TEOREMAS DA DINÂMICA – DESCRIÇÃO VETORIAL

RENATO MAIA MATARAZZO ORSINO

1. Sistemas de força e sistemas de quantidade de movimento

	Forças	**Quantidades de movimento**
Definição	$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i), i = 1, \dots, n\}$	$\mathcal{Q} = \{(m_i\vec{v}_i, P_i), i = 1, \dots, n\}$
Resultante do sistema	$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G$
Momento do sistema	$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge \vec{F}_i$	$\vec{H}_A = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge (m_i\vec{v}_i)$
Mudança de pólo	$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$	$\vec{H}_B = \vec{H}_A + (A - B) \wedge (m\vec{v}_G)$

2. Teoremas da Resultante e do Momento da Quantidade de Movimento

Calculando a derivada temporal da quantidade de movimento total do sistema:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = m\vec{a}_G \tag{1}$$

Da Segunda Lei de Newton: $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}}$. Pelo princípio da ação e reação, pode-se afirmar que o sistema de forças internas é equivalente a zero (i.e. $\vec{R}^{\text{int}} = \vec{0}$ e $\vec{M}_A^{\text{int}} = \vec{0}$ para qualquer pólo A), pode-se afirmar que $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \vec{R}^{\text{ext}}$ e, portanto:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{\text{ext}} \tag{2}$$

Esta é a expressão do *Teorema da Resultante (TR)*, também conhecido com *Teorema do Movimento do Baricentro (TMB)*.

Calculando a derivada do momento da quantidade de movimento do sistema, e recorrendo novamente ao fato de que o sistema de forças internas é equivalente a zero e, portanto, $\vec{M}_A^{\text{int}} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{H}_A}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \wedge (m_i\vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge (m_i\vec{a}_i) \\
&= -\vec{v}_A \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}}) \\
&= -\vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G + \vec{M}_A^{\text{ext}}
\end{aligned} \tag{3}$$

Assim, obtém-se a expressão do *Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMQM)*, também conhecido como *Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA*

Date: 28 de Fevereiro de 2019.

ou TMA):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}_A}{\mathrm{d}t} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{M}_A^{\mathrm{ext}} \tag{4}$$

3. Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para um Corpo Rígido

Considere um sistema mecânico constituído por *um único corpo rígido* e assuma que A é um ponto que se move *solidariamente a este corpo*, de tal forma que é possível explicitar a velocidade $\vec{v}_i$ de qualquer ponto deste corpo a partir da equação de campo de velocidade para um corpo rígido:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A) \tag{5}$$

O momento da quantidade de movimento desse corpo rígido pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\vec{H}_A &= \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge (m_i \vec{v}_i) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - A)\right] \wedge \vec{v}_A + \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] \\
&= m(G - A) \wedge \vec{v}_A - \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - A) \wedge [(P_i - A) \wedge \vec{\omega}]
\end{aligned} \tag{6}$$

Definindo o tensor de inércia desse corpo rígido com respeito ao pólo A[1]:

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_A &= -\sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - A) \wedge [(P_i - A) \wedge \bullet] \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \left[|P_i - A|^2 \bullet - ((P_i - A) \cdot \bullet)(P_i - A)\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

Pode-se então escrever:

$$\vec{H}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A + \mathbb{J}_A \vec{\omega} \tag{8}$$

Portanto:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}_A}{\mathrm{d}t} = m(\vec{v}_G - \vec{v}_A) \wedge \vec{v}_A + m(G - A) \wedge \vec{a}_A + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{J}_A \vec{\omega}\right) \tag{9}$$

Finalmente, substituindo em (4), obtém-se a expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMQM) para *um* corpo rígido:

$$m(G - A) \wedge \vec{a}_A + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{J}_A \vec{\omega}\right) = \vec{M}_A^{\mathrm{ext}} \tag{10}$$

Pode-se expressar este teorema de forma alternativa de expressar este teorema, considerando que:

$$\mathbb{J}_A \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - A) \wedge (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \tag{11}$$

---

[1] Propriedade do duplo produto vetorial: $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

e, portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbb{J}_A\vec{\omega}\big) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_A)\wedge(\vec{v}_i - \vec{v}_A) + \sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - A)\wedge(\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - A)\wedge[\dot{\vec{\omega}}\wedge(P_i - A)] + \sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - A)\wedge[\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P_i - A)]] \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - A)\wedge[\dot{\vec{\omega}}\wedge(P_i - A)] + \vec{\omega}\wedge\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - A)\wedge[\vec{\omega}\wedge(P_i - A)]\right] \\
&= \mathbb{J}_A\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge\mathbb{J}_A\vec{\omega}
\end{aligned} \tag{12}$$

Assim, o TMQM para *um* corpo rígido pode ser alternativamente expresso na forma:

$$m(G - A)\wedge\vec{a}_A + \mathbb{J}_A\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge\mathbb{J}_A\vec{\omega} = \vec{M}_A^{\text{ext}} \tag{13}$$

Casos particulares:

$$A = G \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbb{J}_G\vec{\omega}\big) = \mathbb{J}_G\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge\mathbb{J}_G\vec{\omega} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \tag{14}$$

$$\vec{a}_A = \vec{0} \ \text{ ou } \ (G - A)\parallel\vec{a}_A \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbb{J}_A\vec{\omega}\big) = \mathbb{J}_A\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge\mathbb{J}_A\vec{\omega} = \vec{M}_A^{\text{ext}} \tag{15}$$

