

Energia potencial

Conceito de Energia Potencial	2
1. Conceito de energia em um fenômeno natural	2
2. Interpretar a conservação/dissipação da energia	2
3. Energia nos alimentos vs. energia mecânica	2
4. Relação qualitativa entre força e potencial.....	2
Conservação da energia mecânica – Energia potencial gravitacional	2
5. O loop de demonstração	2
6. Conservação da energia mecânica no sistema bola-haste na gravidade	2
7. O voo do bumerangue.....	3
8. (RHK 12-E.6, ligeiramente modificado) Pessoa que se joga na rede de salvamento.....	3
9. (RHK 12-P.8) Pêndulo que muda de comprimento no meio da oscilação – conservação da energia.....	3
10. (RHK 12-P.9) Pêndulo que muda de comprimento no meio da oscilação – condição para se enrolar no pino de baixo.....	3
11. Bloco que escorrega sobre uma esfera, sem atrito.....	3
12. (RHK 12-E.9) A montanha russa	3
13. Bolinha no fio que dá a volta completa	4
14. Trabalho e energia cinética em um pêndulo	4
15. Energia nos blocos de um sistema com polia e plano inclinado	4
16. Energia de um anel em um movimento com vínculo	4
17. Energia de um bloco que desliza sobre uma semiesfera	4
18. Energia e dinâmica de um objeto que desliza no interior de uma semiesfera	5
19. (RHK 12-P.4) Trabalho e energia cinética em uma corda	5
Conservação da energia mecânica – Energia potencial elástica	5
20. (RHK 12-E.10) Energia potencial e cinética numa mola – exemplo com um brinquedo	5
Conservação da energia mecânica – combinação das energias potenciais gravitacional e elástica	5
21. (RHK 12-E.19) Bola caindo em uma mola	5
22. (RHK 12-E.18) Bloco que cai sobre a mola - I.....	5
23. Bloco que cai sobre a mola - II.....	6
24. (RHK 12-P.3) Bloco que desliza sobre um plano inclinado e cai sobre uma mola.....	6
25. (RHK 12-E.15) Bloco sobre um plano inclinado impulsionado por uma mola	6
Conservação da energia mecânica – outras formas de energia potencial	6
26. (HRK 8.40) Partícula no potencial, formal I	6
27. Movimento de um átomo leve em relação a um átomo pesado.....	7
28. Movimento em uma dimensão da partícula sob ação de uma força proporcional ao cubo da distância	7
29. O modelo de Bohr para o átomo.....	7
30. Partícula em movimento sob ação de um potencial cujo gráfico é conhecido, formal I.....	8
31. Cálculo do período de oscilação a partir da energia potencial, formal.....	8
32. (RHK 12-P.18 modificado) Energia e dinâmica dos nucleons, potencial de Yukawa	8
33. Partícula em movimento sob ação de um potencial cujo gráfico é conhecido, formal II.....	9
34. Partícula em movimento sob ação de um potencial cuja forma analítica é conhecida, formal	9
35. Partícula em movimento sob ação de um potencial cujo gráfico é conhecido e se pergunta sua fórmula analítica	9
Questões conceituais	9
36. Constante de força de um sistema de molas	9
37. Relação entre constante de força e trabalho numa mola	10
38. Definição de força conservativa	10
39. Energia cinética da mola de um sistema massa-mola em oscilação.....	10

Conceito de Energia Potencial

1. Conceito de energia em um fenômeno natural

Um terremoto pode liberar energia suficiente para devastar uma cidade. Aonde se encontrava essa energia um instante antes de ocorrer o terremoto?

2. Interpretar a conservação/dissipação da energia

Um pêndulo oscilante acaba parando depois de um certo tempo. Tem-se aí uma violação da lei de conservação da energia mecânica?

3. Energia nos alimentos vs. energia mecânica

Um alpinista de 90 kg pretende subir ao cume do Monte Everest, que se encontra a 8850 m acima do nível do mar e pode se alimentar com barras de chocolate de 50 g, cada uma capaz de fornecer 300 kcal.

Determine

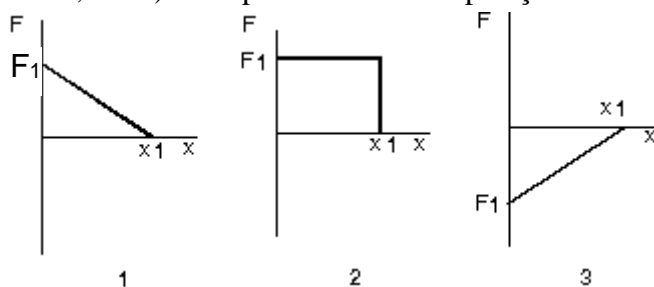
- a energia necessária apenas para compensar o trabalho da força da gravidade desde o nível do mar até o cume.
- quantas barras de chocolate forneceriam uma energia equivalente à calculada no item a.

