstáculo, a postura adotada pela professora é a de investir no prazer despertado pelo jogo[32] e instigá-los a jogar e, com isso, responsabilizá-los pela procura de uma solução:

> *"Houve uma certa demora e inquietação. Alguns alunos diziam: 'É muito difícil, professora!'. Para que os grupos* ***não se desmotivassem****, a professora estimulava: '****Vocês querem jogar, não querem? Então vamos pensar'.***
> *De imediato, três grupos solicitaram a professora. Todos eles tinham o objetivo de* ***dar a seguinte solução****: ..."* (05/05/97, p. 102)

2) Um exemplo de cumplicidade e de cooperação aparece no dia 21/05/97. Os alunos aceitaram de tal forma a transferência de se responsabilizar pela situação que já assumiam também, a adaptação inicial dos

alunos ingressantes:

> *"... Uma aluna nova (Luciana) iniciou nesse dia. O grupo da Fabiana, Geronice e Francileide pediu que ela fizesse parte de seu grupo,* ***encarregando-se de ensinar as regras do jogo à nova colega****.* ***Quando a professora foi solicitada, a aluna já estava jogando sem dificuldades****. ..."* (21/05/97, p. 108)

3) *O s*urgimento de inúmeros teoremas em ação:

---

seu modelo, registrando as operações e impondo os significados culturais estabelecidos (Baldino & Cabral, 1993).

[32] Estamos aqui utilizando a primeira resposta de caráter normativo: As leis da sala de aula e da escola devem abrir o espaço da paixão pelo jogo que se quer instituir (Baldino & Cabral, 1993).

*"... Pouco tempo depois, os grupos chamaram a professora para dar-lhe a resposta e lhe disseram, mostrando os passos no tabuleiro: "Se eu tenho que tirar 10 fichas azuis de 15 fichas vermelhas, então eu empresto 10 fichas azuis e 10 fichas vermelhas e coloco-as junto com as 15 fichas vermelhas na posição D, (...). A professora questiona: "**Mas eu posso colocar na posição D as 10 fichas azuis e as 10 fichas vermelhas, sem alterar as 15 fichas vermelhas?**". Os alunos responderam prontamente: **'Pode, professora, pois as 10 fichas azuis com as 10 fichas vermelhas não representam nada, pois uma paga a outra, como no Jogo de Perdas e Ganhos; logo, não vai mudar nada**'. ..."* (11/08/97, p. 121)

*"... **Esta dúvida foi resolvida pelo próprio grupo quando a professora questionou o que estava sendo pedido**. Eles responderam que precisavam achar uma quantidade que, juntando com 7 azuis, resultasse em 2 vermelhos. "E para isso, como devo pensar?", perguntou a professora. "Ah! tenho que acrescentar alguma coisa que pague os 7 azuis, para que esse desapareça, e ainda sobre 2 vermelhos. Lógico! tenho que colocar 7 vermelhos mais os 2 vermelhos, ou seja, 9 vermelhos". Apenas com essa intervenção, os grupos não apresentaram mais problemas com a adição. ..."* (11/08/97, p. 120)

*"... Ao terminarem de ler a atividade os grupos diziam: "Essa atividade é muito difícil, nós não sabemos fazer" e a professora respondia: "Não adianta reclamar e resmungar, pois não aceitarei "não sei" como resposta, tratem de ler novamente, discutir e fazer o exercício proposto. A atividade é simples e eu tenho certeza que vocês são capazes de fazê-la." Imediatamente após ouvirem a professora, iniciaram uma leitura e um estudo mais profundo da atividade. **Depois de um certo tempo todos os grupos estavam fazendo a atividade corretamente** e a professora disse a eles: "Viram como vocês eram capazes de fazer a atividade? ..."* (05/11/97, p. 157)

Durante os Pressupostos Teóricos planejou-se também, devido à análise das intervenções anteriores[33], que a aplicação dos jogos se dividiria em duas situações: situação a - didática e situação didática. Na primeira situação, os jogos seriam aplicados por seu próprio fim e, como o próprio nome diz, sem nenhuma intervenção de ensino; na segunda, o jogo seria suspenso e teria vez um contrato didático, no qual seriam trabalhadas atividades baseadas nos jogos.

Através desse planejamento poderíamos atender alguns objetivos importantes. O primeiro deles seria a efetivação das respostas de caráter normativo, dadas no capítulo Trajetória de Pesquisa, para a instituição desses jogos na sala de aula de Matemática:

> *"1) As leis da sala de aula e da escola devem abrir o espaço da paixão pelo jogo que se quer instituir; 2) As ações vividas, suscitadas pelo jogo, devem-se integrar no processo didático geral, como base para futura abstração; 3) A passagem do jogo ao saber formalizado deve-se fazer pela suspensão da paixão do jogo através da fase lúdica, substituindo o jogo por seu modelo, registrando as operações e impondo os significados culturais estabelecidos."* (Baldino & Cabral, 1993)

O segundo objetivo seria a coerência da aplicação com a nossa crença, já enunciada anteriormente, de que "*o conhecimento dos jogadores ocorre nas estratégias de jogo, nos meios desenvolvidos para vencê-lo ou no aperfeiçoamento das chances de ganhá-lo*" (Brousseau, 1988, p. 14), ou seja tínhamos que reservar um momento inicial no qual prevalecesse a paixão pelo jogo, onde os alunos iriam buscar soluções para as situações - problema que surgiam por serem de seu interesse para completar os jogos e não porque o professor as pedia. Outro ponto importante foi a reflexão de como faríamos a passagem da situação a - didática para a didática sem que houvesse uma ruptura que acarretasse o desinteresse dos alunos durante a situação didática. Essa passagem deveria ser feita de forma que os registros se tornassem apenas uma "forma diferente" de jogar, estaríamos então na fase lúdica do jogo (Baudrillar, 1991).

Ao planejarmos a divisão da intervenção em duas situações (didática e a - didática) preocupamo-nos em relacioná-las com o seguinte questionamento: "No dias de hoje não adianta estarmos preocupados em ensinar um conhecimento, como por exemplo números inteiros, para o aluno. É necessário mais, é necessário que o conteúdo ensinado passe a fazer sentido[34] para o discente. Mas como fazer para que o aluno "aprenda sentidos"?" Para tentar responder a essa pergunta organizamos nossa intervenção, de maneira que os

---

[33] Essa análise encontra-se no capítulo Trajetória Pessoal.

pares significado/ensino e sentido/aprendizagem estivessem presentes e correlacionados nas situações didáticas e a - didáticas de nossa sala de aula.

A presença do par significado/ensino foi garantida ao propiciarmos, durante a aplicação dos jogos (situação a - didática), um ambiente no qual as questões relativas a inteiros iriam surgindo em forma de situações - problema grupais e, durante os registros escritos (situação didática), uma discussão mais elaborada e uma formalização dos conceitos: os alunos tinham que registrar o que antes haviam enunciado, e sua correlação com o par sentido/aprendizagem pode ser vista quando os alunos, a fim de resolverem, enunciarem e redigirem as situações - problema relativas a inteiros, foram levados a se responsabilizar pela situação de aprendizagem, portanto, pela produção de significados - para exibir uma *concepção* é preciso que o sujeito julgue que pode externá-la no ambiente em que fala. Assim os alunos, para continuarem a jogar (situação a - didática), e para que seu grupo obtivesse bons conceitos durante a situação didática, empenhavam-se na busca de soluções para os problemas encontrados, obtendo suas próprias respostas, que muitas vezes só eram encontradas através do uso abstrato de inteiros. Com esse engajamento e compromisso no campo semântico preferencial[35] (Lins, 1994), esquemas são evocados nos alunos a fim de que apresentem uma solução. Para Vergnaud (1990), esses esquemas constituem o sentido desse significado: *"(...) são os esquemas evocados no sujeito por uma situação, ou por um significado, que constituem o sentido desta situação ou deste significado"*.

Além disso, muitas dessas soluções (novos significados) são encontradas através da comparação com outras soluções (outros significados), em outros campos semânticos. Podemos concluir então, pela definição de sentido na teoria

---

[34] Continuamos concordando com o já falado no capítulo Pressupostos Teóricos: significado refere-se a conhecimento e sentido refere-se a concepção (Hegel, 1941).
[35] Uma abordagem sobre a teoria de campos semânticos (Lins, 1994) é feita no capítulo Pressupostos Teóricos, p. 63.

dos campos semânticos (Lins, 1994)[36], que os alunos passam a fazer sentido dos novos significados que surgem com a aplicação dos jogos. Vejamos alguns exemplos da ocorrência do par sentido/aprendizagem em nossa sala de aula:

Ao iniciarem a resolução da atividade 17 que tinha por objetivo a redução a sinais predicativos de expressões como: – (+ 3) + (– 7) – (– 8), alguns grupos tiveram algumas dificuldades para resolvê-la, por isso se questionou:

> *"... 'Vocês leram o enunciado? Então me expliquem o que está sendo pedido'. (...) 'Leia mais uma vez o enunciado para todos'. E após a leitura: 'O enunciado fala alguma coisa sobre o sinal do lado de fora dos parênteses, vocês sabem de que sinal se trata?'. Eles apontaram corretamente o sinal. 'O que está sendo pedido em relação a esses sinais?'. Resposta do grupo: 'Que sejam positivo'. Professora: 'E na resposta que vocês deram, todos os sinais do lado de fora dos parênteses são positivos?'.* ***Todos responderam que não; então pediu-se que pensassem novamente e refizessem a atividade. Depois de um certo tempo chamaram a professora no grupo e perguntaram****: 'Então, quando já tem sinal positivo do lado de fora dos parênteses não precisamos fazer nada, ou seja, não precisamos mexer no + (– 12) da expressão – (– 9) + (–12) – (+ 10), e o resultado é:*
> *–□(–□9) +□(–□12) –□(+□10) = +□(+□9) +□(–□12) +□(–□10) ?'. A resposta da professora foi afirmativa.*
> *... todos fizeram corretamente a parte 1 da atividade 17 e iniciaram a parte 2, na qual tinham como missão resolver as expressões que, na parte 1, haviam sido reduzidas a sinais predicativos. ..."* (20/10/97, p. 147)

Para realizarem a atividade 9, que tratava da composição das cartas do Jogo das Borboletas, alguns grupos deram a seguinte solução, recorrendo ao que haviam aprendido no Jogo das Perdas e Ganhos:

> *" ... o grupo que realizava a compensação percebeu, sem que a professora falasse, que nesse caso não poderia utilizá-la, pois sem o circuito não precisariam de que a soma das cartas desse zero e deram então a seguinte solução: 'Devemos fazer como se fosse o dinheiro do Perdas e Ganhos +□3 (3 azul) com –□1 (1 vermelho) dá +□2 (2 azul)'. ..." (08/10/97, p. 140).*

No primeiro exemplo, a contestação feita pela professora leva os alunos a produzirem um sentido para o que estava sendo pedido e, no segundo exemplo,

---

[36] Como vimos no capítulo Pressupostos Teóricos, na teoria de campos semânticos (Lins, 1994), um sujeito faz sentido de um novo significado quando estabelece uma comparação, com outros significados, em outros campos semânticos.

os alunos encontraram uma solução através da comparação com outra solução em outro campo semântico e passaram a utilizá-la em todas as outras atividades que tratavam do mesmo assunto.

