

Lista de exercícios 2 - Métodos numéricos

Novembro 2019

Essa lista de exercícios visa auxiliar o estudo dos conteúdos desenvolvidos em sala de aula, por isso, é composta por questões teóricas e práticas. Para responder algumas questões, é esperado que o estudante pesquise a resposta em alguns livros, artigos, entre outros.

1 Fundamentos

Q1 Obtenha a forma fraca da seguinte equação:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - x = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

submetida a $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$.

Q2 Considere uma barra elástica submetida a um campo de temperaturas $T(x)$. Na presença de um campo de temperaturas, a relação entre tensão e deformação pode ser expressa por:

$$\sigma(x) = E [\varepsilon(x) - \alpha T(x)] \quad (2)$$

sendo α o coeficiente de expansão térmica e E o módulo de Young do material. A barra está submetida a uma carga distribuída axialmente de intensidade $q(x)$. Determine a forma fraca do problema.

Q3 Considere um elemento finito com aproximação cúbica. O comprimento do elemento é igual a 6 e seu primeiro vértice está posicionado em $x = -2$. Os outros nós estão igualmente espaçados dentro do elemento. Pede-se:

- as funções de forma para o elemento finito descrito acima;
- determine uma expressão para aproximação do campo de interesse quando os valores nodais são iguais a $\mathbf{u} = [1 \ 0 \ 2 \ 3]^T$;
- plote o campo de interesse obtido com os valores anteriores.

Q4 Considerando o quadrilátero definido pelos vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$ no plano $\xi - \eta$, construa as funções de forma para uma aproximação quadrática. Plote as funções de forma como superfícies.

Q5 Na solução de problemas de dinâmica estrutural via método dos elementos finitos, a matriz de massa do elemento é expressa como:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3)$$

sendo \mathbf{N} a matriz com as funções de forma. Determine a matriz de massa para um elemento finito unidimensional com aproximação linear de comprimento ℓ e área de seção transversal A .

Q6 A partir da integração numérica via quadratura gaussiana, avalie o valor da integral da função erro (*erf*):

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^2 erf(x) dx \quad (4)$$

utilizando n pontos de integração. Plote a diferença entre o valor exato da integral e o valor avaliado numericamente de $n=1$ a $n=7$.

Q7 Repita o exercício anterior utilizando a quadratura de Gauss-Lobato. Veja: <http://mathworld.wolfram.com/LobattoQuadrature.html>

Q8 Avalie numericamente a integral:

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega} x^2 + y^2 d\Omega \quad (5)$$

sendo Ω definido pelo polígono convexo de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,2)$ e $(-1,2)$. Avalie a integral utilizando $n=1$, $n=4$, $n=9$ e $n=16$ pontos de integração. Organize os resultados em uma tabela e comente.

2 Transferência de calor em sólidos (transiente)

Q9 Considere o problema unidimensional de transferência de calor indicado na Figura 1. A barra de comprimento 1 m é de um material isotrópico cujas propriedades são $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $c = 100 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e $k=1 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Na extremidade esquerda ($x = 0$), aplica-se um fluxo de calor $q(t)$ definido como:

$$q(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases} \quad (6)$$

Na outra extremidade ($x = 1$), a condição é adiabática. Inicialmente, a temperatura da barra é unitária, $T(x,t=0) = 1$. A equação geral que descreve o problema é:

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot (-\mathbf{K} \nabla T) + s = 0 \quad (7)$$

Pede-se:

- A forma fraca do presente problema considerando uma aproximação de primeira ordem para a derivada da temperatura de modo que seja resolvido implicitamente.
- As matrizes e vetores para um elemento finito com aproximação linear no campo de temperaturas.
- Determine o perfil de temperatura ao longo da barra em função do tempo. Plote as informações em um gráfico.

$$q = q(t) \quad \boxed{\text{---} \rightarrow x \text{---}} \quad q = 0 \text{ (adiabática)}$$

Figure 1: Problema de transferência de calor em uma barra.

3 Transferência de calor em sólidos (estacionário)

Q10 Considere o problema indicado na Figura 2 de uma chapa com furo central submetida a um gradiente de temperatura ao longo do eixo x . A aresta esquerda ($x = 0$) está submetida a uma temperatura prescrita $T_1 = 10$; a face oposta ($x = 1$) está submetida a $T_2=1$. Pede-se:

1. a distribuição de temperaturas no sólido
2. a distribuição do fluxo de calor (para a malha com elementos finitos triangulares)

Na resolução numérica do problema, utilize as malhas de elementos finitos indicadas na Figura 3. Para o elemento finito quadrilateral, utilize 4 pontos de Gauss para realizar a integração.

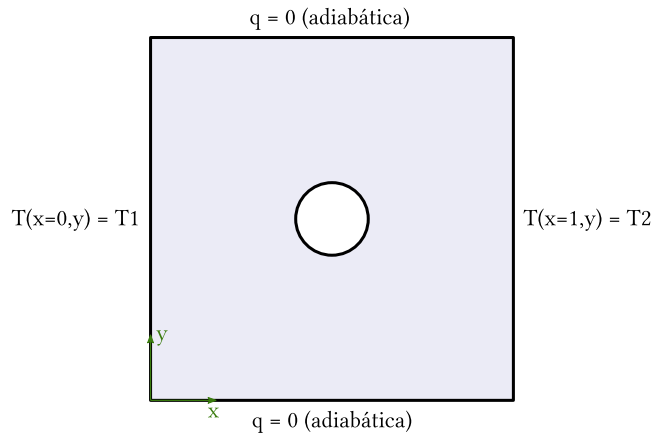


Figure 2: Chapa com furo central exposta a uma variação de temperatura na direção x .