Sua resposta deve sugerir que o trabalho contra a gravidade é uma parte muito pequena da energia despendida mesmo em situações em que o esforço físico é muito grande, como subir uma montanha.

4. Relação qualitativa entre força e potencial

Os gráficos ao lado mostram três diferentes formas (numeradas 1, 2 e 3) da dependência com a posição de uma força atuando em uma partícula movendo-se ao longo do eixo x , no sentido positivo desde a origem até $x = x_1$. Considere a força paralela ao eixo x e conservativa, e que a magnitude máxima F_1 tem o mesmo valor em todos os gráficos.

Ordene as situações 1, 2 e 3 de acordo com a variação da energia potencial associada à força, da menor (ou mais negativa) para a maior (ou mais positiva).



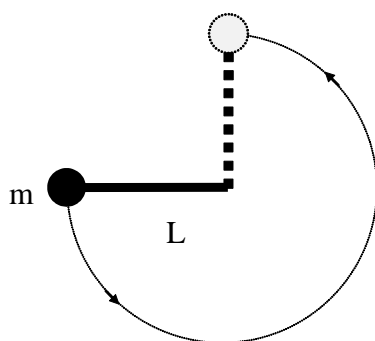
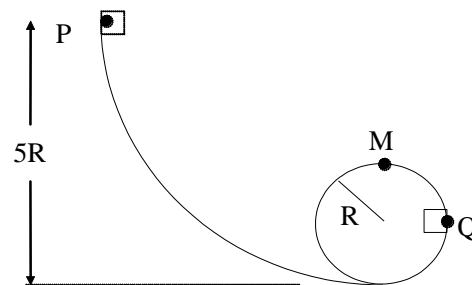
Conservação da energia mecânica – Energia potencial gravitacional

5. O loop de demonstração

Um pequeno bloco de massa m escorrega ao longo de uma pista sem atrito em forma de aro, como mostra a figura ao lado. Ele parte do repouso, no ponto P, e o atrito com a pista deve ser ignorado.

Determine:

- a força resultante que atua no bloco em Q, que é o ponto mais à direita do aro.
- a menor altura do ponto P que permite ao bloco passar pelo ponto M sem descolar da pista.



6. Conservação da energia mecânica no sistema bola-haste na gravidade

(RHK 12-P.2). Uma bola de massa m está amarrada a uma das extremidades de uma haste muito leve de comprimento L . A outra extremidade da haste está apoiada num pino, de modo que a haste pode mover-se em um plano vertical. A haste é colocada horizontalmente, conforme a figura ao lado, e empurrada para baixo, de modo que gira em torno do pino e alcança a posição vertical com velocidade zero.

Determine a velocidade inicial transmitida à bola.

7. O voo do bumerangue

Um bumerangue com 125 g é arremessado de uma altura de 1,06 m acima do solo com velocidade igual a 12,3 m/s. Quando ele alcança a altura de 2,32 m, sua velocidade é 9,57 m/s.

Determine:

- o trabalho realizado sobre o bumerangue pela força da gravidade.
- a energia cinética perdida devido à resistência do ar. Ignore o giro do bumerangue.

8. (RHK 12-E.6, ligeiramente modificado) Pessoa que se joga na rede de salvamento

Um homem de 110 kg pula sobre uma rede de salvamento situada 10 m abaixo e a rede estica 1,3 m antes de parar e jogá-lo no ar.

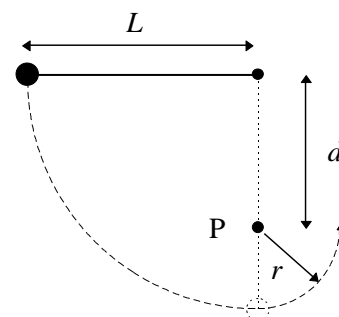
Determine a energia potencial da rede esticada, supondo que não há dissipação de energia por forças não-conservativas.

9. (RHK 12-P.8) Pêndulo que muda de comprimento no meio da oscilação – conservação da energia

O fio da figura ao lado tem comprimento $L=120$ cm e a distância d ao pino fixo P é 75,0 cm. A bola é abandonada a partir do repouso na posição mostrada, e oscila ao longo do arco tracejado.

Determine sua velocidade quando chegar no:

- ponto mais baixo do movimento.
- no ponto mais elevado depois que o fio encosta no pino.



10. (RHK 12-P.9) Pêndulo que muda de comprimento no meio da oscilação – condição para se enrolar no pino de baixo

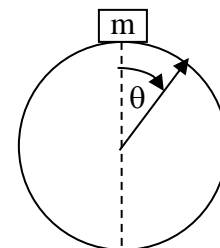
Mostre que a condição para a bolinha do pêndulo do exercício anterior completar uma volta inteira ao redor do pino é $d > 3L/5$. Dica: Determine que velocidade a bolinha deve ter no alto da trajetória para que o fio não afrouxe.

