Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Produção

PRO 3213
Princípios de Administração de Empresas

Apostila 05: Introdução – Matemática Financeira

Prof. Clovis Alvarenga Netto

PRO 3213 Adm de Empresas

Conceito fundamental:

A diferença de valor do dinheiro no tempo

2.018		**2.019**
	$\neq$	
R$ 1.000,00		**R$ 1.000,00**

A disponibilidade de um recurso financeiro hoje proporciona uma OPORTUNIDADE DE USO que representa um VALOR para o proprietário desse recurso.

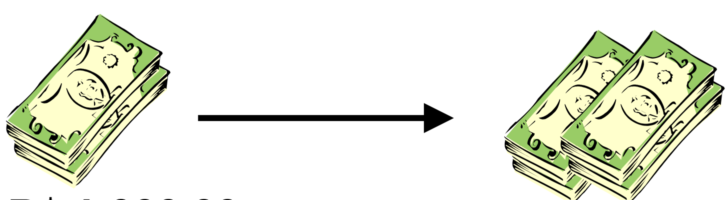
PRO 3213 Adm de Empresas

A disponibilidade de um recurso financeiro hoje proporciona uma OPORTUNIDADE DE USO que representa um VALOR para o proprietário desse recurso.

PRO 3213 Adm de Empresas

Se alguém abre mão desse recurso por um certo período de tempo deve receber ALGO EM TROCA pela perda desta OPORTUNIDADE DE USO.

2.019 **2.020**



R$ 1.000,00

???

Matemática Financeira

PRO 3213 Adm de Empresas

Definições:

- ✓ JURO é a remuneração do capital (uso do dinheiro) por um certo período de tempo;

- ✓ TAXA DE JUROS é a razão entre os juros recebidos (ou pagos) num período de tempo determinado e o capital aplicado;

- ✓ CUSTO DE OPORTUNIDADE é a melhor taxa de aplicação para o capital disponível existente no mercado em um certo período.

Matemática Financeira

PRO 3213 Adm de Empresas

Nomenclatura usual:

J = juros

P = capital inicialmente aplicado

i = taxa de juros

n = período de tempo da aplicação

Taxa de juros

PRO 3213 Adm de Empresas

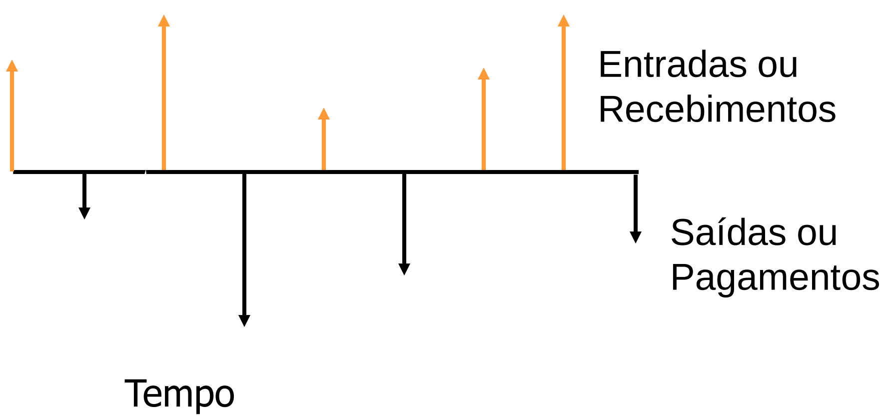
é um coeficiente (percentual) que, multiplicado por um certo valor, produz o valor dos juros

Juros = Taxa de Juros x Principal

J = i x P

Diagrama de Fluxo de Caixa

PRO 3213 Adm de Empresas

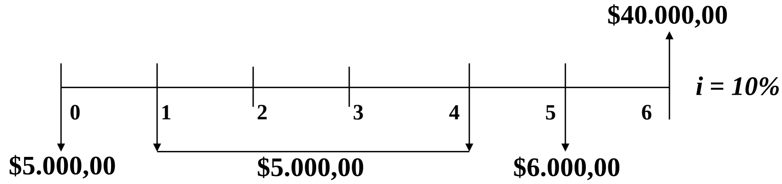


Exemplo:

Digamos que determinado investimento pressuponha um desembolso inicial (na data zero) de $ 5.000,00 que virão seguidos de novas saídas de caixa de $5.000,00 nos 1°, 2°, 3° e 4° períodos. Uma nova saída de $ 6.000,00 estaria prevista para o 5° período, visando um retorno de $40.000,00 no 6° período, isto sujeito a uma taxa de juros 10% ao período. Represente o diagrama (ou fluxo de caixa) deste investimento:

Exemplo:

Digamos que determinado investimento pressuponha um desembolso inicial (na data zero) de $ 5.000,00 que virão seguidos de novas saídas de caixa de $5.000,00 nos 1°, 2°, 3° e 4° períodos. Uma nova saída de $ 6.000,00 estaria prevista para o 5° período, visando um retorno de $40.000,00 no 6° período, isto sujeito a uma taxa de juros 10% ao período. Represente o diagrama (ou fluxo de caixa) deste investimento:



MATEMÁTICA FINANCEIRA E ENGENHARIA ECONÔMICA
A teoria e a prática da análise de projetos de investimentos
Nivaldo E. Pilão & Paulo V. Hummel – Pioneira/Thomson

Tipos de juros

PRO 3213 Adm de Empresas

Juros Antecipados
Juros Postecipados

Juros Reais
Juros Efetivos
Juros Nominais

Juros Simples
Juros Compostos

PRO

Juros antecipados e postecipados

PRO 3213 Adm de Empresas

Juros Antecipados: Cobrados no início do período

Juros Postecipados: Cobrados no final do período

Ex. Desconto de duplicatas, Factoring

<u>Forma mais comum de juros</u>
Ex. Cartão de crédito e cheque especial

PRO

Juros reais e nominais

PRO 3213 Adm de Empresas

Para a obtenção de um empréstimo de R$ 1.000,00 o gerente do banco informa que a taxa de juros praticada é de 5% a. m. Porém, ele lhe pede que o empréstimo fique uma semana depositado em sua conta corrente para fazer "saldo médio"

Portanto o empréstimo que deveria ser de um mês (30 dias) é de fato de apenas 22 ou 23 dias

5% é uma Taxa Nominal mas (veremos adiante) a Taxa Real é de aprox. 6,88%

PRO

Juros nominais e efetivos

PRO 3213 Adm de Empresas

A Caderneta de Poupança paga juros de 6% a. a. Esse valor é dividido linearmente por 12 meses, resultando em uma taxa mensal de 0,5%. Como será visto adiante, juros de 0,5% capitalizados mensalmente equivalem a uma taxa de 6,17% a. a.

6,00% é a Taxa Nominal mas 6,17% é a Taxa Efetiva (capitalização utilizando juros compostos)

PRO

Juros (capitalização) Simples

PRO 3213 Adm de Empresas

Em matemática financeira, capital é qualquer valor expresso em moeda e disponível em determinada época.

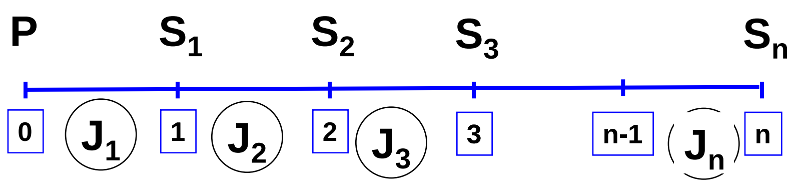
No regime de capitalização simples, a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial, portanto, não incide sobre os juros acumulados.

Nesse regime a taxa de juros varia linearmente. A taxa anual dividida por 12 é igual à mensal...

Juros simples

PRO 3213 Adm de Empresas

Os juros ao final de cada período são calculados somente sobre o principal (o valor inicial)



$S_n = P + J_1 + J_2 + J_3 + ... + J_n$

$S_n = P + (i * P) + (i * P) +...+ (i * P)$

onde $J_n = i * P$

$$\boxed{S_n = P * (1 + i * n)}$$

Cálculo do valor do dinheiro no tempo

PRO 3213 Adm de Empresas

As premissas para análises de projetos de investimentos incluem a noção financeira, quase que intuitiva, de que um valor a receber ou a pagar, tem maior significado na atualidade do que no futuro.