Podemos constatar, após a intervenção, que esse planejamento foi de grande importância para que pudéssemos atender ao objetivo para o qual os jogos foram desenvolvidos: Resolver em ação os quatro problemas: Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos por menos dá mais? O que significa menos vezes?

A redução da discussão didática, sobre a construção dos números inteiros, para as quatro questões acima, é justificada no capítulo Pressupostos Teóricos, por uma análise epistemológica baseada nos conceitos de abstração reflexiva e generalização completiva:

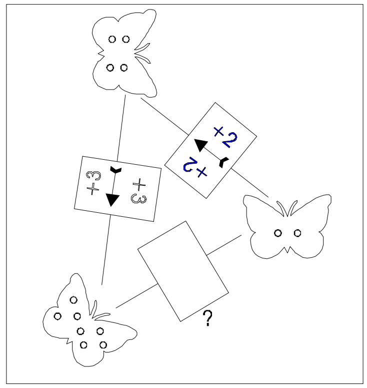
> *"A abstração reflexiva comporta dois momentos indissociáveis: uma "conversão" no sentido de uma projeção sobre um nível superior daquilo que é tomado do nível precedente (...) e uma "reflexão" no sentido de uma reconstrução ou reorganização cognitiva (mais ou menos consciente ou não) do que foi assim transferido." (Piaget, 1976, p. 39)*
>
> *"Dizemos que há "generalização completiva" quando uma estrutura, conservando seus caracteres essenciais, se vê enriquecida por novos subsistemas que se agregam sem modificar os precedentes." (Piaget & Garcia, 1984, p. 10)*[37]

Faremos aqui, uma análise do que foi disso discutido nesse capítulo, sob a luz de nossa intervenção.

A construção dos inteiros começa quando os números naturais como operadores aditivos (representados no Jogo das Borboletas[38] pelas cartas) iniciam sua ação sobre os números naturais como estados (representados no Jogo das Borboletas, versão concreta, pelos botões), ou seja, começa com atividades de composição de operadores aditivos: "mais dois seguido de mais

[37] Para um aprofundamento do conceito de abstração reflexiva e generalização completiva sugerimos as seguintes leituras: Piaget (1976) e Piaget & Garcia (1984).

três, quantos a mais são?", sendo os naturais evocados em socorro dessa composição. Essa situação é vivenciada em ação pelos alunos, no Jogo das Borboletas - versão concreta, ao precisarem fechar os circuitos para vencer o jogo:



Sua transposição é facilmente atingida pelos grupos:

> *"... Sanadas as dificuldades de leitura, os alunos começaram a jogar e não apresentaram dificuldades nas regras do jogo, fechavam os circuitos sem a menor dificuldade e prestavam muita atenção nas jogadas, a fim de vencerem. E diziam: 'Nossa, é muito fácil, parecia tão difícil quando estávamos lendo a regra!', e 'Que jogo legal!'. ..."* (23/04/97, p. 98)

Os primeiros sinais de + e – (ou azul e vermelho) que aparecem antecedendo os naturais (Jogo das Borboletas, versão concreta), são sinais operatórios: indicam acrescentar ou remover certas quantidades de outras: "+ 2" significa "acrescento 2". Portanto, para fechar o circuito anterior, os alunos procediam da seguinte forma: "Tenho 2 botões, com mais (acrescentando) 2 terei 4 botões e, com mais 3 terei 7 botões. Esse fato acarretava, por exemplo, que um jogador que tinha apenas cartas vermelhas (ou negativas) com valores acima de 1, não podia iniciar o jogo preenchendo a borboleta (de onde parte a flecha) com um botão, pois a retirada seria impossível.

Com o início da versão abstrata do Jogo das Borboletas são realizados encaminhamentos para que a atenção do aluno volte-se para a composição de

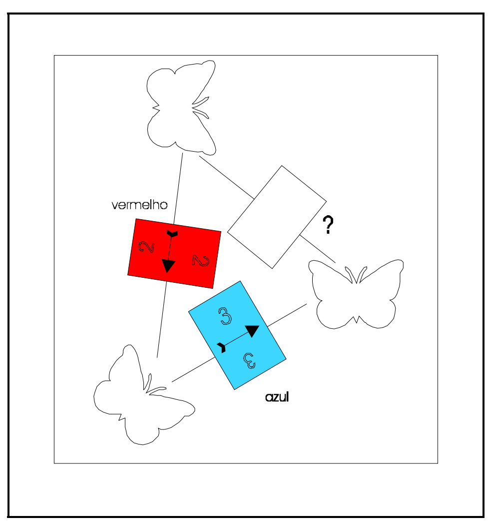
[38] Os quatro jogos utilizados na pesquisa podem ser encontrados no capítulo 3.

operadores aditivos (as cartas), e que esse consiga uma solução para a composição sem socorrer-se dos naturais como estados (botões):

> *"... Para cada grupo a professora colocou: "Hoje vamos jogar de outra forma o Jogo das Borboletas. Os botões foram levados pelas borboletas e não existem mais". 'Como faremos, agora, para fechar o circuito e continuar a jogar?'.*
>
> *Os grupos ficaram inquietos com o novo obstáculo. Queriam responder rapidamente para poder jogar. A solicitação da presença da professora nos grupos era constante. (...)*
>
> *De imediato, três grupos solicitaram a professora. Todos eles tinham o objetivo de dar a seguinte solução: "Imaginar" uma quantidade de botões nas borboletas. Após essa explicação, a professora disse que os botões não existiam mais e que não era permitido nem pensar neles, portanto, essa não era uma forma de jogar. Foi dito:* ***"Vocês não podem usar e nem pensar nos botões! Usem outra estratégia".***
>
> *Dois grupos começaram,* ***por encaminhamento da professora****, a esquematizar e fechar um circuito com botões (escreviam, a lápis, na borboleta) para que* ***pudessem olhar as cartas e concluir que essas fechavam o circuito****.*
>
> ***Depois de um certo tempo, um desses colocou****: ..."* (05/05/97, pp. 101 - 102)

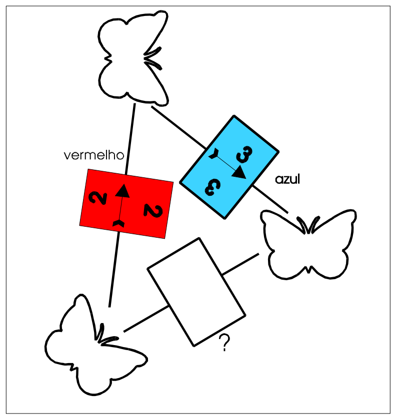
Após essa ação, os alunos passam a verbalizar (narrar) suas conclusões. Observemos a solução dada por um dos grupos:

> *"... 'É preciso compensar, ou seja, o número de vermelhos e azuis tem que ser o mesmo'. A professora pediu que eles mostrassem no tabuleiro. 'Por exemplo, professora, se há no circuito (ao lado) 3 azuis e 2 vermelhos, para compensar o número de vermelhos falta 1 vermelho, logo, é essa carta que fecha o circuito'. ..."* (05/05/97, p. 102)



Tanto o exemplo acima quanto o encaminhamento (comparação da escada, apresentada abaixo), realizado pela professora aos grupos que apresentavam muita dificuldade, utilizavam-se de conceitos familiares aos alunos, como por exemplo, a adição de números naturais.

Comparação da escada



"... 'Se o circuito acima fosse uma escada, e tivéssemos que descê-la dois degraus (no caso, a carta vermelha) e posteriormente subi-la três degraus (representados pela carta azul), essa ação seria equivalente a quê? Ao invés de ficarmos subindo e descendo o que poderíamos fazer para chegar onde chegamos?'

Todos os grupos responderam *que bastava subir um degrau e eles chegariam no mesmo lugar alcançado com o sobe e desce, (...)"Então, qual é a carta que fecha o circuito, nesse sentido?".* ***Mais uma vez, todos os grupos responderam*** *que era a carta 1 vermelho, que representava o contrário, que é descer. ..."* (05/05/97, p. 104)

Como a vontade de jogar era intensa, apesar das dificuldades encontradas, os alunos se apropriaram desses encaminhamentos e, à medida que jogavam, faziam comparações com o jogo na versão concreta, através das quais novas elaborações surgiram. Por exemplo,

"... A professora retomou com o grupo da última aula a pergunta que havia ficado pendente. Eles responderam que no caso de uma das cartas estar com a seta invertida, deveríamos trocar a carta por outra com cor diferente e seta no mesmo sentido da primeira. 'Por exemplo, para esse circuito (abaixo) poderíamos trocar a cor e a seta da carta 3 azul, pois ***quando jogávamos***

***com botões tanto fazia colocar 1V ou 1A, se a seta estivesse certa (...) Logo, (...) , a carta que fecharia era (...)'. ...*"(07/05/97, p. 105)

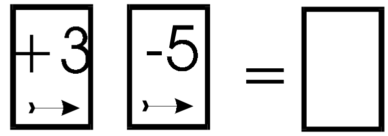
Com esse processo de apropriação - reflexão - reelaboração vivido pelos alunos, os sinais operatórios (por exemplo, $+ 2$) passam a denotar qualidades do operador, ou seja, passam a sinais predicativos: o $+ 2$, de "acrescento 2" passou a "2 a mais". A resposta dessa operação de composição é de novo um operador: "dois a mais seguido de três a menos eqüivalem a 1 a menos". Vemos esse fato na aula do dia 19/05/97, quando para fechar um circuito os grupos passam a enunciar: *"Para eu fechar esse circuito falta 2 a mais"* ou *"Para eu fechar esse circuito falta subir 2 a mais".*

Quando os sinais eram operatórios, significando "acrescentar" e "tirar", uma operação do tipo $3 - 5$ tinha como resposta: "Não dá". Já nas atividades relativas à operação de composição de operadores aditivos, $+ 3$ seguido de $- 5$ tem solução: é equivalente ao operador $-$□2. É que a operação em questão, sem perder suas características de "tirar" (5 de 3) ganhou novas: o sujeito não está mais operando com números naturais, mas com operadores aditivos. Os naturais cuja natureza dinâmica fora estabelecida quando de sua construção, aparecem aqui como estados, pontos de partida e de chegada, mas também aparecem convertidos em inteiros, **novos operadores**, ou seja os naturais foram projetados em novos operadores.