11. Bloco que escorrega sobre uma esfera, sem atrito

Uma massa puntiforme m parte do repouso e desliza sobre a superfície de uma esfera, sem atrito, de raio r . Meça os ângulos a partir da vertical e a energia potencial a partir do topo.

Determine:

- a variação de energia potencial da massa com o ângulo.
- a energia cinética como função do ângulo.
- as acelerações radial e tangencial em função do ângulo.
- o ângulo θ_a em que a massa abandona a esfera.

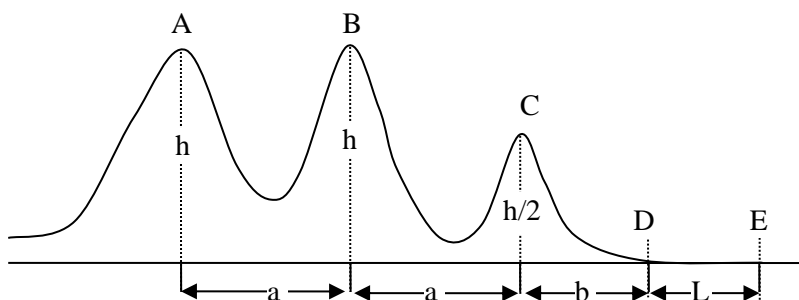


12. (RHK 12-E.9) A montanha russa

Um carro de montanha russa, de massa m , inicia seu movimento no ponto A com velocidade v_0 , como mostra a figura, movendo-se sem atrito com a pista e com o ar. Ele começa a ser freado no ponto D, com aceleração constante. O ponto E fica à mesma altura que D, à distância L . Descreva o carro como uma partícula e considere que ele permanece sempre sobre o trilho.

Determine:

- a velocidade do carro nos pontos B e C.
- a desaceleração necessária para detê-lo no ponto E.



13. *Bolinha no fio que dá a volta completa*

Uma bolinha amarrada a um fio de comprimento $\ell = 1,00$ m gira num plano vertical e descreve um círculo completo, após um impulso inicial adequado. Na situação em que a velocidade no ponto mais baixo da trajetória é a mínima para que ela descreva o círculo completo, verifica-se que as tensões entre o ponto mais baixo e o ponto a 90° dele diferem em 4,5 N.

Determine:

- a velocidade mínima da bolinha no ponto mais baixo da trajetória.
- a massa da bolinha.

14. *Trabalho e energia cinética em um pêndulo*

Um pêndulo é formado por um corpo de massa $m = 1,0$ kg pendurado no teto por um fio de comprimento 1,0 m. O corpo é deslocado da posição de equilíbrio com o fio esticado, até que forma um ângulo θ_0 com a direção vertical, de onde é abandonado e atinge o ponto mais baixo da trajetória com velocidade $v = 2,0$ m/s.

Considerando o deslocamento de θ_0 até a posição de equilíbrio, calcule:

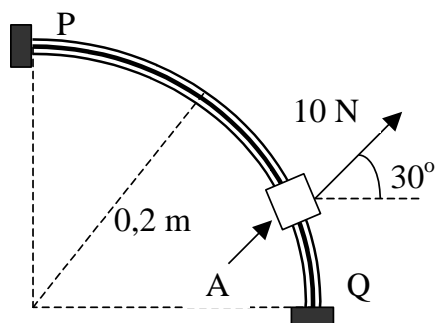
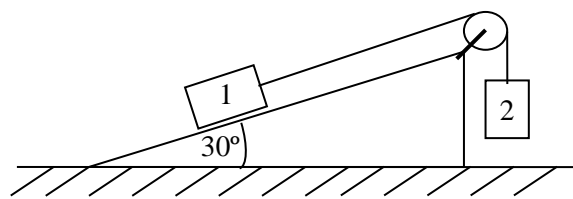
- o trabalho da força que o fio aplica no corpo (tensão) e
- o trabalho da força peso.
- Determine a posição angular θ_0 da qual o corpo foi abandonado.

15. *Energia nos blocos de um sistema com polia e plano inclinado*

No sistema da figura, $m_1 = 10$ kg e $m_2 = 2,0$ kg. As massas da roldana e do fio devem ser ignoradas. Os blocos partem do repouso e passam a se movimentar, sem atrito. O bloco 1 leva 2,0 segundos para atingir o solo.

Determine para o bloco 1:

- a aceleração.
- a velocidade com que atinge o solo.
- o trabalho realizado para levá-lo da sua posição inicial até o solo – não deixe de discutir a ambiguidade deste item.

16. *Energia de um anel em um movimento com vínculo*

Um pequeno anel A com 1,0 kg de massa parte do repouso em P e desliza sem atrito na haste que tem a forma de um arco de circunferência de 90° e fixa no plano vertical, conforme mostrado na figura ao lado. A força que age no anel é constante ao longo de toda a trajetória, com módulo 10 N numa direção que forma 30° com a horizontal.

