

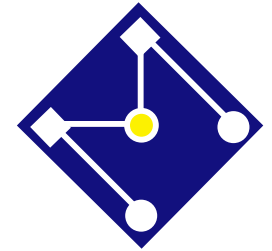


PMR5248

Elementos Finitos Não Linear

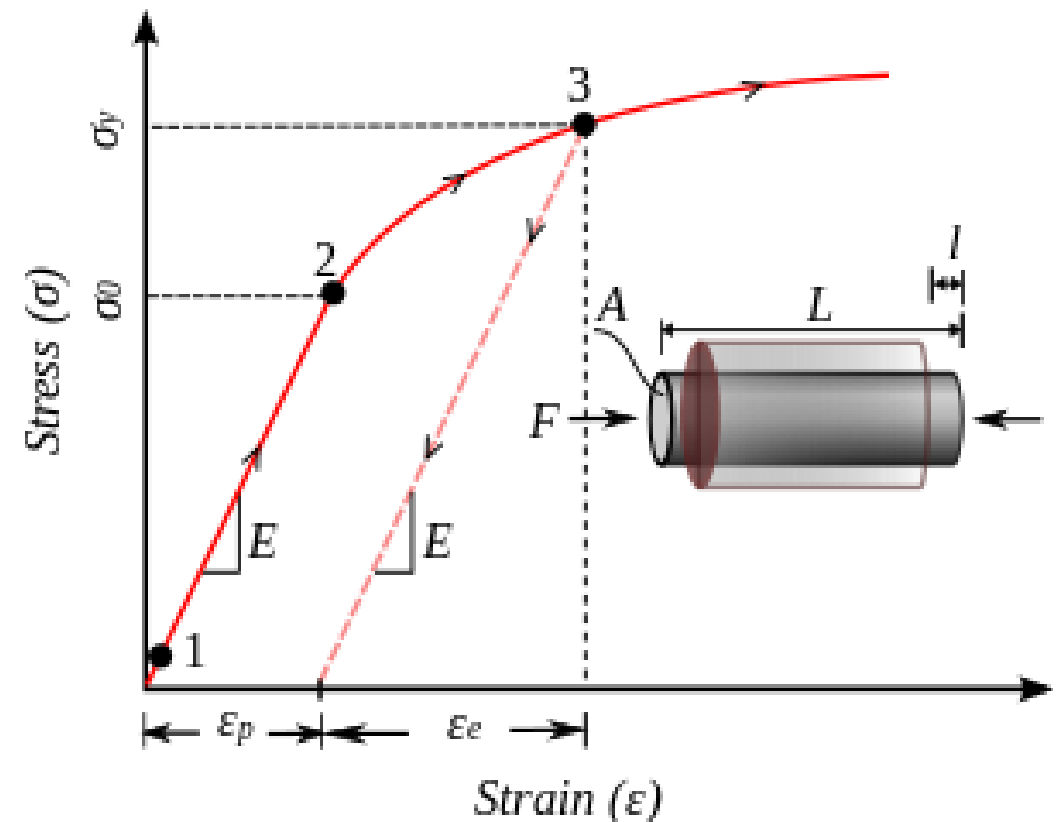
PLASTICIDADE BIDIMENSIONAL

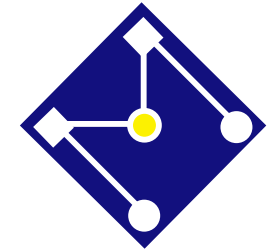
Larissa Driemeier
Marcilio Alves
Rafael T. Moura



O QUE É PLASTICIDADE E ENCRUAMENTO?

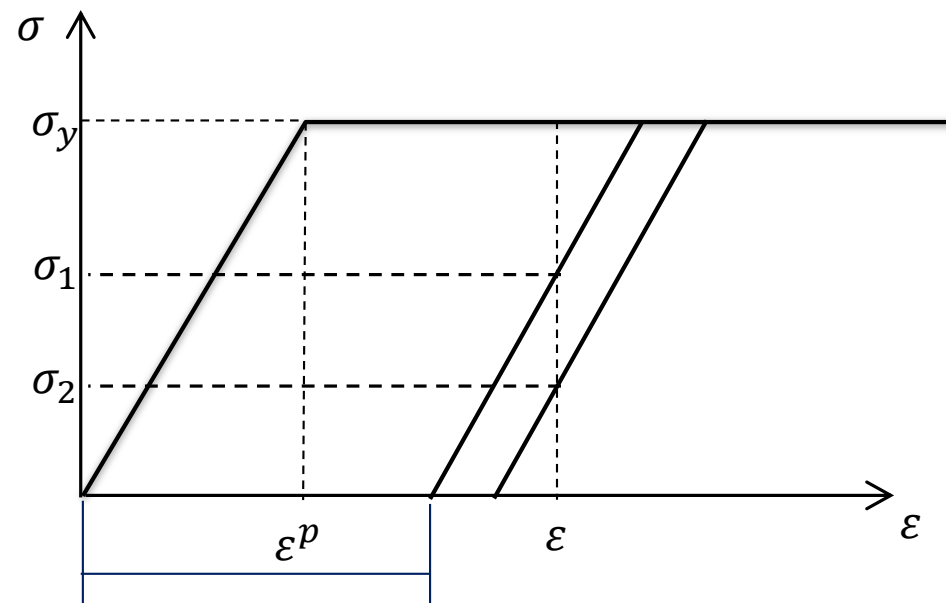
- Plasticidade e encruamento são fenômenos associados tipicamente à resposta de materiais metálicos, identificados nos gráficos da relação tensão-deformação obtidos em ensaios experimentais de tração ou compressão uniaxial. Ambos os fenômenos se manifestam para além do regime elástico. A plasticidade se caracteriza pelo aparecimento de deformações irrecuperáveis, ou permanentes, enquanto que o encruamento fica evidenciado pelo ganho de resistência com o crescimento da deformação.





RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA UNIDIMENSIONAL

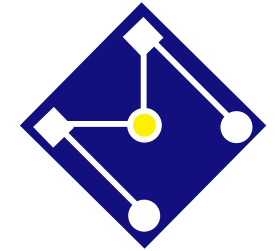
A versão unidimensional do modelo matemático que descreve a relação constitutiva de um meio elastoplástico é de formulação mais simples e permite evidenciar aspectos conceituais importantes para a compreensão da modelagem bi e/ou tridimensional.



Nos modelos elastoplásticos é necessário conhecer a 'história prévia' da deformação plástica para se determinar a intensidade de tensão correspondente a certa intensidade de deformação

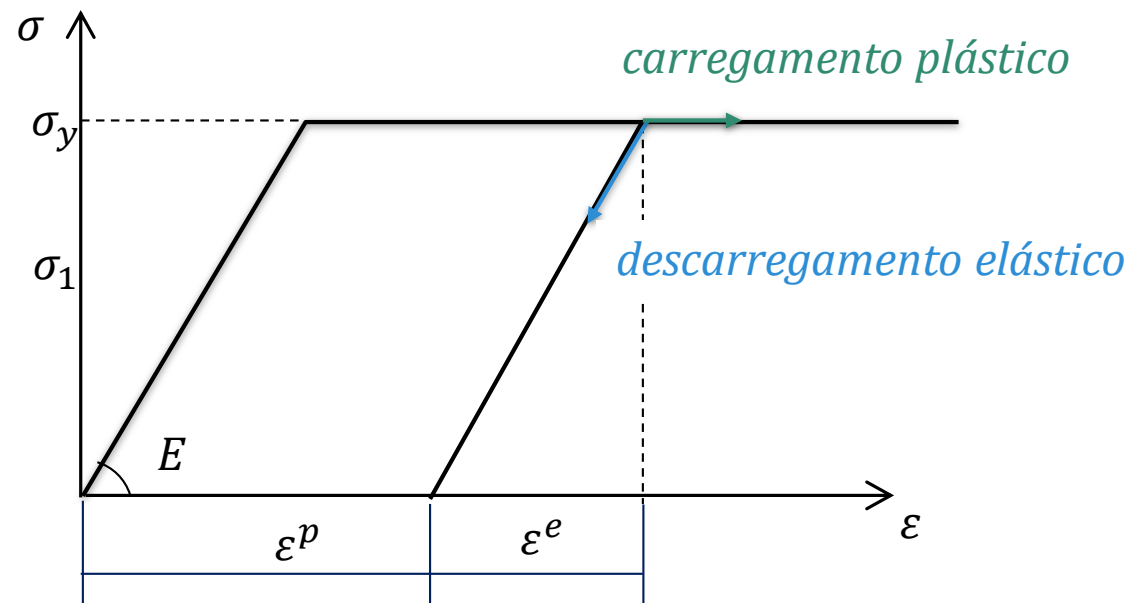
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$



RELAÇÃO CONSTITUTIVA PARA ELASTOPLASTICIDADE PERFEITA

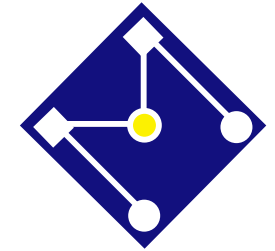
No regime elastoplástico: a deformação total é sempre composta de uma parcela elástica e outra plástica.