Essa projeção pode ser vista em nossa intervenção quando os grupos realizam as atividades escritas. Exemplo:

Quando precisavam fechar um circuito alguns grupos (quatro) procediam da seguinte maneira:

"$+2$ com $-6 = -4$, portanto para fechar o circuito preciso de $+4$". E mais, **todos os grupos** realizaram a composição das cartas (veja exemplo abaixo) e faziam-na da seguinte maneira: *" $+3$ $-$□5 $=$ $-$□2".*



Portanto, através do processo de abstração reflexiva (ação - narração - projeção), os números naturais adquirem o estatuto de operadores aditivos e são "projetados" nos inteiros 1*a*, 1*v*, 2*a*, 2*v*, ... e "convertidos" em novos inteiros positivos. Dessa maneira, o nosso primeiro problema - Como tirar o maior do menor? - é resolvido em ação no Jogo das Borboletas.

Agora, de posse desses novos objetos, como dito anteriormente, à medida que (–□3) possuía um significado para os alunos, –□(–□3) também teria que ter um. "Como subtrair um negativo?" É um problema resolvido, conservando o sentido de "tirar", no Jogo de Perdas e Ganhos, no qual os alunos passam a realizar a operação de extração, agora, com os operadores aditivos: "Extrair uma dívida significa dar um ganho".

Num determinado momento do jogo, ao retirar um cartão de sorteio, surge a seguinte situação - problema: *"... retire R$10,00V de seu colega à esquerda (ou direita), quando esse colega não tinha os 10V. ..."* (16/06/97, p. 111).

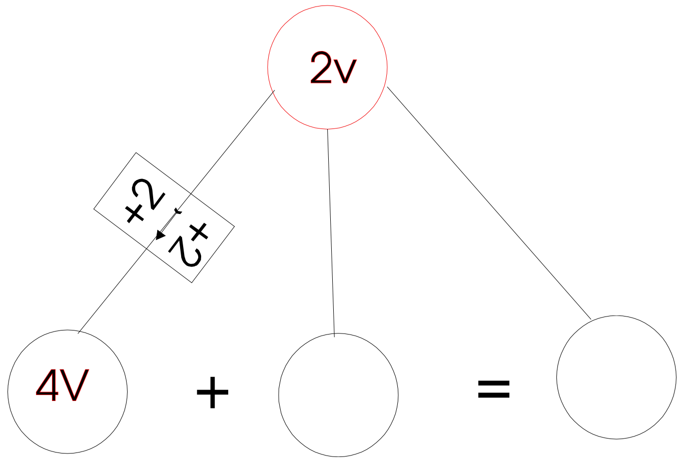
Inicialmente os alunos não sabem o que fazer, mas após a insistência por parte da professora que o cartão tinha que ser cumprido, apresentam a seguinte solução: *"É necessário fazer um empréstimo do banco para que o colega tenha 10V para ser retirado"*. Após essa <u>ação</u> vivida no Jogo de Perdas e Ganhos, os alunos passam a executar a solução dada por eles e se surpreendem: *"... Após efetuarem o que o cartão pedia, ficavam surpresos, porque o colega que não tinha os 10v acabava saindo ganhando ..."*.

E à medida que o jogo transcorria, os grupos percebiam que não havia necessidade de se fazer um empréstimo do banco, para retirar uma dívida, portanto concluíam o seguinte teorema em ação: *" ... o jogador, que retirou o cartão, dava R$10,00A ao colega...".*

Assim, além de adicionar operadores, os alunos passaram a subtraí-los, construindo, a estrutura $(\mathbb{Z}, +, -)$[39]. Dessa forma, a estrutura anterior foi enriquecida com uma nova operação sem modificar a outra, portanto, dizemos que ocorreu o processo de generalização completiva. Logo, o segundo problema é resolvido como conseqüência do processo de generalização completiva ocorrendo simultaneamente com a abstração reflexiva.

Continuando com o processo, os números naturais já convertidos em inteiros positivos começam a funcionar como multiplicadores (representados, no Jogo das Araras, pelas cartas com sinal positivo), operando sobre os inteiros (representado, no Jogo das Araras, por botões vermelhos e azuis) e, à medida que o fazem, reduzem os inteiros a estados. Tínhamos anteriormente os operadores aditivos agindo sobre os números naturais como estados, mas a partir do momento em que são apresentados como respostas do primeiro problema, o aluno os está concebendo em pé de igualdade com os naturais, portanto, como estados também. Esse fato nos mostra que o Jogo das Borboletas deve ser aplicado, em sala de aula, anteriormente ao Jogo das Araras. Essa ação é vivida pelos alunos, no Jogo das Araras, ao preencherem as trajetórias dos circuitos:

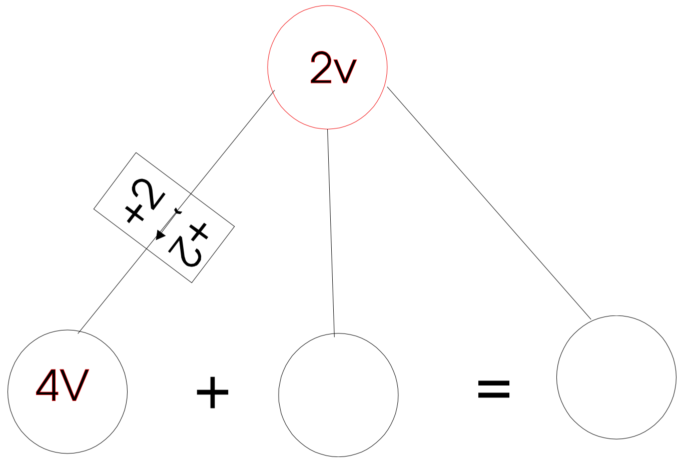
[39] A estrutura $(\mathbb{Z}, +, -)$ representa o conjunto dos números inteiros $(\mathbb{Z})$ munido das operações de adição e subtração.



Para fechar, por exemplo, o circuito acima, procediam da seguinte forma: *“+2 vezes 2 botões vermelhos é igual a 4 botões vermelhos ((+□2) × (2v) = 4v)”*.

No início do jogo, após algumas jogadas, os alunos faziam comparações com o Jogo das Borboletas: *“É parecido com o Jogo das Borboletas, mas agora a <u>carta +□2 não é dois a mais, e sim, duas vezes</u>”*.

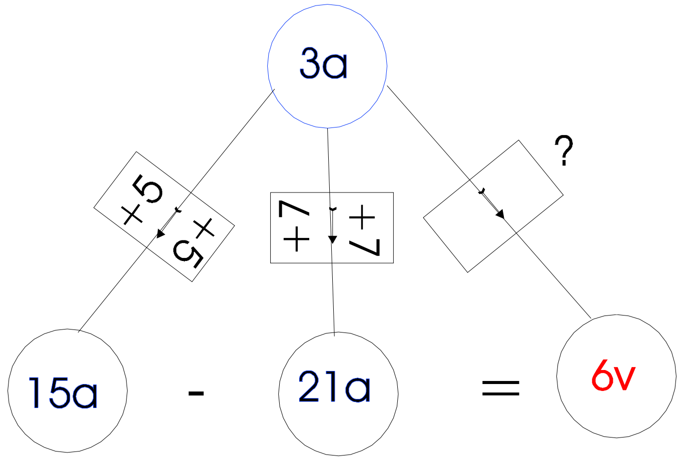
Portanto, os inteiros positivos funcionam aqui como operadores multiplicativos sobre os inteiros, e fundem-se com os racionais positivos. Com essa fusão a multiplicação herda dos naturais a propriedade comutativa: $(3) \times (2a) = (3) \times (2) = (2a) \times (3)$, e os inteiros positivos começam a agir como operadores multiplicativos sobre os racionais positivos. Passamos do estado, $(Q, \times, /)$ aos operadores $(Z, +, -, \times, /)$. Antes de continuarmos com a construção dos inteiros, relembramos que, em nossa intervenção, a regra para o preenchimento da arara era a seguinte: *“O número da carta vezes número de botões na arara de onde parte a flecha, deve ser igual ao número de botões na arara para onde a flecha aponta”*. Nossa opção por essa estratégia tinha o objetivo de facilitar a visualização e a abstração da carta, por exemplo +□3, como um operador multiplicativo “3 vezes”. Inicialmente os alunos ficaram presos a essa regra, mas à medida que jogavam, a comutatividade foi <u>anunciada</u> pelos grupos:



"Tanto faz fazermos "+□2 vezes 2 botões vermelhos é igual à 4 botões vermelhos ($(+□2)\times(2v)=4v$)" quanto " 2 botões vermelhos vezes a carta +□2 é igual a 4v, ou seja, $(2v)\times(+□2)=4v$."

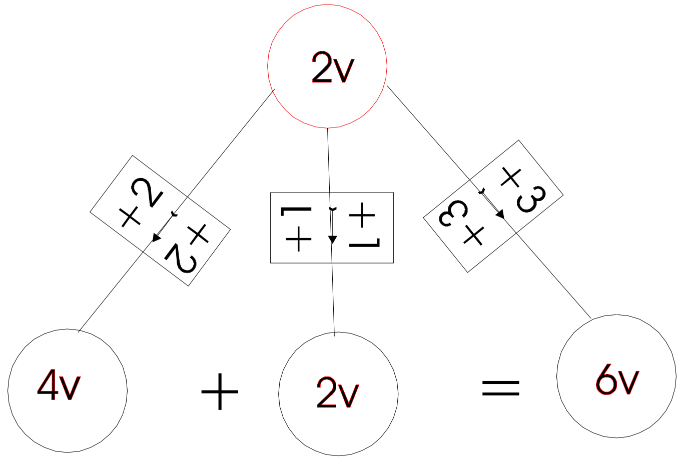
Voltando à nossa construção, no estágio em que nos encontramos, duas questões surgem, e ainda não sabemos respondê-la. A primeira questão é a seguinte: Desde que $(3)\times(2a)=(2a)\times(3a)$ e $(3)\times(2v)$ tem um significado, $(2v)\times(3)$ deveria possuir um. E a segunda questão é: Devido à conversão dos inteiros positivos em racionais, estes herdam uma estrutura aditiva dos inteiros. A soma e a subtração de operadores multiplicativos começam a fazer sentido, portanto, cinco vezes mais sete vezes, quantas vezes são?