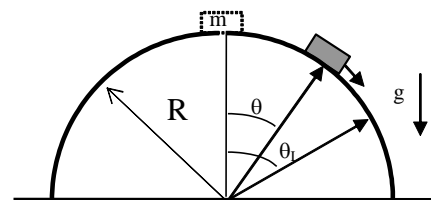
Determine a velocidade com que o anel bate no ponto Q.

17. *Energia de um bloco que desliza sobre uma semiesfera*

Um pequeno bloco, de massa m , é abandonado no topo de uma superfície semiesférica, de raio R , sobre a qual desliza sem atrito, como mostra a figura.

Determine:

- a velocidade do bloco quando ele passa pela posição angular θ .
- a força de contato (normal), entre a superfície e o bloco, $N(\theta)$.
- o ângulo limite, θ_L , a partir do qual perde contato com a superfície e a altura correspondente a esse ângulo.

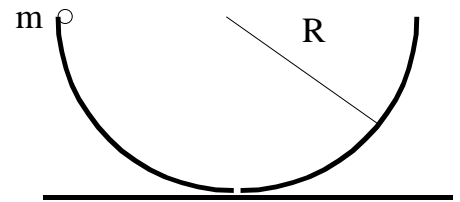


18. Energia e dinâmica de um objeto que desliza no interior de uma semiesfera

Um pequeno objeto de massa m é solto da borda de um recipiente hemisférico de raio R , conforme a figura ao lado.

Ignore o atrito e calcule:

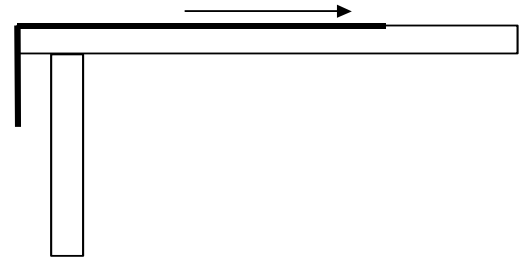
- a velocidade do objeto no fundo do recipiente.
- a força do recipiente sobre o objeto (normal), quando ele está no fundo do recipiente.
- a força do recipiente sobre o objeto (normal), quando ele está a uma altura $R/2$ do fundo do recipiente.



19. (RHK 12-P.4) Trabalho e energia cinética em uma corda

Uma corrente é mantida sobre uma mesa sem atrito, ficando um quarto do seu comprimento dependurado na borda, veja figura ao lado. O comprimento da corrente é L e sua massa m .

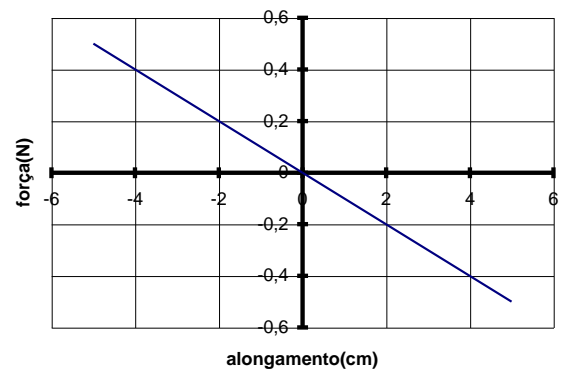
Determine o trabalho necessário para puxar a parte dependurada para cima do tampo.

**Conservação da energia mecânica – Energia potencial elástica**

20. (RHK 12-E.10) Energia potencial e cinética numa mola – exemplo com um brinquedo

A figura à direita mostra como a força da mola de um brinquedo que lança rolhas de 3,8 g de massa varia em função da compressão ou distensão. No primeiro lance, a mola é comprimida 5,5 cm e a rolha se separa quando passa pelo ponto de equilíbrio. No segundo lance, a rolha fica agarrada à mola até que ela se distende 1,5 cm além da sua posição de equilíbrio, separando-se nesse ponto.

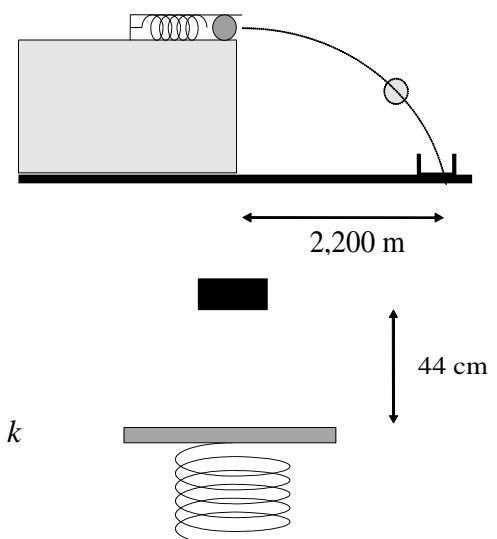
Determine as velocidades de lançamento da rolha em cada um dos dois lances.