Por exemplo: Qual o valor futuro de R$ 1.000,00 aplicados a taxa de 20% ao ano, depois de 12 meses?

Resposta: sendo (20/100) * 1.000 = 200 o valor futuro de R$ 1.000,00 é igual a R$ 1.200,00.

Um raciocínio subsequente nos indica que o valor presente de R$ 1.200,00 descontados a taxa de 20% ao ano é igual a R$ 1.000,00.

PRO

Exercício 1

PRO 3213 Adm de Empresas

1. Qual a taxa de juros cobrada em um empréstimo de R$ 10.000,00 resgatado por R$ 10.450,00 após 30 dias?

   Resposta: i = (450 / 10.000) * 100 e i = 4,5%

PRO

Exercício 2

PRO 3213 Adm de Empresas

2. Qual o valor dos juros relativos a um empréstimo de R$ 20.000,00 pelo prazo de 5 meses, sabendo que é aplicado o método de juros simples e a taxa é de 3% ao mês?

   Resposta: j = 20.000 * 0,03 * 5 = R$ 3.000,00

PRO

Exercícios 3 e 4

PRO 3213 Adm de Empresas

3. Sabendo-se que os juros de R$ 6.000,00 foram obtidos com a aplicação de R$ 50.000,00 à taxa de juros simples de 6% ao trimestre, calcular o prazo.

   Resposta: n = 6.000 / (50.000 * 0,06) = 2 trimestres

4. Qual o capital que, à taxa de 4% ao mês, rende juros simples de R$ 9.000,00 em um ano?

   Resposta: P = 9.000 / 0,48 = R$ 18.750,00

PRO

Juros compostos e montante

PRO 3213 Adm de Empresas

É o regime de capitalização onde a taxa de juros incide sobre o capital inicial acrescido dos juros acumulados até o período anterior.

IMPORTANTE: Quando não se menciona especificamente que os juros são simples, considerá-los sempre compostos!

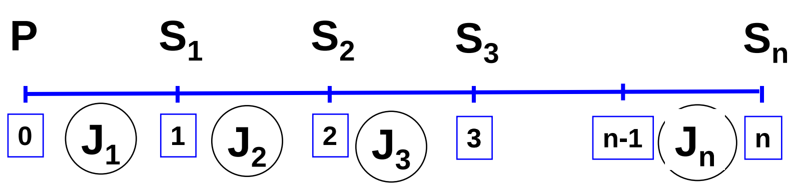
Popularmente, são os "juros sobre juros"

PRO

Juros Compostos

PRO 3213 Adm de Empresas

Os juros ao final de cada período são calculados sobre o principal MAIS os juros do período anterior



$S_n = P + J_1 + J_2 + J_3 + ... + J_n$

$S_n = P + (i * P) + i * S_1 +...+ i * S_{n-1}$

onde $J_n = S_{n-1} * i$

$$\boxed{S_n = P * (1 + i)^n}$$

PRO

Juros Compostos e dedução de fórmula

PRO 3213 Adm de Empresas

Exemplo para pagamento único:

Sejam: P = 1.000,00; i = 4%; n = 3 meses; (Sn) = ?

Mês	Capital inicial	Juros relativos ao mês	Montante no final do mês
1.	1.000,00	1.000,00 * 0,04 = 40,00	1.040,00
2.	1.040,00	1.040,00 * 0,04 = 41,60	1.081,60
3.	1.081,60	1.081,60 * 0,04 = 43,26	1.124,86

Deduzindo a fórmula utilizando a propriedade distributiva do produto em relação à soma:

$So = 1.000$
$S1 = 1.000 + 0,04 * 1.000 = 1.000\,(1 + 0,04) = 1.000\,(1,04)^1$
$S2 = 1.000(1,04) + 1.000\,(1,04) * 0,04 = 1.000\,(1,04)\,(1,04) = 1.000(1,04)^2$
\- -

$$Sn = P * (1+i)^n$$

Valor Futuro (VF) e Valor Presente (VP)

PRO 3213 Adm de Empresas

A partir das demonstrações de montante e juros compostos, podemos concluir que o montante é um valor futuro e seu cálculo pode ser expresso pela seguinte fórmula:

$$\mathbf{VF = VP\,(1 + i)^n} \quad \textbf{Portanto, o } \mathbf{VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}}$$

Exemplo (juros compostos)

PRO 3213 Adm de Empresas

Determinar quanto um investidor terá direito de receber no final do ano de 2017 se aplicou em 1^0 de janeiro de 2017 a importância de R$ 100 000,00. Considerar que o negócio foi feito a juros compostos de 5% ao mês.