Para respondermos à segunda pergunta, recorremos à estrutura aditiva de inteiros: 5*a* menos 7*a* é 2*v*, mas "2*v*", ainda não tem significado como operador multiplicativo. Retornamos à primeira questão. Entretanto, à medida que "5 vezes" e "7 vezes" agem sobre estados, tais como "3*a*", por exemplo, essa operação de extração já é válida entre inteiros, e com ela obtemos $15a -□21a = 6v$ (essa operação é vivida em ação no Jogo das Apostas, veja o circuito abaixo).



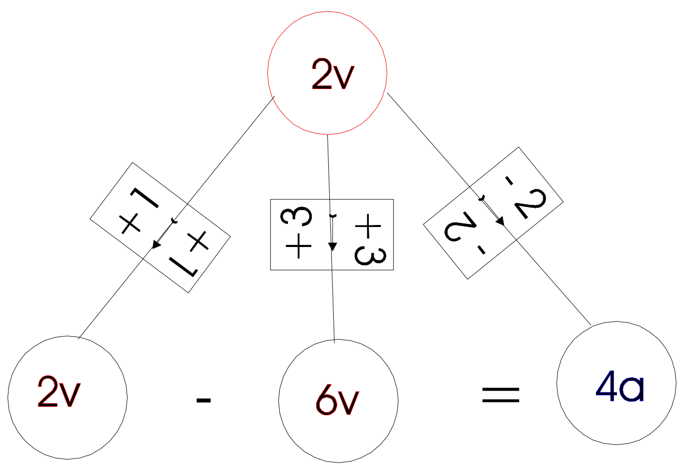
A equilibração da nova estrutura requer que "2*v*", aplicado em 3*a*, deva levar a 6*v*. A generalização desta ação em outros estados leva à conclusão de que, multiplicar por 2*v* deve significar multiplicação, com mudança de cor. Essa conclusão é apresentada aos alunos, como uma das regras do Jogo das Araras e responde às indagações feita no capítulo Pressupostos Teóricos: “Podemos dizer que Freudenthal e Dienes estavam procurando explicações para a regra de sinais? A crítica de Glaeser indica que eles simplesmente não obtiveram sucesso? Ou será que toda a discussão é um sintoma de que não existe nenhuma explicação, em última instância, e que algum grau de arbitrariedade será necessário em algum lugar? Neste caso, exatamente onde?”, ou seja, no nosso material o grau de arbitrariedade se encontra exatamente quando inventamos um novo operador: 2*v*.

Enquanto a primeira questão é uma das regras do jogo, a segunda questão é vivida em ação pelos alunos, no Jogo das Araras, quando necessitam fechar os circuitos aditivos. Por exemplo:



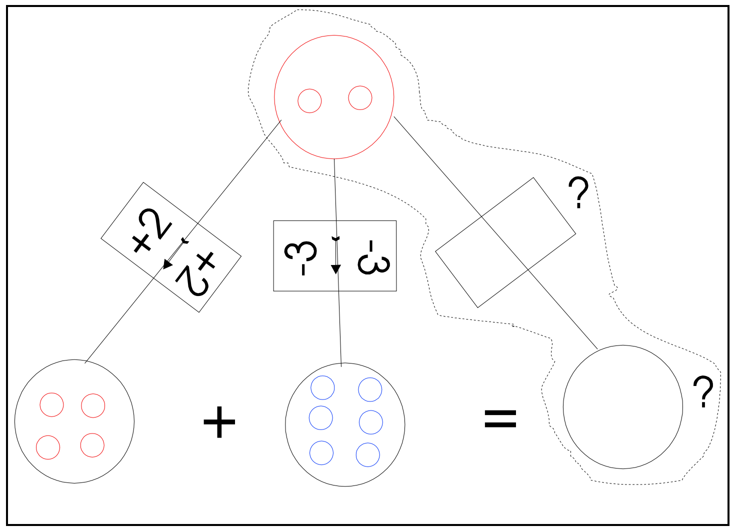
"2 vezes mais 1 vez é igual a 3 vezes"

Além da segunda questão, ao jogarem, os alunos vivenciam o terceiro problema na construção dos inteiros: O que significa menos vezes? em situações como abaixo:



"1 vez menos 3 vezes é igual a – **2 vezes**" e "– **2 vezes** 2v é igual a 4a"

Mas durante o jogo, os grupos, para fecharem os circuitos, ao invés de realizarem a composição através das cartas, faziam-na através dos botões, sem portanto, estarem substituindo "1 vez" menos "3 vezes" por "–□2 vezes". O fato de terem jogado anteriormente o Jogo das Apostas levou-os a não dispensar uma atenção maior às cartas. Como estavam jogando corretamente e com entusiasmo, resolvemos deixar a questão ser apresentada nas atividades escritas, não atrapalhando assim o andamento do jogo. Portanto, não se atingiu a abstração desejada durante o jogo, mas, ao iniciarmos as atividades escritas, todos os grupos concluíram que através das cartas também era possível realizar o fechamento do circuito. E diziam:



> *"... não era necessário fazer as contas pelos botões para se achar a carta que fechava o circuito, podia-se achar essa carta através das já existentes no circuito, ou seja, para o exemplo ao lado, teríamos duas maneiras de achar a carta e a quantidade de botões da arara branca vazia. Para explicar a professora utilizavam a expressão "pelos botões e pelas cartas", ou seja:*
> *Pelos botões: 4 botões vermelhos + 6 botões azuis = 2 botões azuis.*
> *Então, a carta que fecha o circuito é − 1, pois*
> *(− 1) × (2 botões vermelhos) = 2 botões azuis ou,*
> *Pelas cartas: (+ 2) + (− 3) = − 1*
> *Logo, a carta que fecha o circuito é − 1, portanto a quantidade de botões na arara branca vazia seria de (− 1) × (2 botões vermelhos) = 2 botões azuis.*
> *Ao terminar a explicação para a professora, um grupo disse: 'Tanto faz fazermos pelas cartas ou pelos botões, que o resultado é o mesmo". Todos os grupos salientavam a igualdade das duas formas'. ..."* (27/10/97, p. 150)

Com essas atividades, os alunos, além de realizarem e verbalizarem a adição e subtração de operadores multiplicativos, trabalharam e também, verbalizaram (grifos em vermelho no exemplo anterior) a questão tão ansiada por nós: O que significa menos vezes?, ou seja, passaram a identificar o inteiro negativo como o operador composto, formado pelo operador multiplicativo natural seguido do operador troca de sinal. Resolve-se assim o terceiro problema: menos 1 vez significa multiplicar por 1 e trocar o sinal.

E mais, além dessa questão, com a continuação das atividades escritas, os alunos passaram a enunciar a quarta questão do problema - didático: Por que menos por dá mais? como uma projeção da terceira:

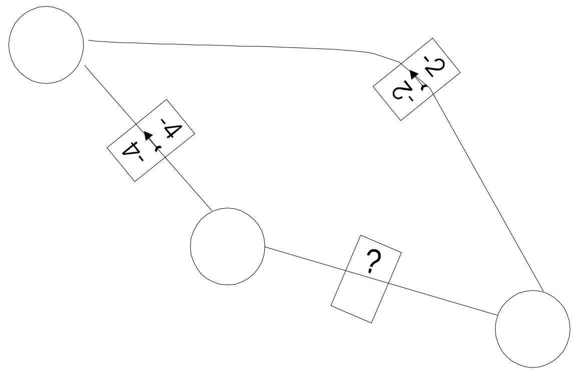
> "... disseram à professora que, quando os sinais eram repetidos, a resposta sempre dava "mais" e quando eram diferentes dava "menos". O grupo da Edjane, Tiago, Camila e Francileide disseram o seguinte: "Olha, professora, o que nós descobrimos: se o sinal for repetido como esses", (e apontava para exercício do tipo $(+5) \times (+12)$, $(-3) \times (-9)$) "a resposta é de 'mais' $(+)$, mas se eles não se repetirem como esses", (e apontava para exercício do tipo $(-3) \times (+15)$, $(+5) \times (-2)$) 'então é de 'menos' $(-)$. Professora , desse jeito não precisamos mais pensar se troca ou não o sinal'. ..." *(03/11/97, p. 155)*

Nessas atividades os alunos realizaram exercícios como $(-1) \times (-7) = +7$, sem recorrer à regra inicial da troca de sinal. E fizeram uma projeção da terceira e quarta questões ao trabalharem na introdução da propriedade distributiva,

$$(-2) \times ((-1) + (-3)) = (-2) \times (-4) = 8$$

$$(-2) \times (-1) + (-2) \times (-3) = (+2) + (+6) = 8$$

O processo de abstração que ocorreu durante fase dos registros, também poderia ter-se processado durante a fase do jogo (Jogo das Araras), se aplicássemos à operação de composição de operadores multiplicativos, um encaminhamento análogo ao dado aos operadores aditivos, ou seja, se no Jogo das Araras retirássemos os botões e tivéssemos que fechar os circuitos aditivos e multiplicativos através da composição das cartas, os alunos teriam que substituir dois operadores multiplicativos por um só, fazendo assim, as composições desejadas ($(+1) - (+3) = -2$ e $(-3) \times (-2) = (+6)$). Com esse procedimento, introduziríamos a divisão como inversa da multiplicação e chegaríamos à construção dos racionais positivos que precedeu à dos inteiros em mais de dois mil anos e da qual nós resolvemos não nos ocupar[40] . Por exemplo:



"– 4 vezes com – 1/2 vez (inverso de – 2 vezes) dá + 2 vezes, então, para fechar o circuito multiplicativo, precisaríamos saber qual carta que multiplicada por 2 dá 1, que é o elemento neutro da multiplicação. A carta procurada é 1/2 vez."

Portanto, em nossa intervenção, optamos por não trabalhar o Jogo das Araras, sem botões, em virtude do tempo da intervenção encontrar-se escasso para que pudéssemos introduzir as atividades escritas. Mas acreditamos que essa seria também uma estratégia viável em sala de aula.