**Conservação da energia mecânica – combinação das energias potenciais gravitacional e elástica**

21. (RHK 12-E.19) Bola caindo em uma mola

Dois crianças atiram bolinhas de cima de uma mesa para uma caixinha colocada no chão, utilizando um brinquedo de mola. A caixinha está a uma distância de 2,20 m da mesa, mas a altura da mesa é desconhecida. Kiko comprime a mola em 1,10 cm, o que faz a bolinha cair 27,0 cm antes da caixa.

Determine a compressão da mola para Biba atingir o alvo e justifique o cálculo efetuado.



22. (RHK 12-E.18) Bloco que cai sobre a mola - I

Um bloco de 2,0 kg cai de 44 cm sobre uma mola de constante elástica $k = 200 \text{ N/m}$, conforme figura ao lado. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

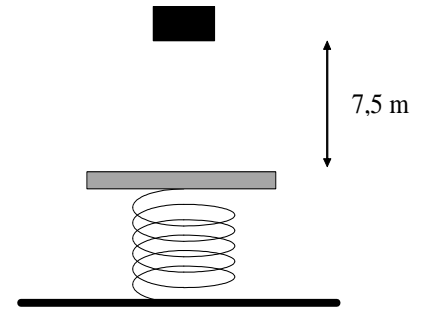
Determine a compressão máxima produzida na mola.

23. Bloco que cai sobre a mola - II

Um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ é largado de uma altura $h = 7,5 \text{ m}$, sobre uma mola de constante $k = 1600 \text{ N/m}$.

Determine:

- o valor máximo da compressão da mola.
- a velocidade máxima atingida pelo corpo.

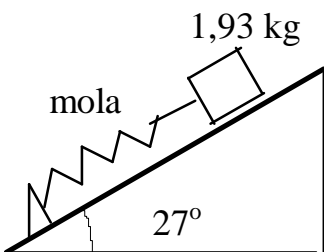
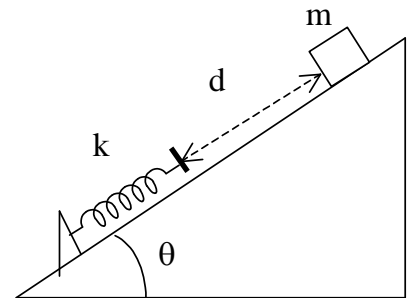


24. (RHK 12-P.3) Bloco que desliza sobre um plano inclinado e cai sobre uma mola

Uma mola ideal, sem massa, pode ser comprimida $2,33 \text{ cm}$ pela força de 268 N . Um bloco de massa $m = 3,18 \text{ kg}$ no alto de um plano inclinado em $\theta = 32^\circ$, conforme a figura ao lado, é abandonado para escorregar pelo plano com velocidade inicial nula. O bloco pára momentaneamente depois de ter comprimido a mola em $5,48 \text{ cm}$.

Ignore o atrito e determine

- a distância que o bloco percorreu plano abaixo, entre ser abandonado e comprimir a mola ao máximo; deixe claro se sua resposta inclui, ou não, a compressão da mola.
- a velocidade do bloco pouco antes de chocar-se com a mola.



25. (RHK 12-E.15) Bloco sobre um plano inclinado impulsionado por uma mola
Um bloco de $1,93 \text{ kg}$ está encostado numa mola comprimida, situada numa rampa sem atrito e inclinada em $27,0^\circ$ conforme a figura ao lado. A constante elástica da mola é $20,8 \text{ N/cm}$. Uma força externa comprime a mola em $18,7 \text{ cm}$ adicionais, quando então o bloco é solto.

Determine que distância o bloco percorre ao longo da rampa antes de parar, em relação à posição do bloco imediatamente antes de ser largado.

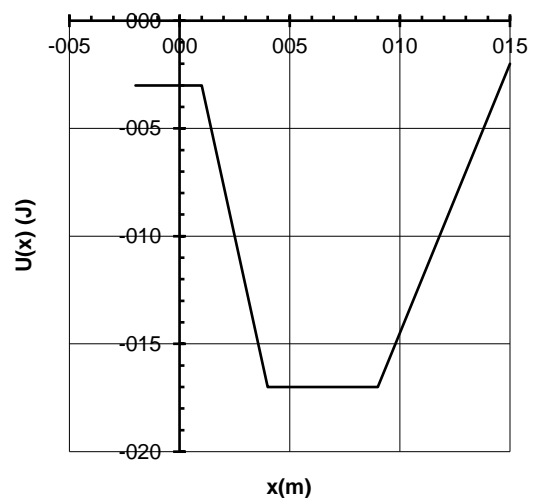
Conservação da energia mecânica – outras formas de energia potencial