$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

$$\varepsilon^p = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon^p$$



MODELO NÃO LINEAR

Carregamento plástico

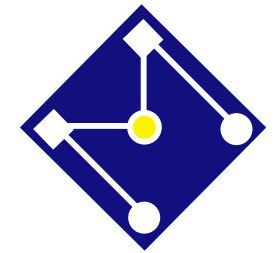
- Corresponde a acréscimos imediatos, de deformação plástica,
- O material continuará em processo de escoamento, com aumento da deformação plástica.

Descarregamento elástico

- Corresponde a níveis de deformação plástica constante.
- O descarregamento virá acompanhado de recuperação elástica.

É importante que o modelo matemático inclua essas possibilidades de modo a registrar corretamente a história de deformação plástica. Nesse sentido, é necessário exprimir a relação constitutiva em termos de variações (*infinitesimais*) de tensão e deformação:

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$



PROBLEMA 3D

A decomposição aditiva do tensor de deformações totais em uma parcela elástica e em outra plástica $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$)

Lei constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$

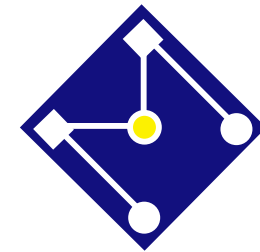
O critério de plastificação $f(q, \sigma_y) = q - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ q : tensão equivalente

A lei de evolução das deformações plásticas, ou lei de plastificação, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, p)$ \mathbf{r} um tensor que estabelece a “direção” do fluxo plástico

O encruamento fica descrito pela lei de evolução adotada para $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ \mathbf{h} é um vetor que determina uma “direção” para o vetor de encruamento

$\dot{\lambda}$ é um escalar que fica determinado a partir das condições gerais de complementaridade e de consistência,

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad f \dot{\lambda} = 0$$



LEI CONSTITUTIVA

Para pequenas deformações, o tensor de deformações pode ser decomposto de forma aditiva como,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

O tensor de tensões é dado por,

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^p) = 2G\varepsilon_d^e + K\varepsilon_V^e I$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

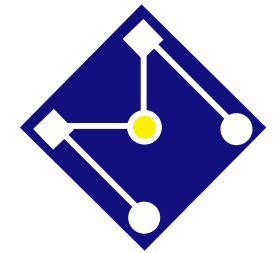
$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}$$

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = K\varepsilon_V$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

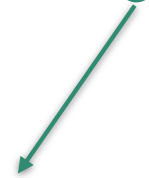
$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$$



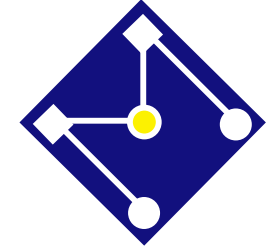
FUNÇÃO DE ESCOAMENTO

$$f(q, \sigma_y) = q - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$$



Vimos que o escoamento em uma barra ocorre quando a tensão causada pela carga real atinge o limite de tensão do material. **A correlação da tensão real com a tensão de escoamento é direta neste caso, porque ambas são uniaxiais.** Mas como podemos correlacionar o estado de tensão triaxial em um componente - cuja resistência do material é medida em testes uniaxiais - para avaliar a tendência de escoamento?

Postulamos algum atributo do estado de tensões para definir esse estado como um todo – um atributo como a tensão máxima ou a energia específica - e, em seguida, comparamos os valores desse atributo para o estado triaxial fornecido com o teste uniaxial. Este postulado é o critério de escoamento baseado no atributo específico selecionado; só é uma teoria útil se suas previsões forem confirmadas por experimento.



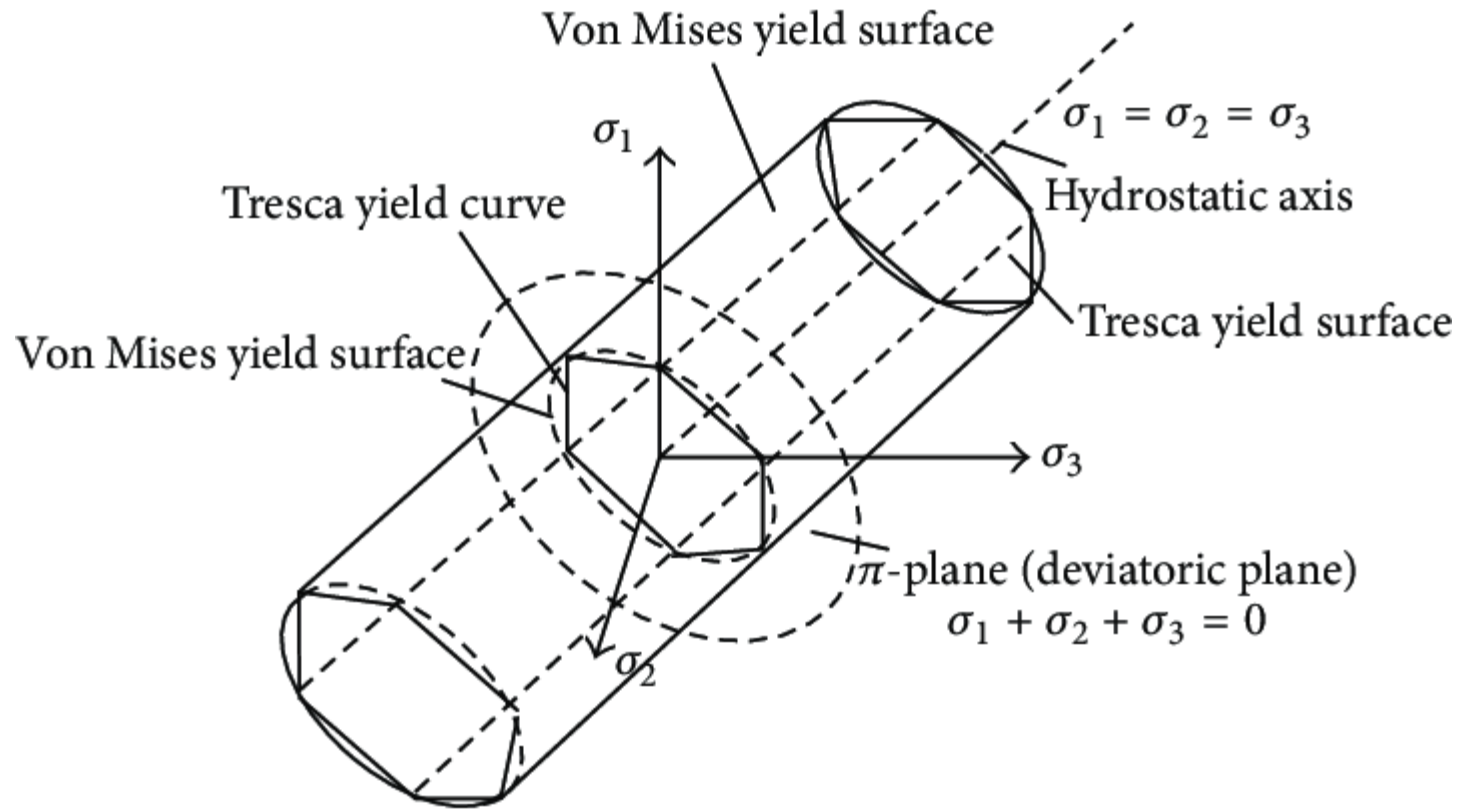
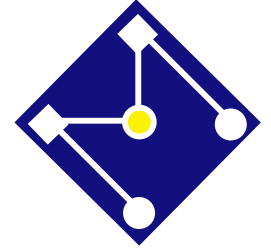
Uma superfície de escoamento é a fronteira entre o regime elástico e o plástico.

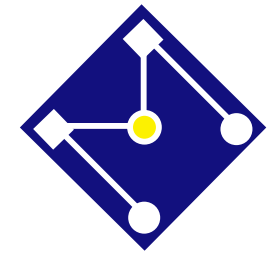
Caso unidimensional



No caso unidimensional, a tensão equivalente é $|\sigma|$. A região elástica é uma linha e a superfície de escoamento é um ponto.

Para 3D, a tensão equivalente é uma combinação dos principais valores de tensão. A região elástica agora é definida por uma superfície.





POR EXEMPLO, VON MISES!