Gostaríamos de salientar novamente que, em qualquer manobra didática, para guiar a construção dos inteiros, será necessário algum grau de arbitrariedade. Tal arbitrariedade pode ser localizada no momento de definir como os inteiros negativos (operadores) agem sobre os seus estados, mas não no momento da composição de tais operadores. Além disso, o núcleo da construção dos inteiros é a síntese operacional de operadores multiplicativos com um operador "mudança de qualidade", como enunciado anteriormente.

Ainda no tópico Pressupostos Teóricos, encontramos agora o item "considerações sobre as aplicações" e, após algumas reflexões sobre as aplicações dos jogos realizadas anteriormente, encontramos também a proposta de utilização em sala de aula, de um contrato de trabalho e o seu conceito dado

---

40 Omitiremos também referências à construção da multiplicação e (divisão) nos naturais que funcionam como pré - requisito aos materias que propomos.

por Cabral (1992)[41]. É importante relembrarmos que, em nossa intervenção, as negociações entre professor e aluno, ao redor do conteúdo didático e do conteúdo pedagógico, não ocorreram logo de início. Primeiramente foi feita uma proposta, exposta aos alunos, tanto para o conteúdo didático quanto para o conteúdo pedagógico e, só após essa apresentação, os alunos puderam aceitá-la ou rejeitá-la. Após sua aceitação abriram-se as negociações, ou seja, seriam aceitas modificações na proposta. Acreditamos que, por inexperiência dos alunos em trabalhar com pedagogias diferentes do ensino tradicional, não houve manifestação contrária (como dito anteriormente), e nenhuma negociação foi feita; em seguida, redigiu-se a proposta dando origem ao contrato de trabalho seguido rigorosamente pela professora e pelos discentes, o que definiu a relação professor/aluno que se desenvolveu na sala de aula e foi fundamental para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Com essa análise, podemos constatar a grande importância de termos ido para a sala de aula com um material e uma pedagogia muito bem fundamentados.

[41] O contrato de trabalho é aqui proposto "Como um conceito pedagógico que inclui o conceito de "contrato didático" que se refere especialmente à operação de ensino. É no contrato didático que se definem as negociações que ocorrem entre as partes, professor e alunos, ao redor do conteúdo matemático: o que deve ser tematizado, como deve ser abordado, de que maneira deve ser cobrado e, efetivamente, o que deve ser cobrado. Em nosso conceito de contrato de trabalho, diremos que, além da negociação do conteúdo didático, ocorrem negociações do conteúdo pedagógico. É aí que fica definida a relação professor/aluno que se estabelece em sala de aula. Assim, estamos de posse de uma ferramenta eficaz e transparente, que nos permite ver o funcionamento de qualquer sala de aula" (Cabral, 1992).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste tópico serão abordadas algumas das observações e considerações obtidas no transcorrer de todo o trabalho. Por ter se tratado de uma intervenção de caráter pluralista, muitos pontos puderam ser notados em seu decorrer:

- A importância da pedagogia para o desenvolvimento do trabalho;
- A obtenção de uma resposta à pergunta diretriz;
- Considerações sobre a aplicação do recurso didático - pedagógico utilizado.

A importância da pedagogia está intimamente ligada à adoção de um contrato de trabalho, ao compromisso assumido em sala de aula pelo docente e pelos discentes e também ao cumprimento do trabalho inicialmente proposto no contrato de trabalho, proporcionando um ambiente benéfico ao desenvolvimento de qualquer recurso didático.

A utilização do contrato de trabalho sem dúvida foi um dos pontos altos de nossa pesquisa, apresentando resultados positivos no transcorrer de todo o trabalho. Seu emprego denota que o aluno, quando passa a integrar de modo consciente e capaz de mudar os rumos do trabalho a ser desenvolvido, demonstra maior responsabilidade e empenho em cumprir as metas estabelecidas em conjunto. Pode-se concluir que o compromisso assumido entre o docente e os alunos possui laços fortes, com os discentes assumindo suas responsabilidades e também cientes de seus direitos, pois trata-se de um contexto no qual houve reciprocidade docente - discente, possibilitando o cumprimento do trabalho proposto e proporcionando a credibilidade no trabalho desenvolvido.

Pôde-se concluir, através do ambiente que se instalou com o emprego do contrato de trabalho, juntamente com a forma pela qual os jogos foram aplicados e através da análise dos dados obtidos em nossa intervenção, pela eficácia do Jogo das Borboletas, Jogo das Perdas e Ganhos, Jogo das Apostas e do Jogo das Araras, respondendo assim à pergunta diretriz da pesquisa: "Qual é a eficácia didático - pedagógica dos quatro jogos?".

Além de estarmos reforçando os pontos fundamentais à nossa pesquisa, gostaríamos de ressaltar alguns pontos da intervenção realizada na 5ª série.

Durante toda a intervenção, apesar dos grupos não serem fixos, a maioria dos alunos que trocou de grupo mudou apenas no encerramento de uma atividade, ou seja, quando se iniciava um jogo novo ou quando se deu o início das atividades de ensino. Esta conduta mostra a consciência dos alunos em cumprimento das normas do contrato de trabalho que, mesmo abrindo a possibilidade de uma eventual mudança de grupo aos alunos, estes não o fizeram, demonstrando entrosamento e interesse do grupo em cumprir a meta.

Os grupos apresentavam quase todos o mesmo ritmo na elaboração das atividades, apenas se atrasavam quando algum elemento havia faltado à aula anterior. Assim, no dia seguinte, para que o aluno que faltou anteriormente pudesse participar do grupo era necessário que os outros explicassem e discutissem as atividades com ele. Notou-se, no início, que alguns alunos reclamavam: "Por que temos que explicar se foi ele que faltou?" Para este questionamento recebiam a seguinte resposta: "Vocês podem mudar de grupo, mas se quiserem continuar com o mesmo e quiserem também ter nota de grupo, é preciso que ajam como um". Com o passar do tempo foram percebendo que para desenvolver o trabalho em grupo, esse procedimento era necessário e não reclamavam mais.

Vale salientar que as observações acima são válidas para a intervenção realizada nessa sala de aula, podendo sofrer alterações caso os jogos sejam aplicados em outras salas. Acreditamos e encorajamos outras intervenções com os quatro jogos, a fim de que possam ser obtidos novos dados, principalmente utilizando a discussão dos dados apresentados neste trabalho. Sugerimos o acréscimo de atividades que trabalhem com a divisão de números inteiros[42].

Concluiu-se que, talvez numa próxima intervenção, não fossem necessárias tantas atividades[43] do mesmo tipo tanto quanto foram aplicadas após o término da fase dos jogos. Até então, por se tratarem de atividades inéditas, não se esperava que os alunos as fizessem tão rapidamente, ficando ansiosos na espera de uma próxima. Assim, muitas vezes foram propostas várias atividades com o mesmo teor para que os alunos as resolvessem. Em virtude do fato de as atividades serem desenvolvidas diariamente, esperava-se a análise do sucesso ou fracasso da atividade anterior, para que pudesse ser aplicada uma nova atividade.

O procedimento das aplicações nas três classes submetidas ao processo de intervenção foi o mesmo, e as constatações obtidas nas três diferentes séries - 5ª , 6ª e 7ª do Ensino Fundamental foram praticamente as mesmas. Optou-se neste trabalho, por relatar as observações efetuadas na classe de 5ª série.

---

[42] Historicamente, os racionais positivos antecederam os inteiros. Nossa abordagem mostra que não é necessário seguir esta ordem na didática. A construção das frações pode ser feita analogamente a que empreendemos aqui. Isso foge ao objetivo desta dissertação.

[43] Relembramos aqui que o termo "atividade", durante todo trabalho, está sendo utilizado para designar exclusivamente os exercícios propostos após o uso do jogo.

BIBLIOGRAFIA

BALDINO, R. R. *Las quatro operaciones com enteros através de juegos*. Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, v.7, p.37-59, 1996.

BALDINO, R. R. *Sobre a epistemologia dos números inteiros.* Educação Matemática em Revista-SBEM (São Paulo), v.5, ano 3, p.4-11, 1996.

BALDINO, R. R. *On the epistemology of integers*. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.17, n.2, p.211-250, 1997.

BALDINO, R. R., CABRAL, T.C.B. *Do jogo ao ludo ou da sedução à significação*. Boletim da SBEM (São Paulo), n.2, ano 7, p.13-19, abr./jun. 1993.

BAUDRILLAR, J. *Da sedução*. São Paulo: Papirus, 1991.

BORBA, R. E. *Understanding and operating with integers*. In: 19th PME Conference, 1995, Recife. Proceedings of the ... Recife: s. n., v.2, 1995. p.226-223.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, v.3, 1997.

BROUSSEAU, G. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.4, n.2, p.165-198, 1983.

BROUSSEAU, G. *Le Contract Didactique: le milieu.* Recherches en Didactique des Mathématiques, v.9, p. 309-336, 1988.

BRUNO, A., MARTINON, A. Beginning learning negative numbers. In: 20th PME Conference, 1996, València. Proceedings of the ... València: s. n., v.2, 1996. p.161-168.

CABRAL, T. C. *Vicissitudes da aprendizagem em um curso de Cálculo.* Rio Claro, 1992. 2v. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

DIENES, Z. P. *Nombres naturels entiers rationels*. Mathématique Vivante. Paris: O.C.D.L., 1972.

ECO, H. *Como se faz uma Tese em Ciências Humanas.* Lisboa: Presença, 1982.

FERREIRA, A. B. H. *Dicionário Aurélio básico da língua portuguesa.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1988. p. 74-221-490.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Ridel, 1973.

FREUDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Ridel, 1983.

GLAESER, G. *Épistémologie des nombres relatifs*. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.2, n.3, p.303-346, 1981.

GPA Manifesto sobre o cotidiano da escolaridade brasileira. In: Internet http://www.caferomano.org/, 1998.

G-RIO & GPA *As quatro operações com inteiros através de jogos*. Rio Claro: UNESP, 1994. 23p. (Mimeogr.).

HEFENDEHL-HEBEKER, L. *Negative numbers: obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs*. For the Learning of Mathematics, n.11, ano 1, p.26-32, Fev. 1991.

HEGEL, G. W. F. *La phénoménologie de l'espirit*. Paris: Aubier, v.1, 1941.

LACAN, J. *Le séminaire de Jacques Lacan*. Livre XI. Les quatre concepts foundamenteaux de la psychanalyse. Paris: Editions du Seuil, 1973.

LINARDI; P. R. *O ensino de números inteiros na 5ª série*. In: 1º Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1997, UERJ. Livro de resumos..., Rio de Janeiro: s. n., 1997. p.115.

