Controle Digital – Estimador de Derivada Implícito no Projeto

PTC 3471 – Práticas de Projeto de Sistemas de Controle
2º semestre de 2019
Bruno Angélico / Fuad Kassab Jr. / Diego Colón

Laboratório de Automação e Controle
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Introdução

Considere um sistema mecânico rotativo com N graus de liberdade, em que θ_0 a θ_{N-1} representam as posições e ω_0 a ω_{N-1} as velocidades angulares.

Os estados podem ser agrupados como $\Theta(t) = [\theta_0 \; . \; . \; . \; \theta_{N-1}]$ e $\Omega(t) = [\omega_0 \; . \; . \; . \; \omega_{N-1}]$. Com isso:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + Bu(t)$$

Introdução

Após a discretização, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Theta[n+1] \\ \Omega[n+1] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_d^{11} & A_d^{12} \\ \hline A_d^{21} & A_d^{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Theta[n] \\ \Omega[n] \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_d^{1} \\ \hline B_d^{2} \end{array}\right] u[n]$$

Aproximação de 1ª Ordem

Ao considerar a aproximação Euler backward de primeira ordem para $\Omega[n]$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Theta[n+1] \\ \dfrac{\Theta[n+1]-\Theta[n]}{T_s} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_d^{11} & A_d^{12} \\ \hline A_d^{21} & A_d^{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Theta[n] \\ \dfrac{\Theta[n]-\Theta[n-1]}{T_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d^1 \\ \hline B_d^2 \end{bmatrix} u[n].$$

Verifica-se que:

$$\Theta[n+1] = \left(A_d^{11} + \frac{A_d^{12}}{T_s} \right) \Theta[n] - \frac{A_d^{12}\Theta[n-1]}{T_s} + B_d^1 u[n]$$

$$\frac{\Theta[n+1]-\Theta[n]}{T_s} = \left(A_d^{21} + \frac{A_d^{22}}{T_s} \right) \Theta[n] - \frac{A_d^{22}}{T_s} \Theta[n-1] + B_d^2 u[n]$$

Aproximação de 1ª Ordem

Ao somar essas equações, resulta em:

$$\begin{aligned}\Theta[n+1] \quad &= \\ &\frac{1}{1+T_s}\left(T_s A_d^{11} + A_d^{12} + T_s A_d^{21} + A_d^{22} + I_N\right)\Theta[n] - \\ &\frac{1}{1+T_s}\left(A_d^{12} + A_d^{22}\right)\Theta[n-1] + \frac{T_s}{1+T_s}\left(B_d^1 + B_d^2\right)u[n]\end{aligned}$$

Assim, uma nova representação é obtida:

$$\begin{bmatrix}\Theta[n+1] \\ \Theta[n]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}K_1 & K_2 \\ I_N & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta[n] \\ \Theta[n-1]\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}K_3 \\ 0\end{bmatrix}u[n],$$

Aproximação de 1ª Ordem

em que:

$$K_1 = \frac{1}{1+T_s}\Big(T_s A_d^{11} + A_d^{12} + T_s A_d^{21} + A_d^{22} + I_N\Big),$$

$$K_2 = \frac{-1}{1+T_s}\Big(A_d^{12} + A_d^{22}\Big),\; K_3 = \frac{T_s}{1+T_s}\left(B_d^1 + B_d^2\right).$$

Note que o vetor de estados agora é:

$$x[n] = [\theta_0[n]\ \theta_1[n]\ \theta_0[n\text{-}1]\ \theta_1[n\text{-}1]]^T$$

Aproximação de 2ª Ordem

O procedimento pode ser refeito considerando uma aproximação de segunda ordem para a derivada:

$$\Omega[n] = \frac{3\Theta[n] - 4\Theta[n-1] + \Theta[n-2]}{2T_s}$$

Isso resulta em

$$\begin{bmatrix} \Theta[n+1] \\ \Theta[n] \\ \Theta[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ I_N & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta[n] \\ \Theta[n-1] \\ \Theta[n-2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

Aproximação de 2ª Ordem

Com:

$$K_1 = \frac{2}{3+2T_s}\left(T_s A_d^{11} + \frac{3A_d^{12}}{2} + T_s A_d^{21} + \frac{3A_d^{22}}{2} + 2\, I_N\right),$$

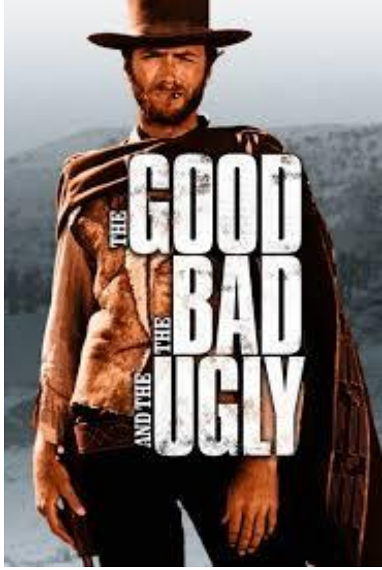
$$K_2 = -\frac{2}{3+2T_s}\left(2A_d^{12} + 2A_d^{22} + \frac{I_N}{2}\right),$$

$$K_3 = \frac{1}{3+2T_s}\left(A_d^{12} + A_d^{22}\right), \quad K_4 = \frac{2T_s}{3+2T_s}\left(B_d^1 + B_d^2\right).$$

Note que o vetor de estados agora é:

x[n] = [$\theta_0[n]$ $\theta_1[n]$ $\theta_0[n\text{-}1]$ $\theta_1[n\text{-}1]$ $\theta_0[n\text{-}2]$ $\theta_1[n\text{-}2]$]^T

Observações



Observações da aproximação:

1) Os estados são agora são formados pelas posições atuais e as atrasadas das juntas;
2) É uma realimentação de saída!
3) O projeto do controlador considera a estrutura do estimador de derivadas.
4) Pode resultar em amplificações de ruído exageradas para T_s muito pequeno.
5) Não há uma forma direta de especificar desempenho.

Projeto do Controlador

→ Alocação de polos não é muito indicada;
→ LQR parece ser uma boa solução;
→ Sugestão para período de amostragem para a disciplina: T_s = 1/50 s ou T_s = 1/40 s;
→ Pode-se incluir integrador. Para isso:

$$A'_d = \begin{bmatrix} A_d & 0_{[n\times 1]} \\ -C & 1 \end{bmatrix}, \;\; B'_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C'_d = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

Atividades

1) Projete um controlador com observador implícito para estabilizar o sistema. Sugestão inicial para Q e R com aprox. de 1ª ordem:

$$Q = \mathrm{diag}([1\ 5\ 1\ 2]); \quad R = 700;$$

2) Projete um controlador com observador implícito para estabilizar o sistema e fazer com que o braço siga uma referência externa. Sugestão inicial para Q e R com aprox. de 1ª ordem:

$$Q = \mathrm{diag}([1\ 5\ 1\ 2\ 0.02]); \quad R = 1000;$$

OBS: se não ficar bom com a aproximação de primeira ordem, mude para segunda ordem.