Energia de deformação,
por unidade de volume

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3]$$

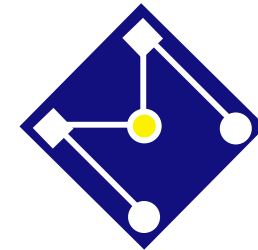
Relação tensão-deformação
(Lei de Hooke)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$



$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

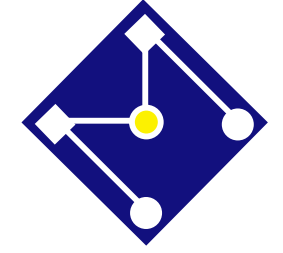
Energia volumétrica (obtida substituindo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ por σ_m),

$$u_v = \frac{3\sigma_m^2}{2E} (1 - 2\nu)$$

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1)$$

Energia desviadora,

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$



$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$

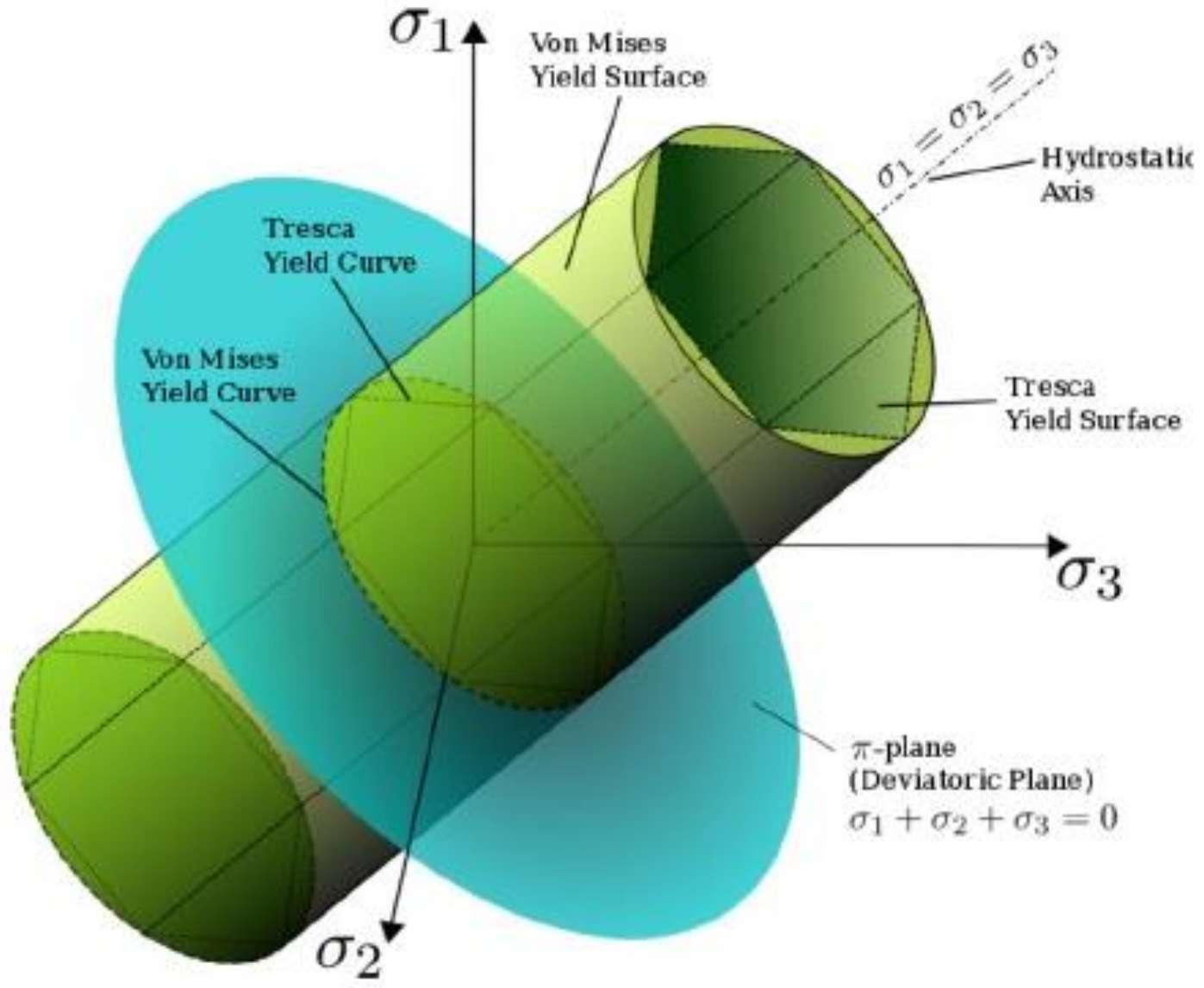
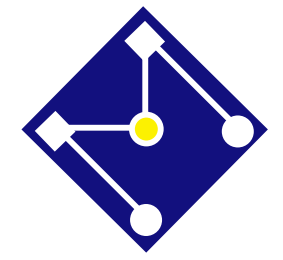
$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E} S_y^2$$

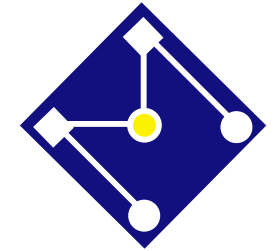
Energia de deformação desviadora em ensaio de tração uniaxial:
 $\sigma_1 = S_y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_1}{3}$

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$

 Tensão equivalente de von Mises.

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$$





RESPOSTA EXPERIMENTAL X MODELO

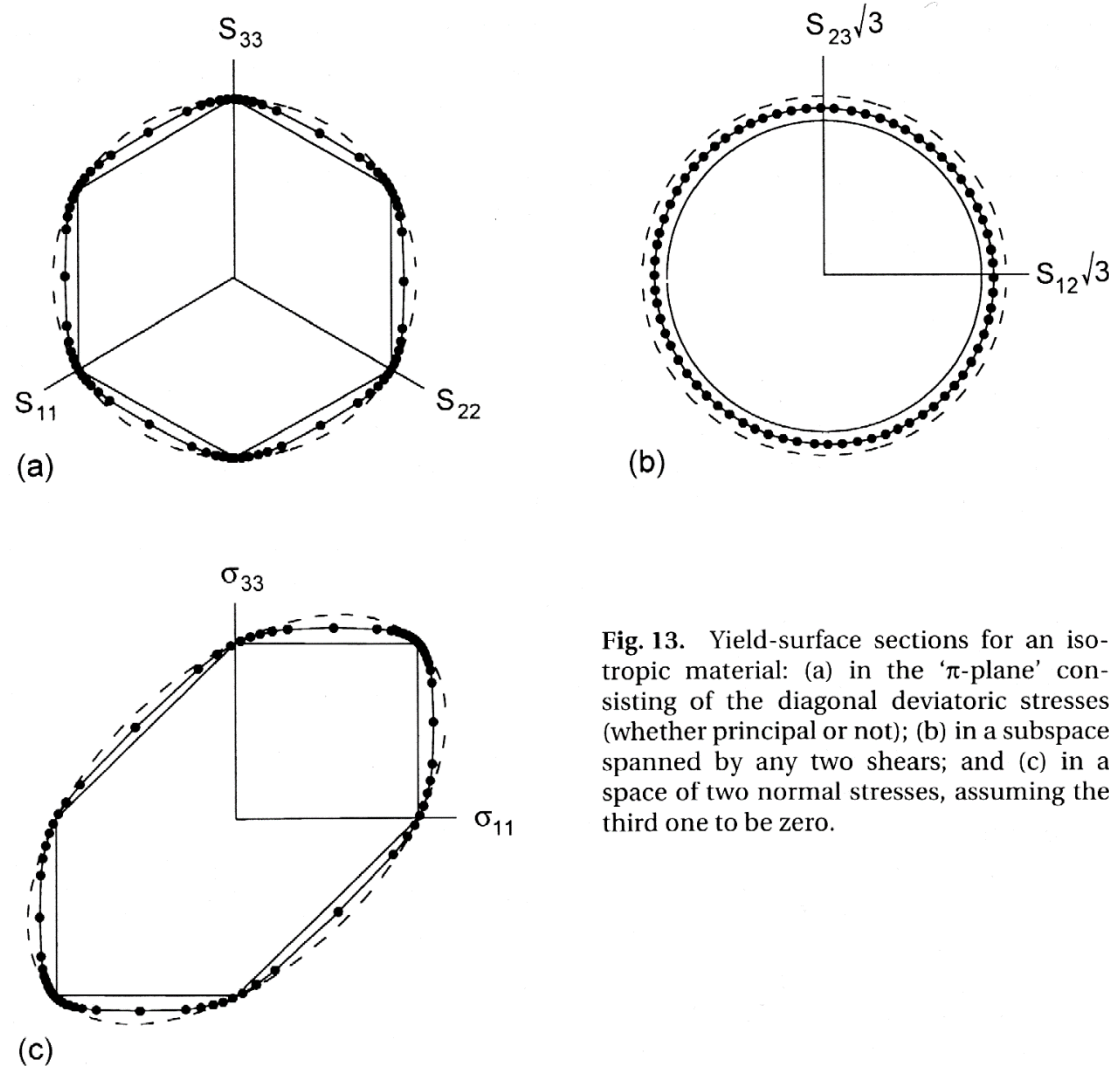
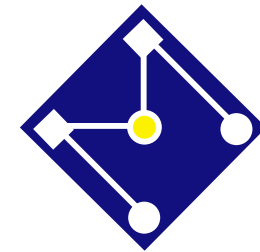


Fig. 13. Yield-surface sections for an isotropic material: (a) in the 'π-plane' consisting of the diagonal deviatoric stresses (whether principal or not); (b) in a subspace spanned by any two shears; and (c) in a space of two normal stresses, assuming the third one to be zero.

