Mecânica Quântica I - 4302403

$8^{\underline{a}}$ lista

1) a) Sabendo que $S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ e que $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ pode ser escrito em termos de $S_{j\pm}$ e S_{jz} com $j = 1, 2$ onde $S_{j\pm} = S_{jx} \pm iS_{jy}$, mostre que

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$$

b) Mostre que os estados $|1\;\;1\rangle = \uparrow\uparrow$ e $|1\;\;-1\rangle = \downarrow\downarrow$ são auto-estados de S^2, com autovalores apropriados.
c) Mostre que os estados

$$|0\;\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right)$$

e

$$|1\;\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right)$$

são auto-estados de S^2, com autovalores apropriados.
d) Aplique os operadores $S_\pm$ ao estado singleto de spin 0:

$$|0\;\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right).$$

Explique o resultado obtido.
e) Mostre que a ação dos operadores $S_\pm$ no estado

$$|1\;\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right)$$

fornece:

$$S_\pm|1\;\;0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\;\;\pm 1\rangle.$$

2) Dois elétrons estão no estado $|s, m\rangle = |1, -1\rangle$. Numa medida de S_{1z}, quais serão os possíveis valores obtidos e as probabilidades correspondentes.

3) Considere duas partículas com spin 1/2 que interagem através da hamiltoniana $H = \frac{A}{\hbar^2}\vec{S}_1.\vec{S}_2$, onde A é uma constante. Quais são os auto-estados e auto-valores de H? Existe degenerescência?

4) Os *hádrons* são constituídos de partículas elementares, possuindo spin 1/2, denominadas *quarks*. Os *bárions* (próton, neutron, etc) são constituídos de 3 quarks, enquanto que os mésons (píon, káon, etc) são constituídos de um quark e um anti-quark.
a) Quais são os possíveis spins dos mésons?
b) Quais são os possíveis spins dos bárions?

5) Considere a função de onda de um sistema de duas partículas idênticas dada por:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_b(\vec{r}_1)].$$

a) Se Ψ_a e Ψ_b são ortogonais e normalizadas, determine A para que Ψ tambem seja normalizada.
b) Se $\Psi_a = \Psi_b$, quem é A para o caso dos bósons?

6) Considere um sistema de duas partículas idênticas, não interagentes de massa m, cada uma delas sujeita a um potencial harmônico unidimensional $V = m\omega^2 x^2/2$.
a) Em termos dos auto-estados de uma partícula já estudados anteriormente, escreva a função de onda e a auto-energia correspondente ao estado das duas partículas, uma no estado n e outra no estado m, para os casos em que ambas: i) são bósons idênticos, ii) são férmions idênticos.
b) Quais as funções de onda para o estado fundamental e do primeiro estado excitado dessas duas partículas nos casos acima, e quais as energias? Existe degenerescência?
c) Considere agora o caso em que essas duas partículas são férmions, de spin 1/2 e possuem também função de onda de spin. Quais as funções de onda para o estado fundamental e do primeiro estado excitado desses férmions, e quais as energias? Existe degenerescência?

7) Considere dois quarks (partículas de spin 1/2) de massa m interagindo com um potencial harmônico confinante: $V(x_1, x_2) = m\omega^2(x_1 - x_2)^2/2$. Qual é o menor nível de energia do estado de dois elétrons neste potencial no caso que: a) os quarks se encontram no estado singleto de spin? b) os quarks se encontram no estado tripleto de spin? Dica: mude as coordenadas dos dois quarks, x_1, x_2, para as coordenadas relativa $x = x_1 - x_2$, e do centro de massa $X = (x_1 + x_2)/2$.

8) Considere três partículas, uma em cada um dos estados $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ e $\psi_c(x)$. Assumindo que $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ e $\psi_c(x)$ são ortogonais e normalizados, construa os estados de três partículas representando: a) partículas distinguíveis, b) bósons idênticos, c) férmions idênticos. Dica: existe um truque para se construir estados completamente antissimétricos, baseado no determinante de Slater, cuja primeira coluna é $\psi_a(x_1)$, $\psi_b(x_1)$, $\psi_c(x_1)$ etc., a segunda linha é $\psi_a(x_2)$, $\psi_b(x_2)$, $\psi_c(x_2)$ etc., e assim por diante.

9) Discuta qualitativamente o esquema de níveis de energia do átomo de hélio, desprezando a repulsão entre os elétrons, se:
a) os elétrons forem bósons idênticos.
b) os elétrons forem partículas distinguíveis.
c) os elétrons forem férmions indênticos de spin 1/2.

10) Considerando que a função de onda do estado fundamental do átomo de hélio é dada por:

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2),$$

mostre que a)

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle = \frac{5}{4a_0}.$$

Dica: use coordenadas esféricas tal que

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}$$

e integre primeiro em $\vec{r}_2$.

b) Use o resultado de a) para mostrar que a energia de interação dos elétrons no estado fundamental do átomo de hélio é dada por

$$\langle H_{int} \rangle = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle = 34 \text{ eV}.$$

Este é o resultado para correção da energia em primeira ordem da teoria de perturbação . Se somarmos isso aos -109 eV (obtidos como a energia do estado fundamental do átomo de hélio quando desprezamos a energia de repulsão entre os elétrons), obtemos (34-109) eV = -75 eV, muito próximo do valor experimental -79 eV.