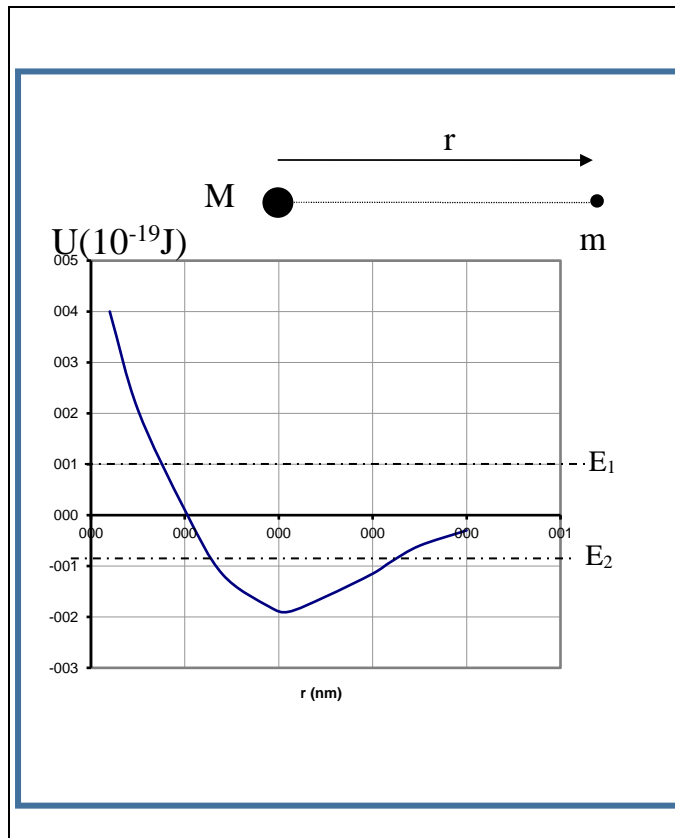
26. (HRK 8.40) Partícula no potencial, formal I

Uma partícula de massa $2,0 \text{ kg}$ move-se ao longo do eixo x numa região em que a energia potencial $U(x)$ varia conforme a figura ao lado. Quando a partícula se encontra em $x = 2,0 \text{ m}$, sua velocidade é $-1,0 \text{ m/s}$.

Determine

- a força atuante na partícula nessa posição.
- os limites do movimento da partícula.
- a velocidade da partícula em $x = 7,0 \text{ m}$?





27. Movimento de um átomo leve m relação a um átomo pesado

A figura ao lado mostra um átomo de massa m à distância r de outro átomo de massa M em repouso, sendo $m \ll M$. O gráfico representa a função energia potencial $U(r)$ para várias posições do átomo mais leve. Descreva o movimento desse quando a energia mecânica total:

a) for maior que zero, como E_1 representada no gráfico.

b) for menor que zero, como em E_2 .

Para $E_1 = 1,0 \times 10^{-19} \text{ J}$ e $r = 0,30 \text{ nm}$, determine:

c) o valor da energia potencial;

d) a energia cinética e o módulo e o sentido da força atuante no átomo mais leve.

28. Movimento em uma dimensão da partícula sob ação de uma força proporcional ao cubo da distância

Uma partícula de massa $m = 4 \text{ kg}$ move-se ao longo do eixo x sob a influência de uma única força descrita por $F = -8x^3$, onde F é dada em newtons e x em metros. Considere $x = 0 \text{ m}$ correspondente ao zero de energia potencial e que nesse ponto a partícula tem uma velocidade igual a 2 m/s , no sentido positivo.

Determine:

a) a energia potencial $U(x)$ e represente-a em um gráfico;

b) a energia cinética em $x = 0 \text{ m}$ e

c) a energia mecânica total da partícula.

d) o gráfico da energia cinética K em função da posição, $K(x)$.

e) os pontos de retorno.

f) Descreva qualitativamente o movimento da partícula.

29. O modelo de Bohr para o átomo

A força de atração entre o próton positivamente carregado e o elétron negativamente carregado no átomo de

hidrogênio é dada por: $F = -k \frac{e^2}{r^2}$, sendo e a carga do elétron, k uma constante e r a

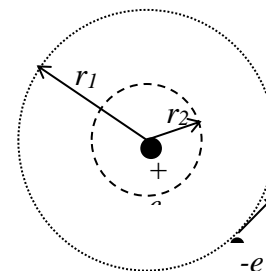
distância entre as duas partículas. Suponha que o próton esteja fixo e que o elétron, que se movia inicialmente em um círculo de raio r_1 em torno do próton, repentinamente passa para uma outra órbita circular de raio r_2 menor (veja figura).

Determine a variação:

a) da energia cinética do elétron, considerando que F é a força resultante responsável pelo movimento circular.

b) na energia potencial do átomo usando a relação entre força e energia potencial.

c) da energia total do átomo nesse processo. (Essa energia é frequentemente perdida sob a forma de radiação).