Um material isotrópico tem a superfície de escoamento entre Tresca e von Mises.



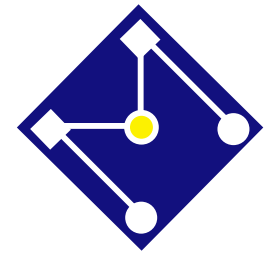
LEI DE ESCOAMENTO PLÁSTICO

Relaciona os incrementos de deformação plástica com os incrementos de tensão, depois do início da plasticidade.

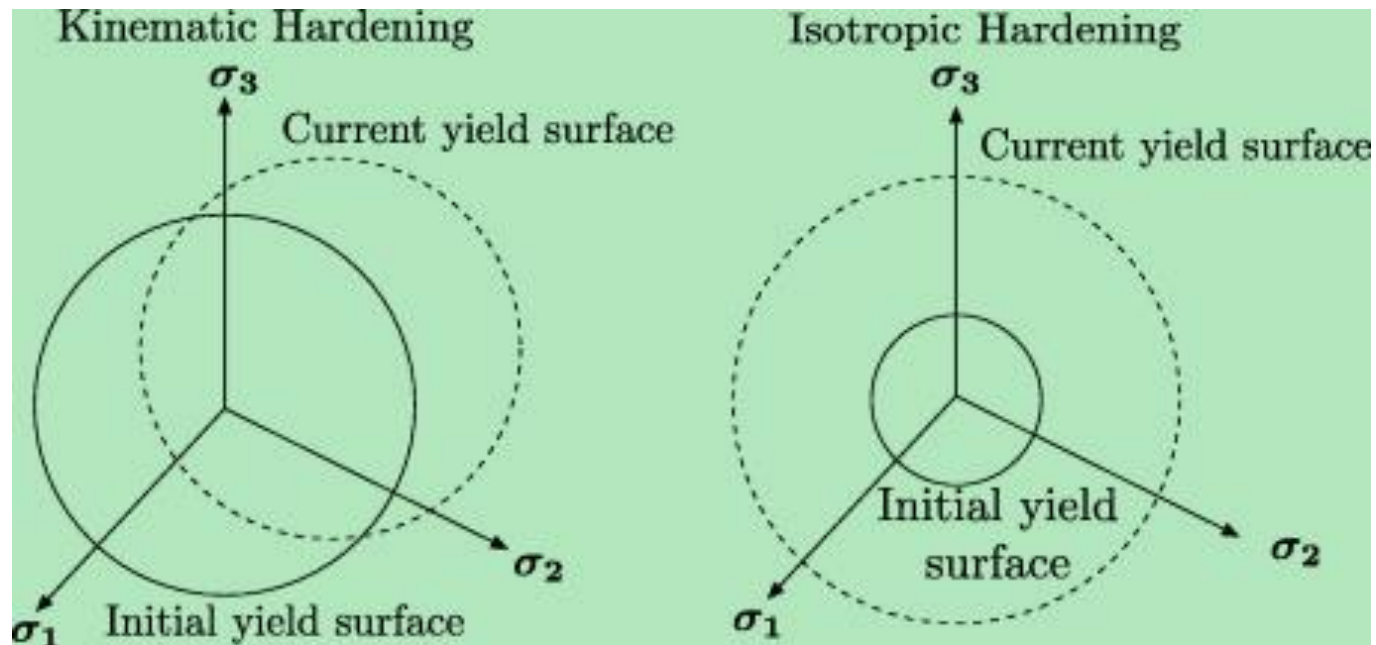
$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r(\sigma, p)$$

Para que a lei $\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = C^{ep} \dot{\varepsilon}$ resulte em um tensor C^{ep} simétrico, r não pode ser arbitrário. A simetria é obtida quando $r = f_T$ e a adoção desta hipótese denomina-se **associatividade**. A associatividade também implica na chamada *regra da normalidade*, pois o tensor taxa de deformação plástica passa a ter a direção da normal à superfície de plastificação

$$r = f_T \rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} f_T$$

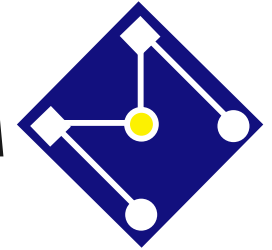


LEI DE ENCRUAMENTO



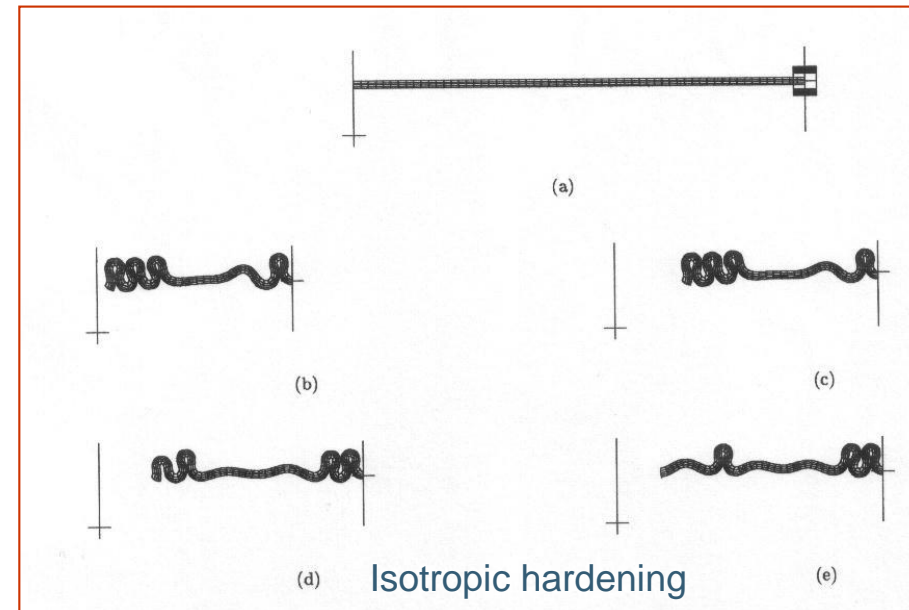
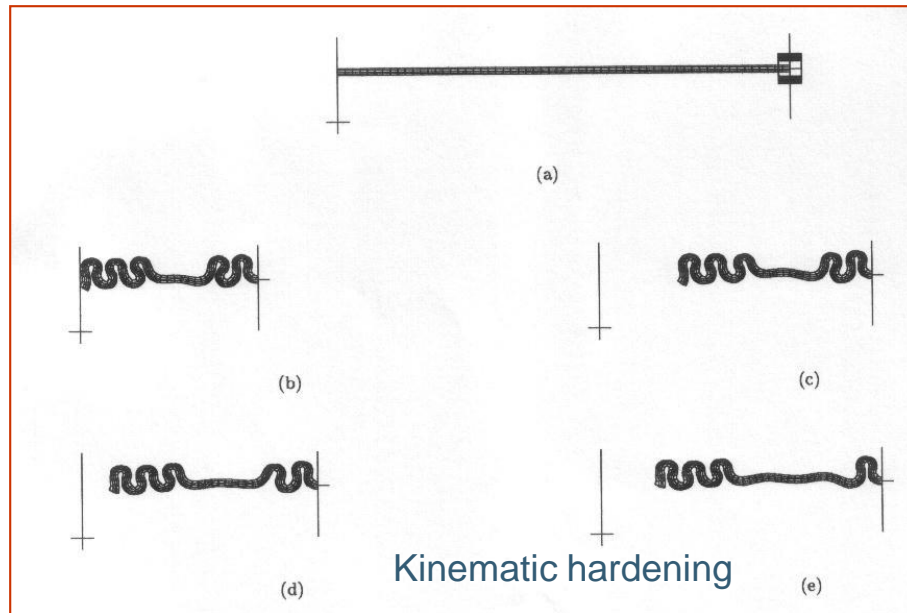
Lei de encruamento associativa, por deformação plástica acumulada:

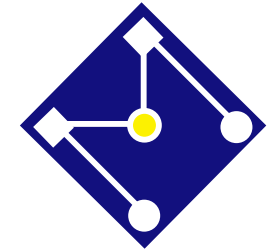
$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} h(\sigma, \bar{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}^p\|$$



INFLUÊNCIA DO ENCRUAMENTO NA FLAMBAGEM

Aluminium tubes impacted against a rigid wall
 $E=2,2\text{kJ}$, (b) $V_0=5\text{m/s}$... (e) $V_0=100\text{m/s}$





VON MISES COM ENCRUAMENTO ISÓTROPPO

Lei linear elástica,

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = C^{ep} \dot{\varepsilon}$$

Função de escoamento,

$$f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = \sqrt{3J_2} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$$

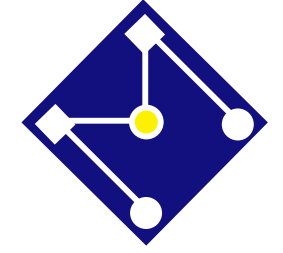
tensão equivalente de von Mises: $q = \sqrt{3J_2}$

Lei de evolução plástica associativa,

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} N = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s}{\|s\|}$$

Lei de encruamento associativa,

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}^p\| = \dot{\lambda}$$



$$\Delta \epsilon = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$$

$$\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} = \epsilon_n^e + \Delta \epsilon$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}} = \bar{\epsilon}_n^p \implies \sigma_{y n+1}^{\text{trial}} = \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p) = \sigma_{y n}$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{D}^e : \epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2G \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}, \quad p_{n+1}^{\text{trial}} = K \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}$$

$$f(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}, \sigma_{y n}) \leq 0$$

Sim

Não

$$\epsilon_{n+1}^e = \epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}} = \bar{\epsilon}_n^p$$

$$\sigma_{y n+1} = \sigma_{y n+1}^{\text{trial}} = \sigma_{y n}$$

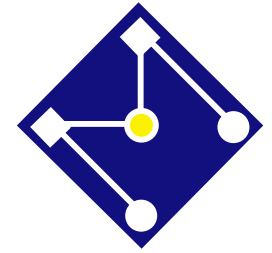
$$\epsilon_{n+1}^e = \epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta \gamma$$

$$\sqrt{3 J_2(\mathbf{s}_{n+1})} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 0,$$

for ϵ_{n+1}^e , $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$ and $\Delta \gamma$ and where

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}(\epsilon_{n+1}^e) = 2G \text{dev}[\epsilon_{n+1}^e]$$



VON MISES – FASE DE CORREÇÃO

$$\epsilon_{v n+1}^e = \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}$$

$$\epsilon_{d n+1}^e = \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}$$

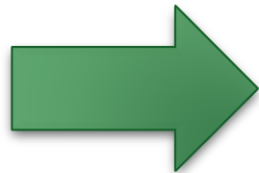


$$p_{n+1} = p_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}$$

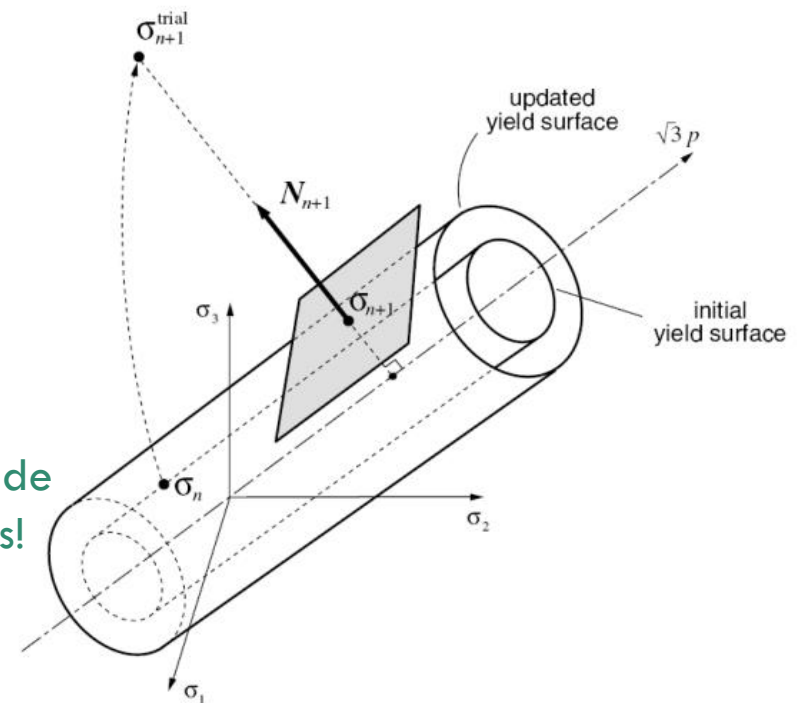


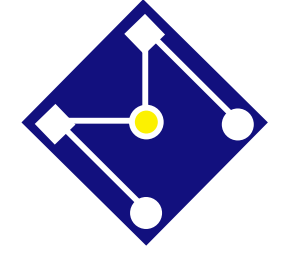
$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}\right) \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}$$



$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|}$$

Tensões desviadoras e de tentativa são colineares!



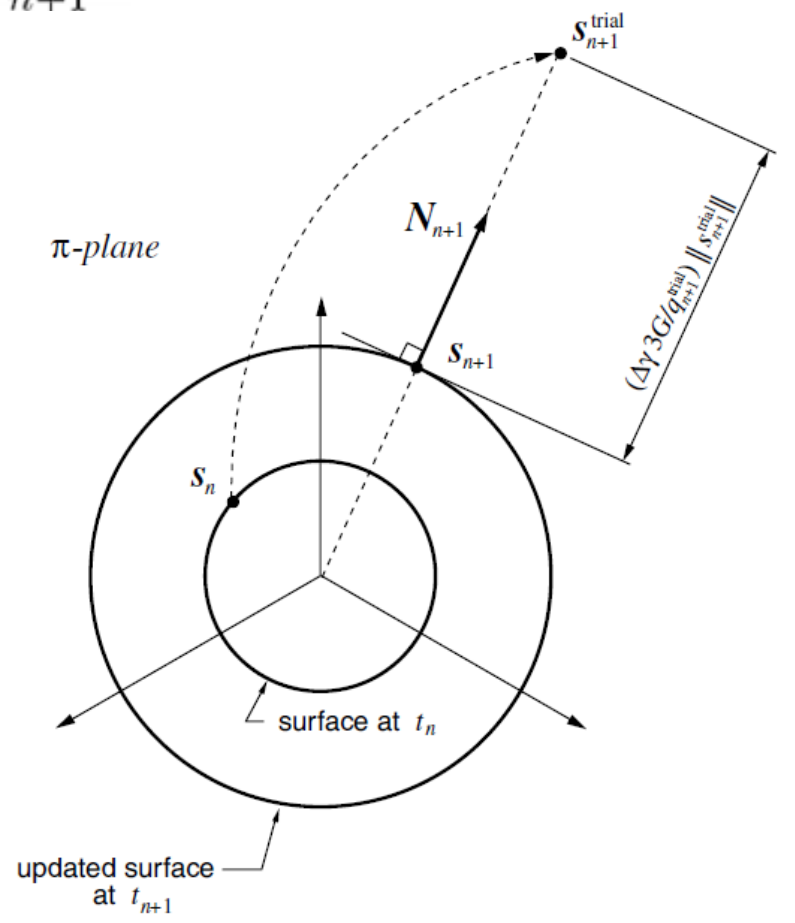


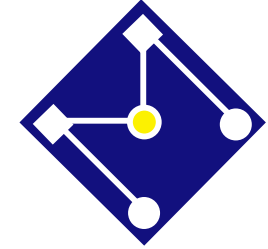
$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} 2G \right) \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} 2G \right) \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \\ &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{trial}}} 3G \right) \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}, \end{aligned}$$

$$q_{n+1}^{\text{trial}} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}})}$$





(i) Elastic predictor. Given $\Delta \epsilon$ and the state variables at t_n , evaluate the *elastic trial state*

$$\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} := \epsilon_n^e + \Delta \epsilon$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}} := \bar{\epsilon}_n^p$$

$$p_{n+1}^{\text{trial}} := K \epsilon_{v \ n+1}^{e \text{ trial}}; \quad s_{n+1}^{\text{trial}} := 2G \epsilon_{d \ n+1}^{e \text{ trial}}$$

$$q_{n+1}^{\text{trial}} := \sqrt{\frac{3}{2} s_{n+1}^{\text{trial}} : s_{n+1}^{\text{trial}}}$$