LINARDI, P. R., GADOTTI, M. C., SANTOS, R. D. dos. *Investigação dos operadores aditivos em Z, na 5ª série*. In: IV EPEM, 1996, PUC/SP. Anais..., São Paulo: Atual, 1996. p.422-423.

LINS, R.C. *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Nottingham, 1992. Ph.D. Dissertation, University of Nottingham, 1992.

LINS, R.C. *O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico.* Dynamis (Blumenau), v.1, n.7, p.29-39, abr./jun. 1994.

LYTLE, P. A. *Investigation of a model basead on the neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction*. In: 18th PME Conference, 1994, Lisboa. Proceedings of the ... Lisboa: s. n., v.3, 1994. p.192-199.

MOMETTI, A. L., SCAVAZZA, H. A. *Números Inteiros: Jogo das Borboletas*. Rio Claro: UNESP-IGCE, 1994. (mimeogr.).

ORIOSVALDO DE MOURA, M. *A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática*. A Educação Matemática em Revista - SBEM (São Paulo), ano II, n.3, pp.17-24, 1994.

PEREIRA, D. J. R. *O papel do significante “família” no discurso sobre ensino e aprendizagem da Matemática na escola*. Rio Claro, 1995. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

PIAGET, J. *Essai de logique opératoire*. Paris: Dunod, 1976.

PIAGET, J., GARCIA, R. *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo Veintiuno, 1984.

PIAGET, J., INHELDER, B. *Le développment des quantités physiques chez l´enfant. Paris: Délachaux et Niestlé*, 1978.

PROCTER, P. *Cambridge international dictionary.* New York: Cambridge University Press, 1995.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o ensino da Matemática: 1º grau*. São Paulo: SE/CENP, 1988.

SOUZA, A. C. C., BALDINO, R. R. *Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática - GPA*. In: V ENEM, 1995, UFS/Aracaju. Anais..., Aracaju: SBEM/SE, 1995. p.203.

SOUZA, A. C. C., EMERIQUE, P. S. *Educação Matemática, jogos e abstração reflexiva*. BOLEMA, Ano 10, n.11, p.77-85, 1995.

SOUZA, A. C. C., MOMETTI, A. L.; SCAVAZZA, H.A., BALDINO, R.R. *Games for integers: conceptual or semantic fields?* In: 19th PME Conference, 1995, Recife. Proceedings of the ... Recife: s. n., v.2, 1995. p.232-239.

THOMPSON, P. W., DREYFUS T. *Integers as transformations*. Journal for Research in Mathematics Education, n.19, p.115-133, 1988.

VERGNAUD, G. *Cognitive and developmental psychology and research im Mathematics Education: some theoretical and methodological issues*. For the Learning of Mathematics, v.3, n.2, p. 31-41, nov. 1982.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.10, n.2, p.133-170, 1990.

ZIZEK, S.*O mais sublime dos histéricos*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1991.

ZIZEK, S. *Eles não sabem o que fazem*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1992.

.

ANEXOS

JOGO DO CARACOL

Esse jogo tem duas versões, **recreativa** e **escolar**. Cada versão tem duas modalidades, **série** e **paralelo**. Podem jogar até quatro jogadores. O seguinte material é necessário:

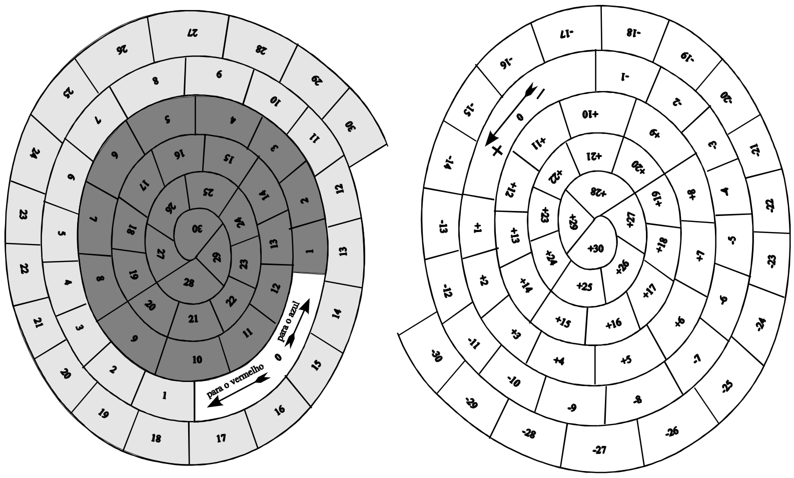
Material necessário
Uma folha modelo C : tabuleiro versão recreativa (p. 229)
Uma folha modelo D: tabuleiro versão escolar (p. 230)
Uma folha modelo E para cada jogador: máquinas (p. 231)
Uma folha modelo F: dados (p. 232)
Uma placa de isopor do tamanho de uma folha sulfite.
Alfinetes de cabeça colorida: dois alfinetes de cada uma de quatro cores diferentes.
Uma folha de cartolina do tamanho de uma folha sulfite.

Para preparar o jogo, cole ou prenda com adesivo, as folhas modelo C e D nos dois lados da placa de isopor, formando dois **tabuleiros**, um para a versão recreativa e outro para a versão escolar. Cole a folha modelo F sobre a cartolina, recorte e arme os dados. Pinte de azul as faces dos dados e as casas do caracol que tiverem fundo cinza escuro. Pinte de vermelho as faces e as casas que tiverem fundo cinza claro. Não pinte as faces nem as casas de fundo branco. (Você pode preferir usar dados convencionais, recobrir as faces com fita adesiva e escrever os números sobre elas.)

Jogo do Caracol

Versão recreativa — Folha modelo C

Versão escolar — Folha modelo D

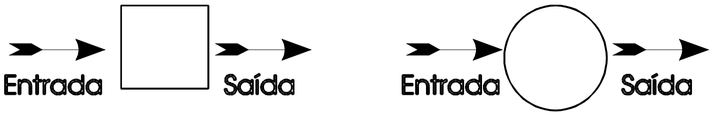


Jogo do Caracol: versão **recreativa**, modalidade **série**.

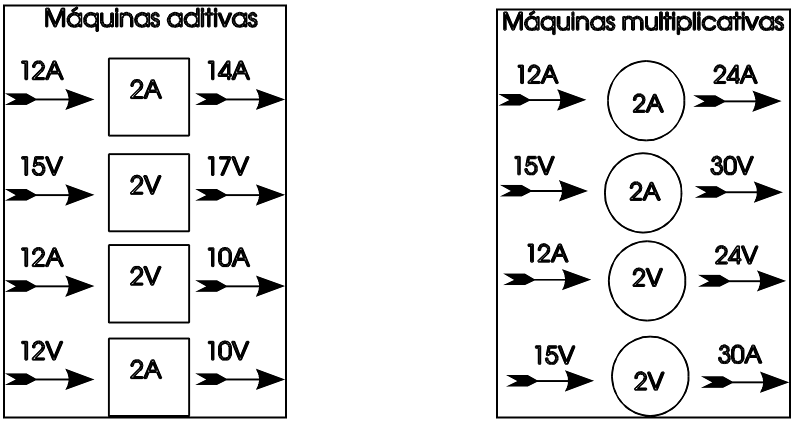
Para jogar, usam-se o tabuleiro modelo C e os dados coloridos. Cada jogador recebe uma folha modelo E. Os círculos e os quadrados desenhados na folha modelo E serão chamados **máquinas**. Cada jogador escolhe os dois alfinetes de sua cor preferida e os espeta na casa zero do tabuleiro. Será considerado vencedor o jogador que primeiro conseguir colocar um de seus alfinetes na casa 30 azul e o outro na casa 30 vermelha.

Para jogar, o jogador lança os dois dados coloridos. Em função dos números sorteados, o jogador escolhe qual alfinete quer mover e qual das quatro *ligações em série* em sua folha modelo E vai usar. Coloca os dois dados sorteados sobre as duas máquinas da ligação que escolheu. Essa ligação determina o cálculo que deve ser feito com o número e cor da casa em que está o alfinete que deseja mover. O resultado desse cálculo é o número da casa para onde este alfinete deve ir. As diferentes ligações conduzem a cálculos diferentes que dão resultados diferentes. O jogador escolherá o alfinete e a ligação que lhe parecerem mais convenientes mas, a cada sorteio dos dados só poderá mover um alfinete.

Há dois tipos de máquinas, as **aditivas**, representadas por quadrados e as **multiplicativas**, representadas por círculos. Cada máquina tem uma **entrada** e uma **saída**, indicadas por flechas.



As máquinas funcionam assim: um número posto na entrada é transformado noutro, na saída, por ação do número do dado que estiver dentro da máquina. Por exemplo:



Suponhamos que um jogador tem um alfinete na casa 12 azul e sorteia um dado 2 azul. Se ele escolher a máquina aditiva, ele poderá mover o alfinete para a casa 14 azul. Se escolher a máquina multiplicativa, deverá mover o alfinete para a casa 24 azul. Se, entretanto, o dado sorteado for 2 vermelho, a escolha da máquina multiplicativa levará o alfinete para a casa 24 **vermelha**,

trocando a cor de azul para vermelha. Pelo exame desses exemplos, conclui-se a seguinte regra.

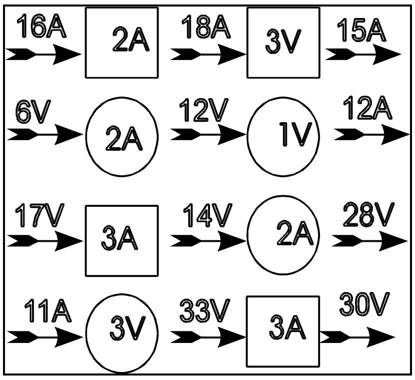
Regra do jogo

- Nas máquinas aditivas, o número do dado é somado ou subtraído do número da entrada para dar o número da saída.
- Nas máquinas multiplicativas, o número do dado é multiplicado pelo número da entrada para dar o número da saída.
- Se o número do dado de uma máquina multiplicativa for **vermelho**, a cor do numero de saída é **diferente** da cor do numero de entrada. Se o número do dado for **azul**, as cores são **iguais**.

Assim, a cor **vermelha** na máquina multiplicativa **troca** a cor do número que passa por ela. Sobre esse ponto, veja o encaminhamento. Note que o zero numa máquina aditiva e o 1 azul numa máquina multiplicativa não produzem movimento do alfinete: a saída fica igual à entrada. Já o 1 vermelho na máquina multiplicativa apenas troca a cor da casa em que está o alfinete. O zero na máquina multiplicativa faz o alfinete retroceder à casa de origem.