$S = P\ (1+i)^n$

S (dezembro) = $100 000,00 * $(1{,}05)^{12}$

S(dezembro)=$ 179 585,63

Exemplo (juros compostos)

PRO 3213 Adm de Empresas

Determinar quanto deverá um investidor depositar 1^0 de janeiro de 2017 para ter direito a receber no final do ano de 2017 a importância de R$ 300 000,00. Considerar que o negócio foi feito a juros compostos de 10% ao mês.

$S = P\ (1+i)^n$

$300\ 000 = P * (1+0{,}10)^{12}$

P = $ 95 589,25

Exercícios 5 e 6

PRO 3213 Adm de Empresas

5. Calcular o montante (valor futuro) de uma aplicação de R$ 10.000,00 pelo prazo de 6 meses à taxa de 2% a.m. (ao mês)

   Fórmula VF (programa): Taxa = 2% Nper = 6 VP = + 10000

   Resposta: $M = 10.000\ (1 + 0{,}02)^{6} =$ R$ - 11.261,62

6. Uma loja de departamentos financia a venda de um conjunto para cozinha no valor de R$ 16.000,00 sem entrada para pagamento único após 6 meses no valor de R$ 19.668,08. Qual a taxa de juros total e mensal?

   Fórmula TAXA (programa): VP = + 16000 VF = - 19668,08

   Para Nper = 1 (Taxa Total) então Taxa = 22,93%

   Para Nper = 6 (Taxa Mensal) então Taxa = 3,5%

PRO 3213 Adm de Empresas

Taxas Equivalentes de Juros

Taxas equivalentes de juros

PRO 3213 Adm de Empresas

Sejam duas taxas de juros:

- $\mathbf{i_1}$ válida para um intervalo de tempo $n_{\mathbf{1}}$
- $\mathbf{i_2}$ válida para um intervalo de tempo $n_{\mathbf{2}}$

Seja o Capital (P) aplicado por um certo prazo:

Taxas equivalentes de juros

PRO 3213 Adm de Empresas

Se a aplicação for à taxa de juros i_1 obteremos:

$$S_1 = P \cdot (1+i_1)^{Prazo}$$

Se a aplicação for à taxa de juros i_2 obteremos:

$$S_2 = P \cdot (1+i_2)^{Prazo}$$

Se $S_1 = S_2$ ⇨ $\mathbf{i_1}$ é EQUIVALENTE a $\mathbf{i_2}$

Taxas equivalentes

Duas ou mais taxa referenciadas a períodos unitários distintos são equivalentes quando produzem o mesmo montante no final de determinado tempo, pela aplicação do mesmo capital. Assim podemos escrever:

$$P\,(1 + i\ \ ) = P\,(1 + i\ \ )^{12}$$

a = ano e m = mês   ª Um ano equivale a 12 meses

Conversão entre Taxas equivalentes

A relação matemática entre duas taxas de juros EQUIVALENTES é a seguinte:

$$(1+i_1)^{n_1} = (1+i_2)^{n_2}$$

Com n_1 e n_2 expressas na mesma unidade de tempo respectivamente às taxas

Conversão entre Taxas equivalentes

PRO 3213 Adm de Empresas

A relação matemática entre duas taxas de juros EQUIVALENTES é a seguinte:

$$i_1 = \left[(1 + i_2)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1 \right] x100$$

PRO

Conversão entre Taxas equivalentes

PRO 3213 Adm de Empresas

Exemplo:
Converter uma taxa mensal de 2,5% em taxa anual

$i_1 = 2{,}5\%$ ➔ $n_1 = 1$
$i_2 = ?$ ➔ $n_2 = 1/12$

$i_2 = 34{,}49\%$

$i_1 = 2{,}5\%$ ➔ $n_1 = 12$
$i_2 = ?$ ➔ $n_2 = 1$

PRO