(ii) Check plastic admissibility

$$\text{IF } q_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}}) \leq 0$$

$$\text{THEN set } (\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} \text{ and EXIT}$$

(iii) Return mapping. Solve the equation

$$f(\Delta \gamma) \equiv q_{n+1}^{\text{trial}} - 3G \Delta \gamma - \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta \gamma) = 0$$

for $\Delta \gamma$ using the Newton–Raphson method – GOTO Box 7.4 – and update the state variables

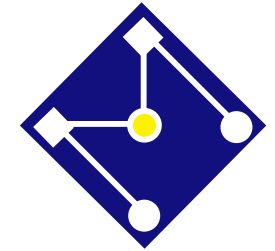
$$p_{n+1} := p_{n+1}^{\text{trial}}; \quad s_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta \gamma 3G}{q_{n+1}^{\text{trial}}}\right) s_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\sigma_{n+1} := s_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}$$

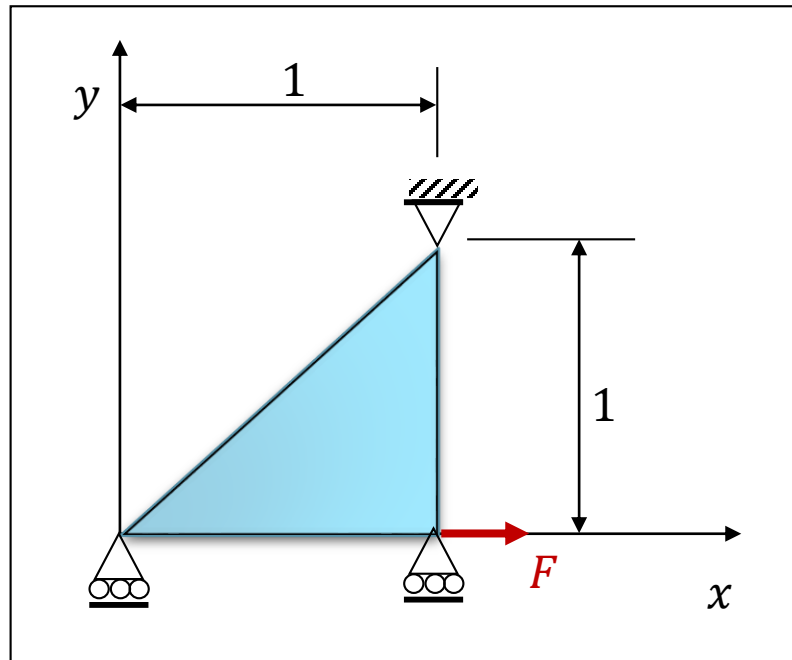
$$\epsilon_{n+1}^e = \frac{1}{2G} s_{n+1} + \frac{1}{3} \epsilon_{v \ n+1}^{e \text{ trial}} \mathbf{I}$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p := \bar{\epsilon}_n^p + \Delta \gamma$$

(iv) EXIT



EXEMPLO

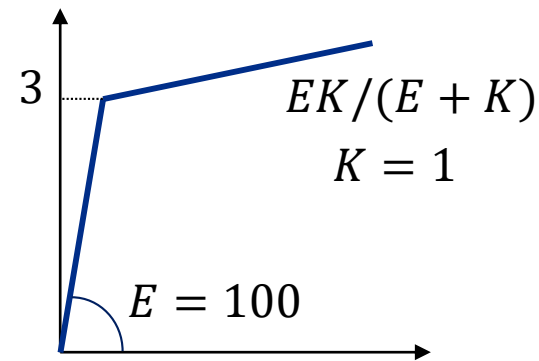


Considere:

Deformação plana

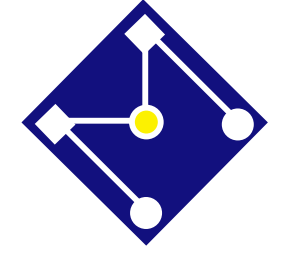
$\nu = 0,3$ e $t = 1$

Lei constitutiva



Plasticidade de von Mises com encruamento linear:

$$f = \sqrt{3J_2} - (\sigma_{y0} + K\bar{\epsilon}^p) \leq 0$$

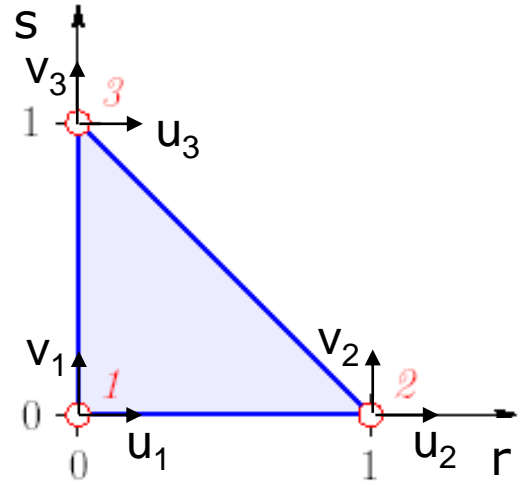
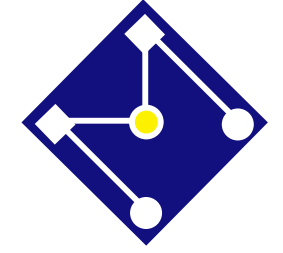


Deformação plana,

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$



Funções de interpolação:

$$\begin{aligned}
 h_1(r, s) &= (1 - r - s) \\
 h_2(r, s) &= r \\
 h_3(r, s) &= s
 \end{aligned}$$

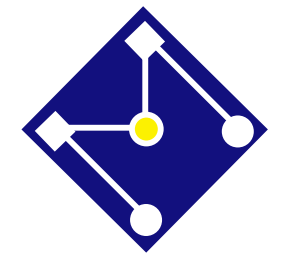
$$\begin{aligned}
 u(r, s) &= (1 - r - s)u_1 + ru_2 + su_3 \\
 x(r, s) &= (1 - r - s)x_1 + rx_2 + sx_3
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

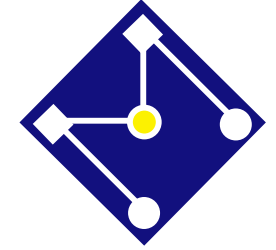
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$



$$K = \int_0^{1-r} \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det J dr ds t =$$

$$0,673 \times 100 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0,429 & -0,429 \\ -1 & 1,286 & -0,286 & 0,286 & -0,714 & 0,429 \\ 0 & -0,286 & 0,286 & -0,286 & 0,286 & 0 \\ 0 & 0,286 & -0,286 & -0,286 & -0,286 & 0 \\ 0,429 & -0,714 & 0,286 & 0,286 & 1,286 & -1 \\ -0,429 & 0,429 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



F=1

Deslocamentos não nulos: $u_1 = u_2 \cong 0,052$

Deformação:
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,052 \end{pmatrix}$$

Estado de tentativa: o passo é elástico

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{e,trial} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,052 \end{pmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{p,trial} = 0$$

Tensão de tentativa:

$$\boldsymbol{\sigma}_1^{trial} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_1^{e,trial} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

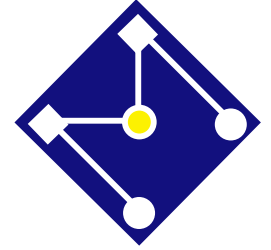
Para nosso exemplo
em particular:

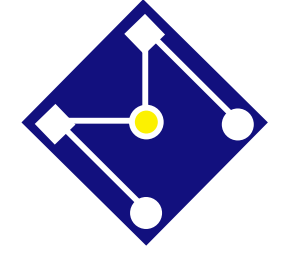
$$\sigma_1^{trial} = s_1^{trial}$$

$$3J_2^{trial} = \frac{3}{2} s_{ij}^{trial} s_{ij}^{trial} = \frac{3}{2} 4 = 6$$

$$f = \sqrt{6} - (3 + 1 \times 0) = -0,5505 \leq 0$$

$$\therefore \boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,052 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_1^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$





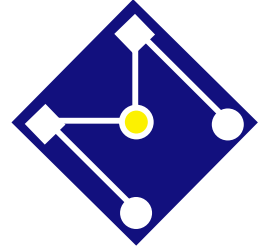
$$\mathbf{p}^{\text{int}} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dr \, ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reações

$$\mathbf{p}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}^{\text{int}} - \mathbf{p}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$$

F=2



Deslocamentos não nulos:

$$u_1 = u_2 \cong 0,104$$

Deformação:

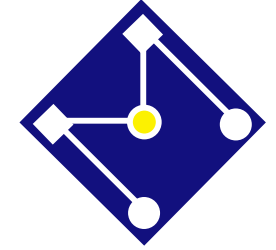
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,104 \end{pmatrix} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,052 \end{pmatrix}$$

Estado de tentativa: o passo é elástico

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^{e,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,052 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,052 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,104 \end{pmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{p,trial} = \mathbf{0}$$

Tensão de tentativa:

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{trial} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_2^{e,trial} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \frac{3}{2} s_{ij}^{trial} s_{ij}^{trial} = \frac{3}{2} 16 = 24$$



$$f^{trial} = \sqrt{24} - (3 + 1 \times 0) = 1,8989 > 0$$

Fase de correção:

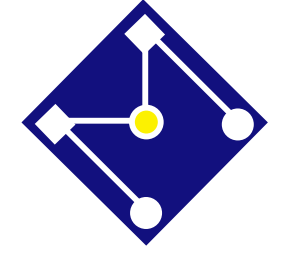
$$\Delta\gamma = \frac{f^{trial}}{3G + K} = \frac{1.8989}{3 \times 38,4615 + 1} = 0,0163$$

$$G = \frac{E}{2(\nu + 1)} = \frac{100}{2(0,3 + 1)} = 38,4615$$

$$\bar{\epsilon}_2^p = 0,0163$$

$$\mathbf{s}_2 = \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{\sqrt{3J_2^{trial}}} \right) \mathbf{s}_2^{trial} = \left(1 - \frac{0,0163 \times 3 \times 38,4615}{\sqrt{24}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,4629 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_2$$



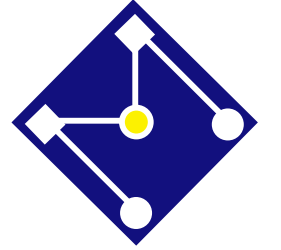
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1}{2G} \mathbf{s} = \frac{1}{2 \times 38,4615} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,4629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,032 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^p = \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,104 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,032 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,072 \end{pmatrix}$$

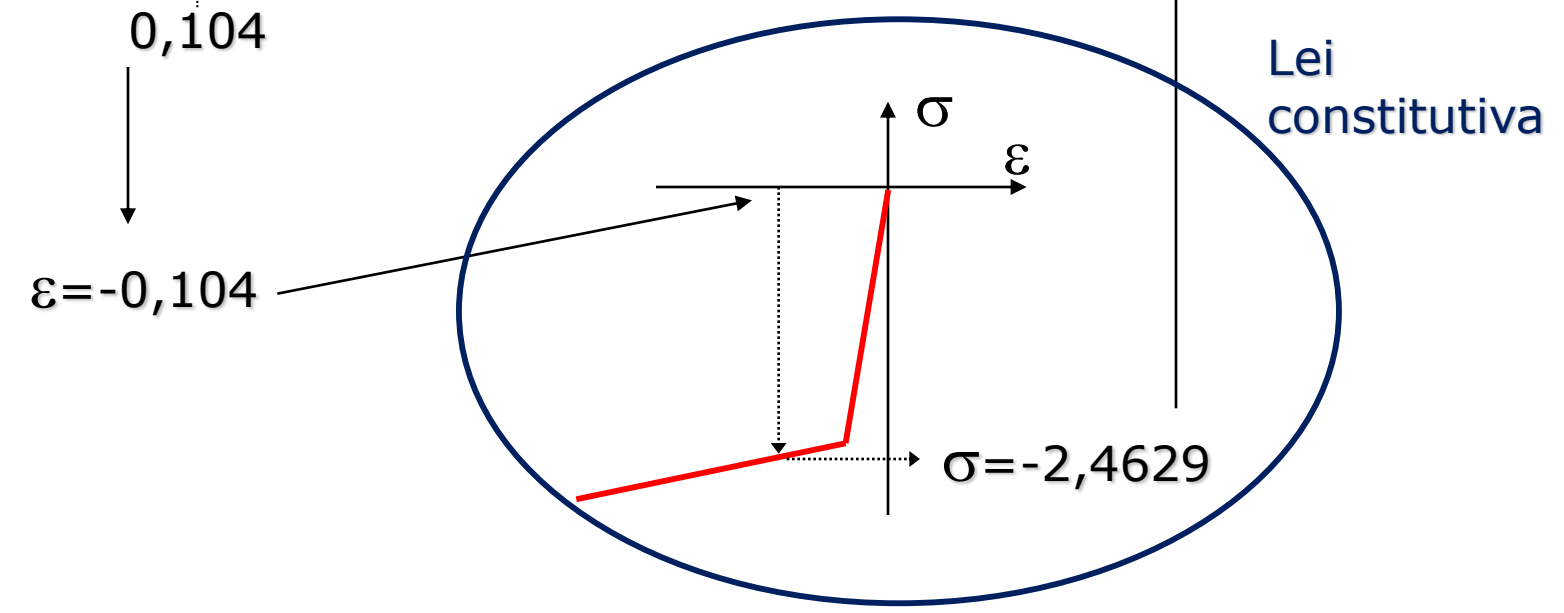
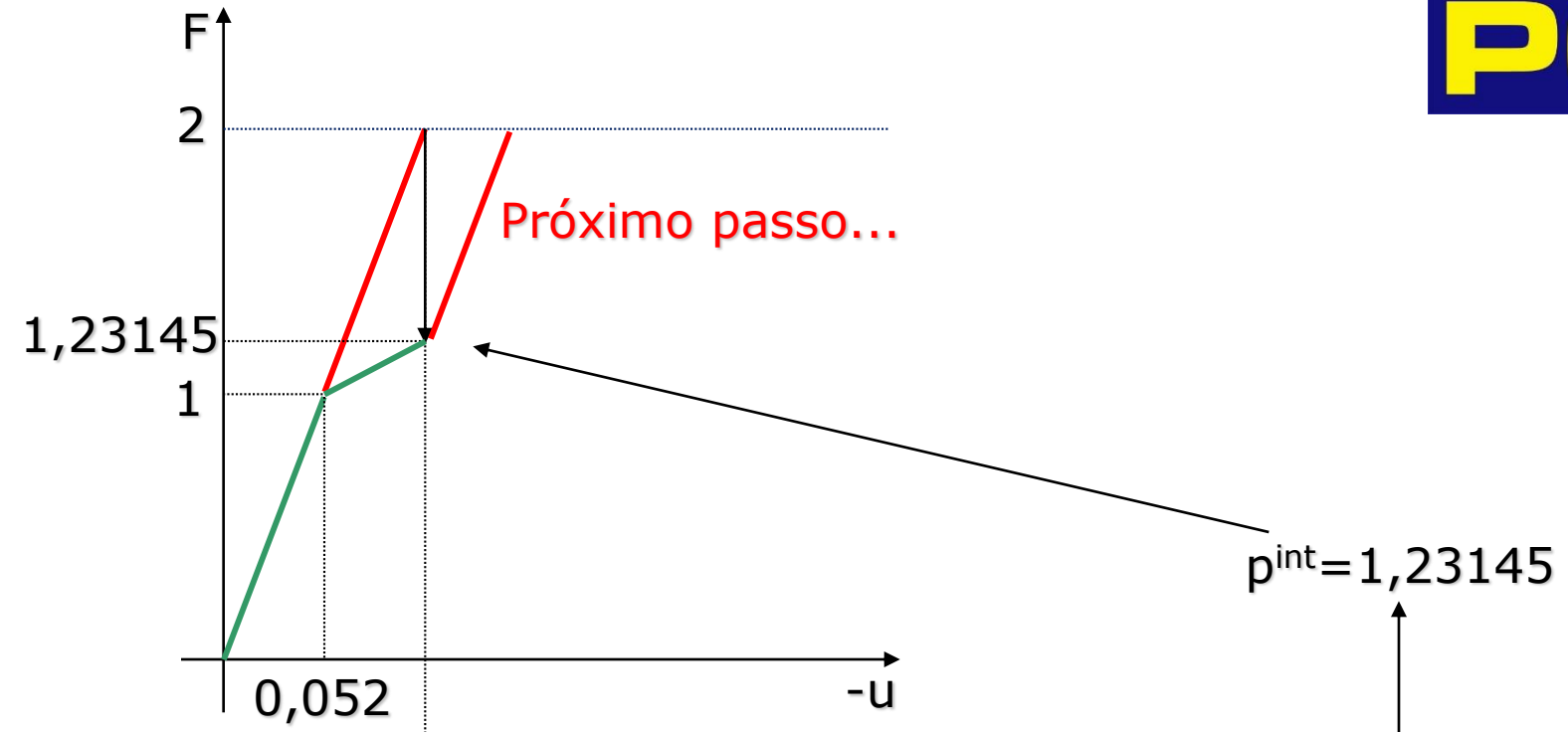
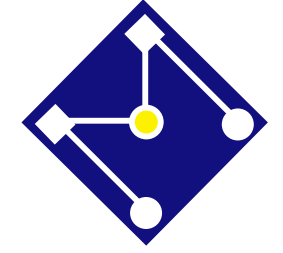
$$\mathbf{p}^{\text{int}} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dr \, ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,23145 \\ -1,23145 \\ 1,23145 \\ -1,23145 \\ 1,23145 \end{pmatrix}$$