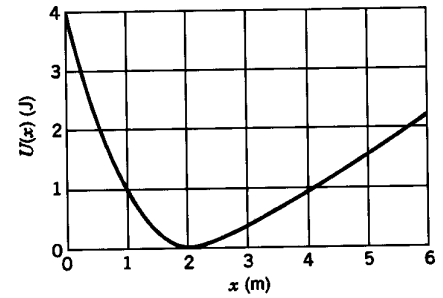


30. *Partícula em movimento sob ação de um potencial cujo gráfico é conhecido, formal I*

Uma partícula move-se ao longo do eixo x em uma região na qual a energia potencial $U(x)$ varia como na figura ao lado.

a) Faça um gráfico quantitativo da força $F(x)$ que atua na partícula, como função da distância.

b) Esboce, diretamente sobre a figura, o gráfico de sua energia cinética $K(x)$.



31. *Cálculo do período de oscilação a partir da energia potencial, formal*

Uma partícula de massa m executa um movimento unidimensional sob a ação de uma força conservativa correspondente à energia potencial cujo gráfico está esquematizado abaixo.

a) Obtenha a força $F(x)$ que atua sobre a partícula e esboce o gráfico de F contra x .

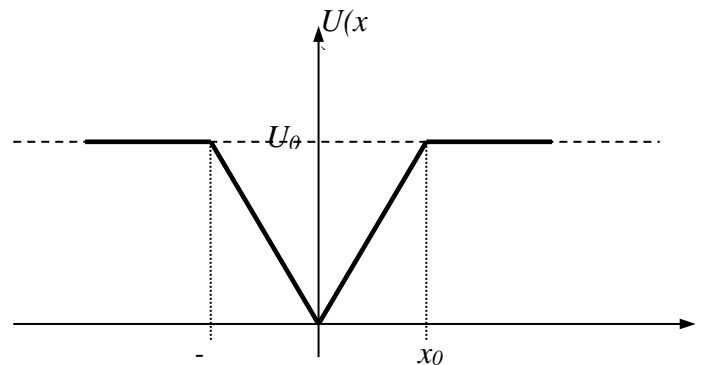
b) Descreva qualitativamente o movimento de uma partícula cuja energia mecânica seja $E_1 = 2U_0$ e esteja movendo-se da esquerda para a direita, vinda de um ponto $x < -x_0$. Qual é o valor máximo do módulo da velocidade e para que valor de x a velocidade é máxima?

c) Descreva qualitativamente o movimento de uma partícula cuja energia mecânica seja $E_2 = U_0/2$. Qual o valor máximo do módulo da velocidade e para que valor de x a velocidade é máxima?

d) No movimento com energia total igual a $E_2 = U_0/2$, obtenha os valores das coordenadas dos pontos de retorno.

e) Ainda no caso $E_2 = U_0/2$, calcule o período de oscilação. Neste item você pode precisar da integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$



32. (RHK 12-P.18 modificado) *Energia e dinâmica dos nucleons, potencial de Yukawa*

A interação entre nucleons (prótons e nêutrons, os constituintes dos núcleos) pode ser representada, com

razoável precisão, pelo potencial de Yukawa, $U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} \exp\left[-\frac{r}{r_0}\right]$. As constantes r_0 e U_0 valem cerca

de $1,5 \cdot 10^{-15}$ m e 50 MeV, respectivamente.

Considere que $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ e determine:

a) a fórmula que dá a força de atração em função da distância e dos parâmetros do potencial.

b) a força que age sobre o nêutron que se encontra a uma distância, em relação a um próton, igual a: r_0 ; $2r_0$; $3r_0$.

c) o esboço do gráfico da força.

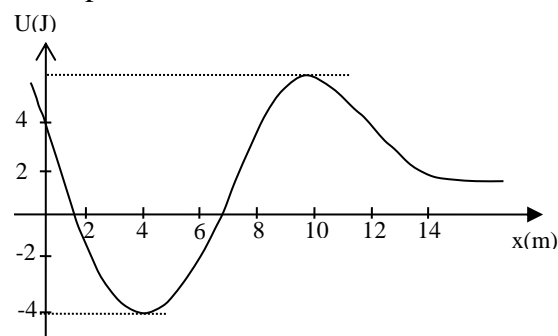
d) a energia mecânica do nêutron em eV, quando $2r_0$ é o ponto de retorno do nêutron que se move no potencial de um próton.

33. Partícula em movimento sob ação de um potencial cujo gráfico é conhecido, formal II

O gráfico ao lado representa a energia potencial de uma partícula de massa $m = 2$ kg, sob a ação de uma força conservativa $F(x)$ em função de sua posição x . A energia mecânica total da partícula é 5 J.