Na folha modelo E aparecem ligações em série das máquinas. Nesse caso a saída da primeira máquina é posta como entrada da seguinte. Ao escolher uma das quatro possíveis ligações em série, o jogador coloca os dois dados sorteados dentro das duas máquinas da ligação escolhida. O cálculo da casa para onde o alfinete será movido é feito em duas etapas. Primeiro o jogador entra na máquina da esquerda com o número da casa em que está o alfinete que deseja mover e calcula o número da saída dessa máquina. Com esse número ele entra na máquina da direita e calcula o número da saída. Este é o número da casa para onde o alfinete deve ser movido.

casa para onde o alfinete será movido é feito em duas etapas. Primeiro o jogador entra na máquina da esquerda com o número da casa em que está o alfinete que deseja mover e calcula o número da saída dessa máquina. Com esse número ele entra na máquina da direita e calcula o número da saída. Este é o número da casa para onde o alfinete deve ser movido.

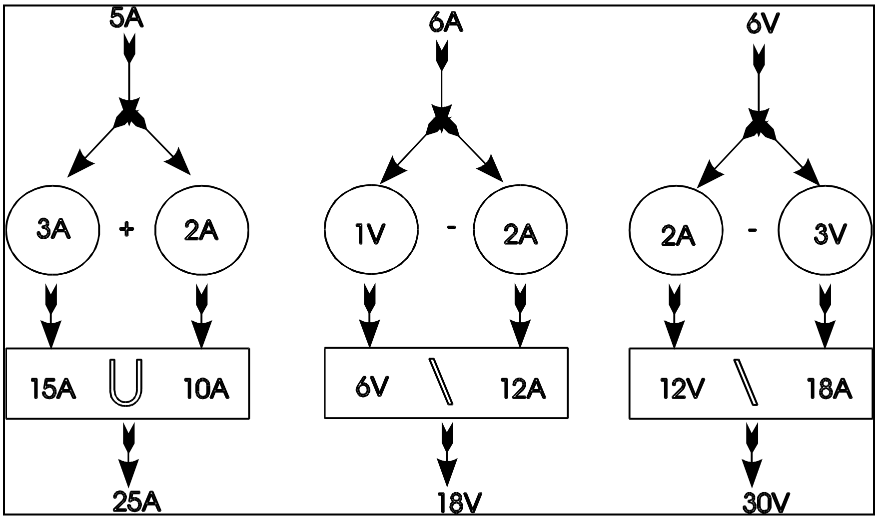


Jogo do Caracol: versão **recreativa**, modalidade **paralelo**.

Essa modalidade é igual à anterior, porém os jogadores devem usar apenas as duas ligações em paralelo da folha modelo E. Também a posição inicial dos alfinetes é modificada. Um deles é posto na casa 1 azul e outro na casa 1 vermelho.

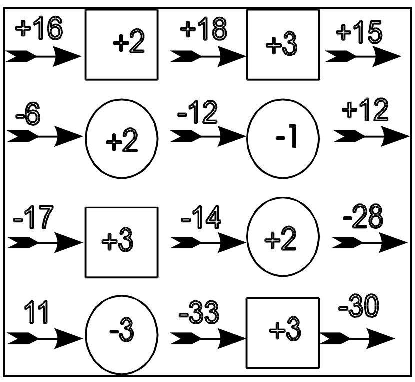
Note que, numa das ligações em paralelo, há um sinal + entre as duas máquinas multiplicativas (paralelo aditivo) e na outra há um sinal – (paralelo subtrativo). Nas ligações em paralelo, o número da casa onde está o alfinete a ser movido é posto na entrada superior da máquina. A partir daí esse número é distribuído para a entrada das duas máquinas multiplicativas. Dentro dessas máquinas o jogador coloca os dados que sorteou. Calcula então, separadamente, as saídas das duas máquinas. Essas saídas são colocadas no retângulo desenhado na parte inferior das ligações em paralelo, chamado **poço**.

Uma vez que as saídas das duas máquinas multiplicativas estejam no poço, o jogador procede como no Jogo de Perdas e Ganhos. (Ver exemplos abaixo)



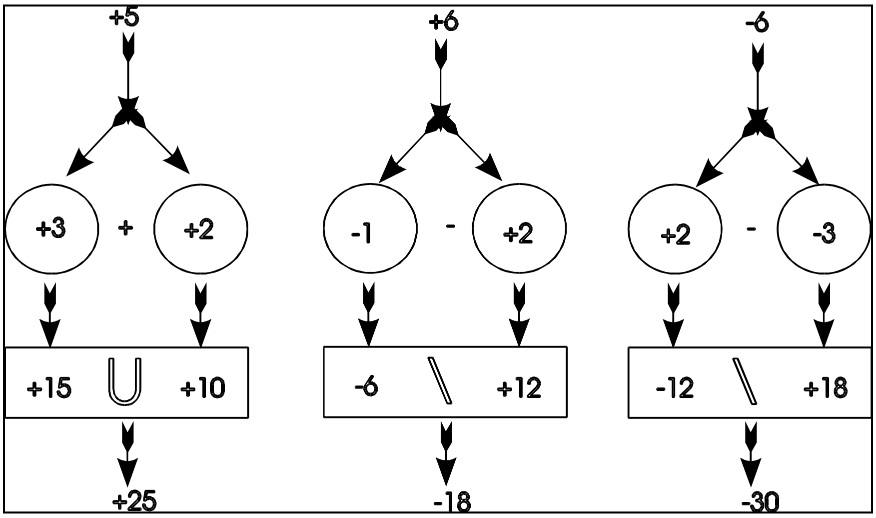
Jogo do Caracol: versão **escolar**, modalidade **série**

Procede-se como na versão recreativa, modalidade série. Usam-se o tabuleiro do modelo D e os dados com faces de fundo branco do modelo F.



Jogo do Caracol: versão **escolar**, modalidade **paralelo**

Procede-se como na versão recreativa, modalidade série. Eis um exemplo.



Encaminhamentos

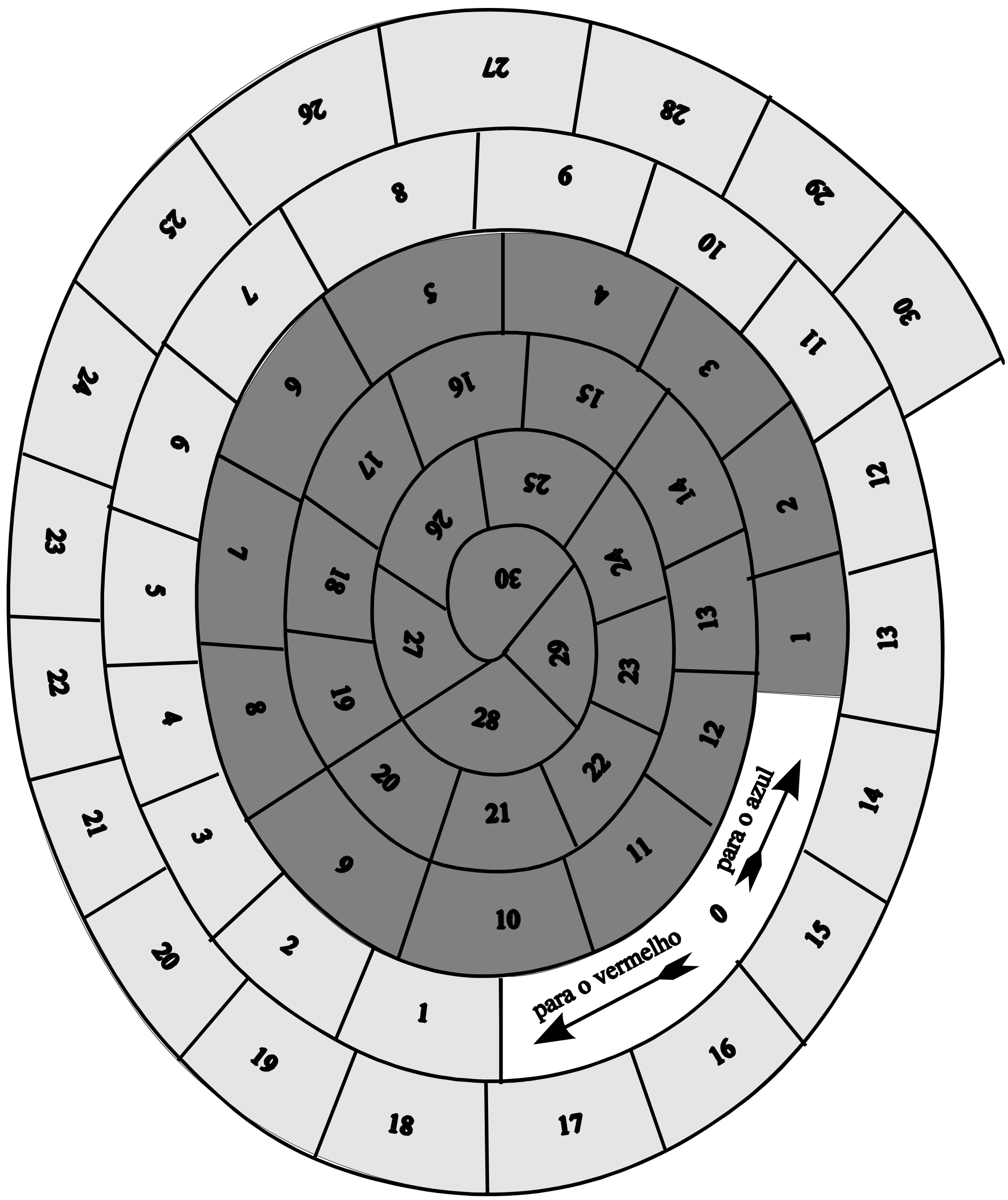
É possível que entre os jogadores haja alunos que já tenham formulado a pergunta *por que menos por menos dá mais?* bem como professores que ainda estejam em busca de uma resposta para ela. Em um dado momento eles se deparam com o operador troca de sinal, definido pela cor vermelha nas máquinas multiplicativas. A essa altura perguntarão: *Por quê? Por que essa regra?* A resposta que recomendamos é a seguinte: *Se você não gostar dessa regra, proponha outra. É um jogo.* ***Você quer jogar?*** É possível que essas pessoas estejam em busca de respostas para si próprias, e não de estratégias para que seus colegas e alunos não incorram nas mesmas dificuldades.