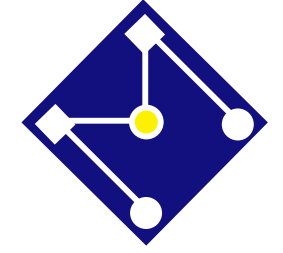
Reações

$$\mathbf{p}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

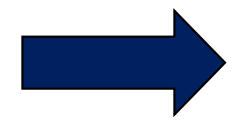


$$\mathbf{r} = \mathbf{p}^{\text{int}} - \mathbf{p}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,76855 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





$$\Delta \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,76855 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

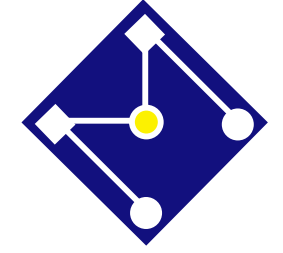


Deslocamentos não nulos:
 $\Delta u_1 = \Delta u_2 \cong 0,03996$

Deformação:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{2_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,03996 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{2_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,14396 \end{pmatrix}$$



Estado de tentativa: o passo é elástico

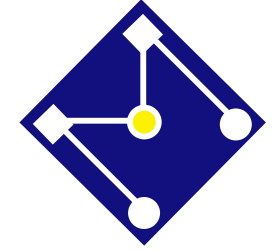
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^{e,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{2_2}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{2_1}^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,14396 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,072 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,07196 \end{pmatrix}$$

Tensão de tentativa:

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{trial} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_2^{e,trial} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,7679 \end{pmatrix} \quad \frac{3}{2}s_{ij}^{trial}s_{ij}^{trial} = \frac{3}{2}7,6613 = 11,492$$

$$f^{trial} = \sqrt{11,492} - (3 + 1 \times 0,0163) = 0,37369 > 0$$

Fase de correção:

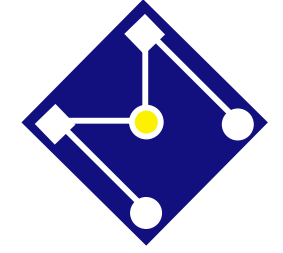


$$\Delta\gamma = \frac{f^{trial}}{3G + K} = \frac{0.37369}{3 \times 38,4615 + 1} = 0,003211$$

$$\bar{\varepsilon}_2^p = 0,0163 + 0,003211803 = 0,0195108$$

$$s_2 = \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{\sqrt{3J_2^{trial}}} \right) s_2^{trial} = \left(1 - \frac{0,003211 \times 3 \times 38,4615}{\sqrt{11,492}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,7679 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,46538 \end{pmatrix} = \sigma_2$$



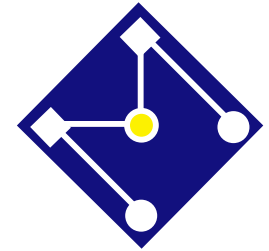
$$\mathbf{p}^{\text{int}} = \int_0^{1-r} \int_0^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dr \, ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,23269 \\ -1,23269 \\ 1,23269 \\ -1,23269 \\ 1,23269 \end{pmatrix}$$

Reações de apoio

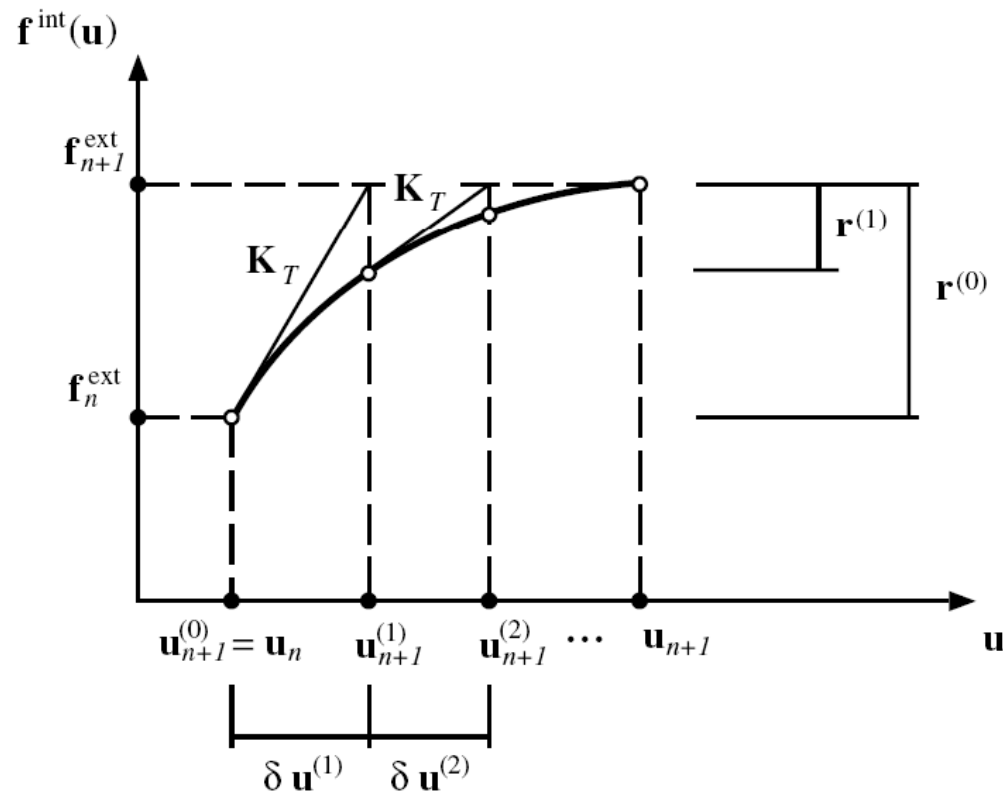
$$\mathbf{p}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

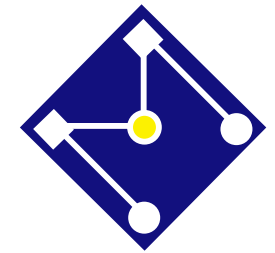
Muito lentamente a resposta vai tendendo ao equilíbrio!!!!





MATRIZ TANGENTE





EXERCÍCIOS

- Deduza a matriz tangente para o modelo linear de plasticidade de von Mises

$$\begin{aligned} D^{ep} &= D^e - \frac{\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{trial}}} \mathbf{I}_d + 6G^2 \left(\frac{\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{trial}}} - \frac{1}{3G + H} \right) \bar{N}_{n+1} \otimes \bar{N}_{n+1} \\ &= 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{trial}}} \right) \mathbf{I}_d \\ &\quad + 6G^2 \left(\frac{\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{trial}}} - \frac{1}{3G + H} \right) \bar{N}_{n+1} \otimes \bar{N}_{n+1} + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \end{aligned}$$

- Faça um programa que resolva uma viga elastoplástica, por von Mises, utilizando a matriz tangente consistente com método de Newton Raphson. Utilize elemento à tensão plana com condições de contorno e carregamento nodais definidas pelo usuário. Você pode, se facilitar, definir constante o número de elementos na horizontal e vertical, para discretização. Seu programa deve apresentar os deslocamentos nodais e, para cada elemento, gerar tensões, deformações, deformação plástica equivalente. Para validar seu programa, compare sua resposta com a de um software comercial.

Von Mises



ANALÍTICO

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \\ \dot{\phi} &= 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{N}) \\ \mathbf{N} &= \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}$$

ALGORÍTMICO

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}) \\ \phi &= 0 \Rightarrow \Delta\gamma \\ \mathbf{D} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[2G\mathbf{I}_4 + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

$$\mathbf{D}_{cont} = 2G \left[\mathbf{I}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + \frac{6G^2}{3G + K} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + K(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

$$\mathbf{D}_{alg} = 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{\bar{\phi}^{trial}} \right) \left[\mathbf{I}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + 6G^2 \left(\frac{\Delta\gamma}{\bar{\phi}^{trial}} - \frac{1}{3G + K} \right) \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \otimes \bar{\mathbf{N}}_{n+1} + K(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$\mathbf{I}_{4ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{trial}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{trial}\|} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}\|}$$

FIM DAS AULAS DE PLASTICIDADE

Entregas pelo Moodle dos exercícios de plasticidade 1D e 2D até dia 21/11.