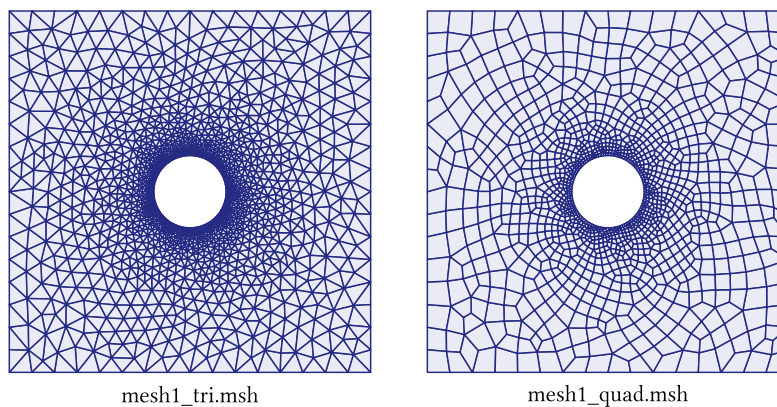


Figure 3: Malha de elementos finitos formada por triângulos e quadriláteros.

4 Equilíbrio de sólidos (treliças)

Q11 Considere a treliça plana com as condições de contorno indicadas na Figura 4. Os elementos possuem mesmo comprimento ($a = 0.3 \text{ m}$) e possuem seção circular com 20 mm de diâmetro. O módulo de Young do material das barras é igual a 210 GPa. Pede-se:

- plote a configuração deformada da estrutura. Se necessário, utilize um fator de escala
- determine os esforços normais atuante em cada uma das barras.

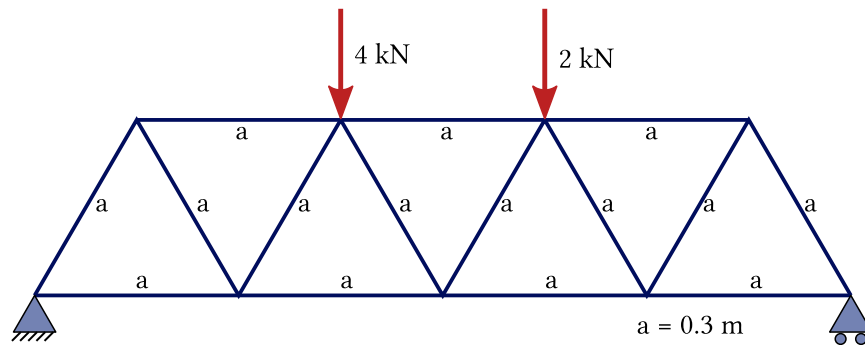


Figure 4: Treliça plana.

5 Equilíbrio de sólidos (chapas)

Desenvolvendo-se a formulação para o problema de equilíbrio em um corpo estático, tem-se as seguintes relações para um elemento finito:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u} = \mathbf{f}^e \quad (8)$$

A matriz \mathbf{K}^e e o vetor \mathbf{f}^e são expressos por:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Gamma_e^t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{d} d\Omega \quad (10)$$

sendo ω_e o volume do elemento, Γ_e^t a superfície com carga distribuída aplicada e $\bar{\mathbf{t}}$ o vetor das cargas distribuídas na superfície do elemento. As matrizes \mathbf{N} , \mathbf{B} e \mathbf{D} são definidas como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \phi_1^e & 0 & \phi_2^e & 0 & \dots & \phi_n^e & 0 \\ 0 & \phi_1^e & 0 & \phi_2^e & \dots & 0 & \phi_n^e \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Q12 A partir das matrizes apresentadas anteriormente, resolva o problema da Figura 5. O problema consiste de uma chapa quadrada de lado 1 m com um furo central de raio 0.1 m. A face inferior ($y = 0$) está restrita na direção y , e a face esquerda na direção x ($x = 0$). No ponto (1,1) aplica-se uma carga concentrada. Considere o material isotrópico com módulo de Young igual a 210 GPa e coeficiente de Poisson 0.3. Pede-se:

- plote a configuração deformada da estrutura. Se necessário, utilize um fator de escala.
- plote o campo de deslocamentos horizontal, vertical e a magnitude. Avalie os resultados considerando as condições de contorno aplicadas.

Resolva o problema considerando as malhas da Figura 3.

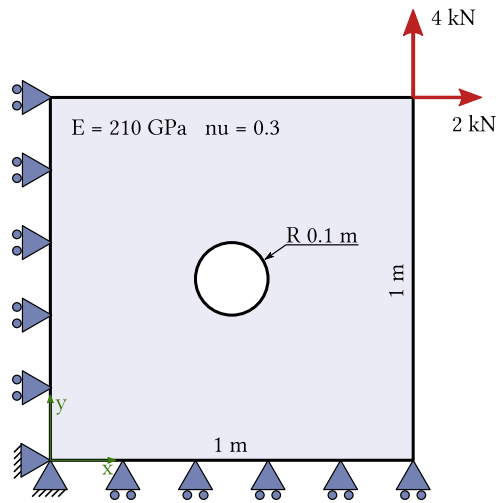


Figure 5: Chapa com furo central.