Espera-se que os jogadores terminem por notar que as ligações em paralelo de máquinas multiplicativas obrigam-nos a usarem apenas multiplicações e que, portanto, atingir uma das casas de número 30 vai exigir o desenvolvimento de uma certa habilidade de previsão. Se um alfinete for levado, por exemplo, para a casa 16, 25, ou para qualquer outra que não seja divisor de 30, ele não mais poderá chegar às casas 30.

Também se espera que, nas ligações em paralelo, os jogadores comecem espontaneamente a substituir as duas máquinas multiplicativas por uma única, calculando a soma dos operadores. No paralelo aditivo as saídas das máquinas multiplicativas são acrescentadas uma a outra; no paralelo subtrativo a saída da segunda máquina é retirada da primeira.

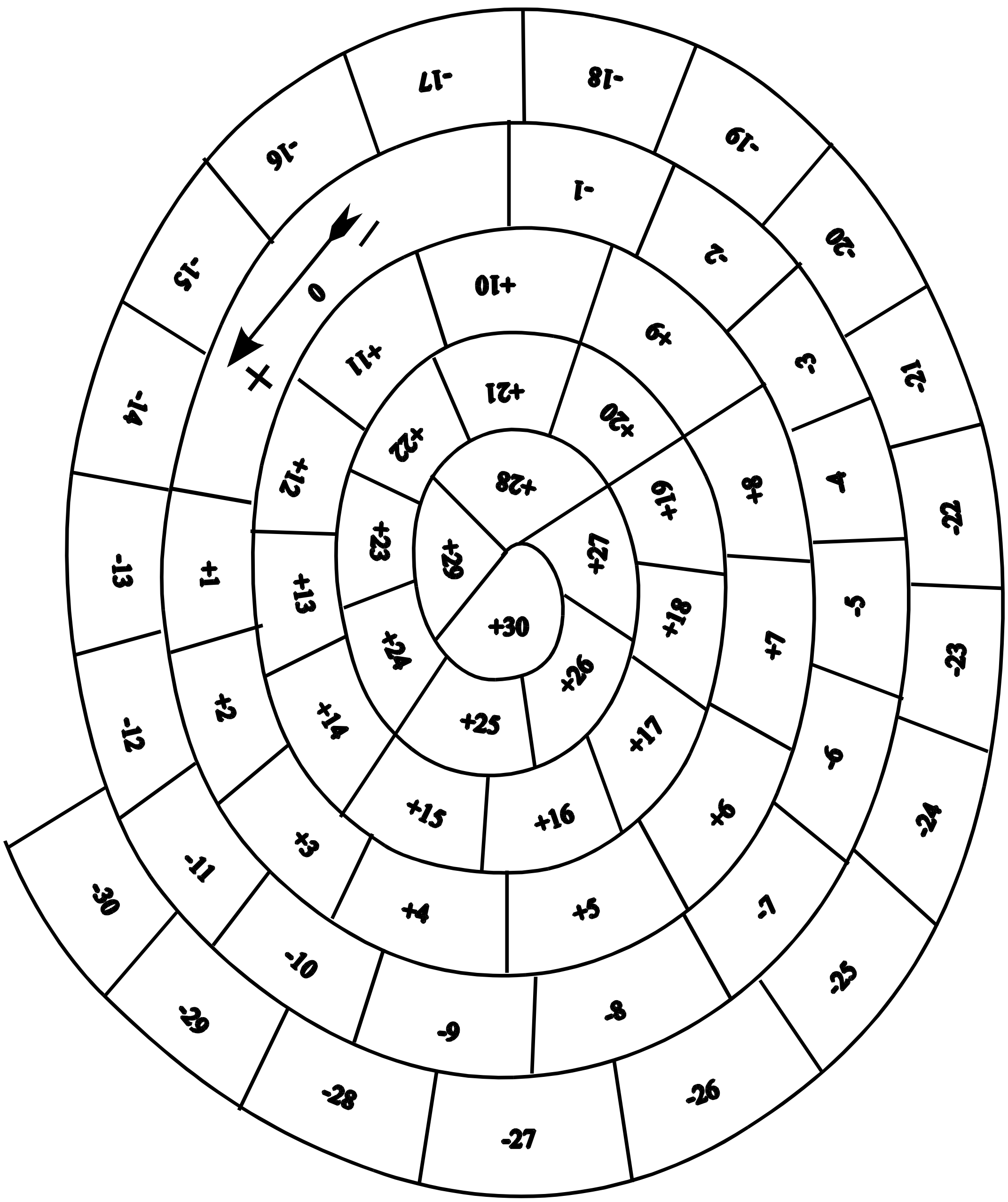
Modelo C

Jogo do Caracol
(Versão recreativa)



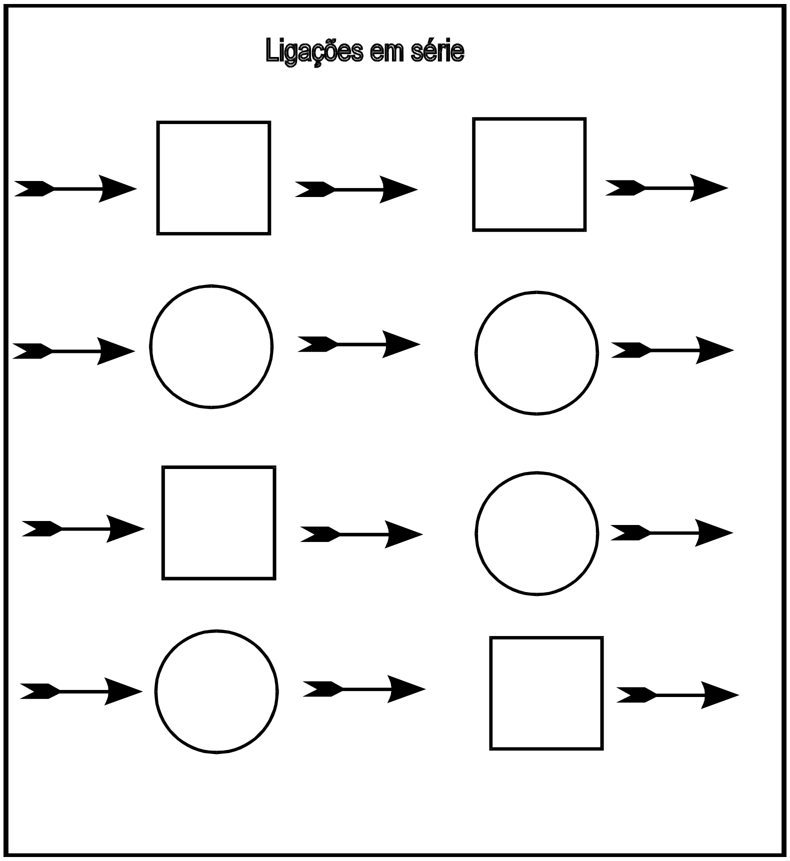
Modelo D

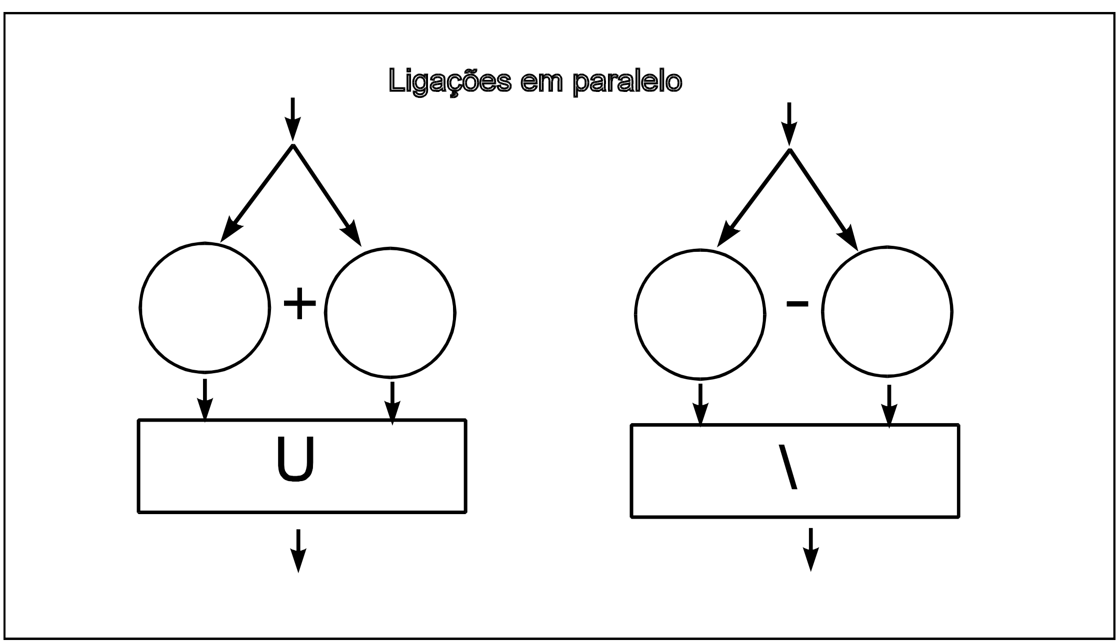
Jogo do Caracol
(Versão escolar)



Modelo E

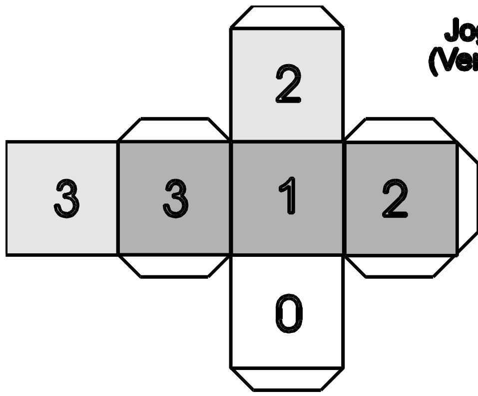
Jogo do Caracol

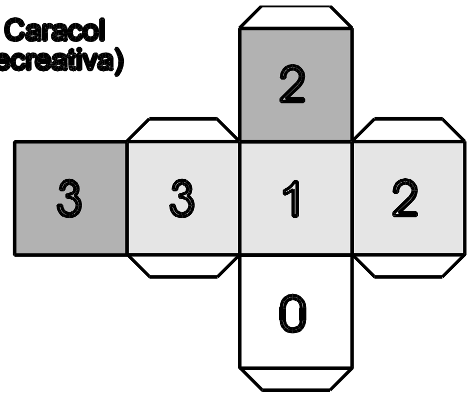




Modelo F

Jogo do Caracol
(Versão recreativa)





Jogo do Caracol
(Versão escolar)