Determine:

- os pontos de equilíbrio e classifique-os de acordo com sua estabilidade.
- as regiões permitidas para o movimento ao longo do eixo x .
- a energia cinética da partícula em $x = 0,4$ m e $x = 20$ m.
- o trabalho realizado por $F(x)$ para deslocar um corpo de $x = 1,5$ m até $x = 20$ m.
- a energia mínima que deve ser fornecida a ela para que possa atingir $x = 20$ m, se a partícula se encontra em $x = 1,5$ m com energia cinética nula, e a energia cinética que terá em $x = 20$ m.



34. Partícula em movimento sob ação de um potencial cuja forma analítica é conhecida, formal

Uma partícula pode se deslocar ao longo do eixo x , com energia potencial dada por $U(x) = x^2(x^2 - 8)$ em J quando x está em metros.

- Em quais posições $U(x)$ é nula?
 - Em quais posições $U(x)$ apresenta valores extremos (pontos de máximo e mínimo)?
 - Faça um gráfico de $U(x)$ no intervalo $-3 \leq x \leq 3$ (não deixe de calcular alguns valores numéricos para definir bem a curva), destacando as posições onde $U(x)$ apresenta valores extremos.
- Considerando que o corpo foi abandonado em $x = 1$ m, determine:
- a intensidade da força que agirá inicialmente sobre a partícula;
 - em que sentido se deslocará o corpo inicialmente;
 - a energia total da partícula (cinética + potencial);
 - o maior valor da energia cinética que esse corpo pode atingir e
 - as posições em que a partícula pára.

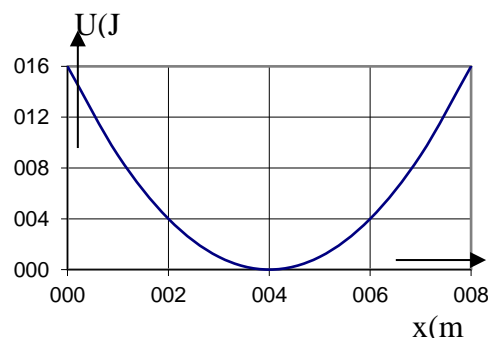
Considere agora que a partícula é colocada, em repouso, em $x = 0$ m e imediatamente recebe um impulso que lhe transfere uma energia cinética de 9 J.

- Descreva o movimento subsequente.

35. Partícula em movimento sob ação de um potencial cujo gráfico é conhecido e se pergunta sua fórmula analítica

Uma partícula move-se ao longo de uma linha em uma região onde a energia potencial varia como na figura ao lado.

- Esboce o gráfico da força $F(x)$ que atua na partícula. Não esqueça de marcar valores numéricos nas escalas.
- Se a partícula tem energia total constante de 4 J, esboce o gráfico de sua energia cinética.
- Descubra uma função matemática que descreva $U(x)$.
- Determine a força $F(x)$ a partir de $U(x)$ e compare com o resultado obtido em a). Verifique se a aproximação está coerente com o resultado matemático.



Questões conceituais

36. Constante de força de um sistema de molas

Corta-se uma mola ao meio. Qual é a relação entre a constante elástica k da mola original e a constante de cada uma das metades.

37. *Relação entre constante de força e trabalho numa mola*

Considere as molas A e B de igual comprimento, sendo que A é mais rígida do que B, isto é, $K_A > K_B$. Em qual das molas se realiza mais trabalho quando elas são distendidas. a) de uma mesma distância; b) pela mesma força?

38. *Definição de força conservativa*

Defina forças conservativas e não conservativas e dê exemplos de cada tipo.

39. *Energia cinética da mola de um sistema massa-mola em oscilação*

Um sistema massa-mola, cuja mola tem massa m , oscila harmonicamente com frequência angular ω . A fim de determinar a energia cinética da mola, escolha um sistema de coordenadas Ox com origem na ponta fixa da mola. Considere que, em um certo instante, a mola está com comprimento ℓ , ou seja, a outra da ponta da mola está na posição ℓ e essa ponta tem velocidade v .

- a) Mostre que a velocidade do ponto x da mola é

$$u(x) = v \frac{x}{\ell}$$

- b) Mostre que a massa de um pedaço da mola com comprimento Δx é $\Delta m = m \frac{\Delta x}{\ell}$

Considere que a mola é homogênea, isto é, tanto a massa quanto a resistência à tração estão uniformemente distribuídas ao longo do seu comprimento ℓ em cada instante.

- c) Mostre que a energia cinética da mola na condição do enunciado pode ser calculada como $E_c = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} u(x)^2 dm$
- d) Use os resultados dos itens a e b na integral do item c e determine a energia cinética da mola.
- e) Explique porque a energia cinética de um oscilador formado por uma mola de massa m e um bloco de massa M quando o bloco tem velocidade v é $\frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) v^2$.