4. Tensor de Inércia de um Corpo Rígido

De acordo com a equação (7), o tensor de inércia de um corpo rígido com respeito ao pólo A aplicado a um vetor $\vec{\omega}$ resulta no seguinte vetor:

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_A\vec{\omega} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - A)\wedge[(P_i - A)\wedge\vec{\omega}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\left[|P_i - A|^2\vec{\omega} - ((P_i - A)\cdot\vec{\omega})(P_i - A)\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

Adotando a notação:

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k} \tag{17}$$

$$(P_i - A) = x_i\vec{\imath} + y_i\vec{\jmath} + z_i\vec{k} \tag{18}$$

pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_A\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} m_i\Big[&(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}) \\
&- (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)(x_i\vec{\imath} + y_i\vec{\jmath} + z_i\vec{k})\Big]
\end{aligned} \tag{19}$$

Sejam $\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$ dois vetores unitários ortogonais entre si, ou seja, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{w} = 1$ e $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$:

(a) O *momento de inércia de um corpo rígido com respeito ao eixo* $A\vec{u}$ é definido como:

$$\begin{aligned}
J_{A\vec{u}} &= \vec{u}\cdot\mathbb{J}_A\vec{u} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\left[|P_i - A|^2 - ((P_i - A)\cdot\vec{u})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\Big[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_iu_x + y_iu_y + z_iu_z)^2\Big]
\end{aligned} \tag{20}$$

(b) O *produto de inércia de um corpo rígido com respeito aos eixos* $A\vec{u}$ *e* $A\vec{w}$, por sua vez, é definido como:

$$\begin{aligned} J_{A\vec{u}\vec{w}} &= -\vec{u} \cdot \mathbb{J}_A \vec{w} = -\vec{w} \cdot \mathbb{J}_A \vec{u} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left[((P_i - A) \cdot \vec{u})((P_i - A) \cdot \vec{w})\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Big[(x_i u_x + y_i u_y + z_i u_z)(x_i w_x + y_i w_y + z_i w_z)\Big] \end{aligned} \tag{21}$$

Em particular, os momentos e produtos de inércia associados aos eixos Ax, Ay e Az (notação padrão para os eixos $A\vec{\imath}$, $A\vec{\jmath}$ e $A\vec{k}$) definidos de forma canônica pela base ortonormal positiva $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, são dados por:

$$J_{Ax} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \qquad J_{Axy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

$$J_{Ay} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2) \qquad J_{Axz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

$$J_{Az} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad J_{Ayz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

A partir dessas definições, a equação (19) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_A \vec{\omega} = \; & \left[+J_{Ax}\omega_x - J_{Axy}\omega_y - J_{Axz}\omega_z\right] \vec{\imath} \\ & + \left[-J_{Axy}\omega_x + J_{Ay}\omega_y - J_{Ayz}\omega_z\right] \vec{\jmath} \\ & + \left[-J_{Axz}\omega_x - J_{Ayz}\omega_y + J_{Az}\omega_z\right] \vec{k} \end{aligned} \tag{22}$$

Em particular, diz-se que os eixos Ax, Ay e Az são *eixos principais de inércia* se os produtos de inércia $J_{Axy} = J_{Axz} = J_{Ayz} = 0$. Neste caso, a expressão de $\mathbb{J}_A \vec{\omega}$ se reduz a:

$$\mathbb{J}_A \vec{\omega} = J_{Ax}\omega_x \vec{\imath} + J_{Ay}\omega_y \vec{\jmath} + J_{Az}\omega_z \vec{k} \tag{23}$$

Finalmente, cabe determinar como o tensor de inércia de um corpo rígido com respeito a um pólo A genérico está relacionado ao tensor de inércia com respeito ao centro de massa G do corpo. Para tal observemos que, pela equação (8):

$$\vec{H}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A + \mathbb{J}_A \vec{\omega}$$

Por outro lado, a partir da fórmula de mudança de pólo, pode-se considerar que:

$$\vec{H}_A = (G - A) \wedge (m\vec{v}_G) + \vec{H}_G = m(G - A) \wedge \vec{v}_G + \mathbb{J}_G \vec{\omega} \tag{24}$$

Subtraindo da última equação a penúltima, tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}_A - \mathbb{J}_G)\vec{\omega} &= m(G - A) \wedge (\vec{v}_G - \vec{v}_A) \\ &= m(G - A) \wedge \big[\vec{\omega} \wedge (G - A)\big] = -m(G - A) \wedge \big[(G - A) \wedge \vec{\omega}\big] \end{aligned} \tag{25}$$

Portanto:

$$\mathbb{J}_A = \mathbb{J}_G - m(G - A) \wedge \big[(G - A) \wedge \bullet\big] \tag{26}$$

Nota-se que, por definição, $-m(G-A) \wedge \big[(G-A) \wedge \bullet\big]$ corresponde ao tensor de inércia com respeito ao pólo A de uma partícula de massa m, idêntica à do corpo rígido, localizada na mesma posição de seu centro de massa G. Em particular, considere que:

$$(G - A) = x_G \vec{\imath} + y_G \vec{\jmath} + z_G \vec{k} \tag{27}$$

Assim, da definição apresentada na equação (20), pode-se afirmar que o momento de inércia de um corpo rígido com respeito ao eixo $A\vec{u}$ está relacionado ao respectivo momento de inércia com respeito a um eixo $G\vec{u}$, passante pelo centro de massa G do corpo, por meio da relação:

$$J_{A\vec{u}} = J_{G\vec{u}} + m\Big[(x_G^2 + y_G^2 + z_G^2) - (x_G u_x + y_G u_y + z_G u_z)^2\Big] = J_{G\vec{u}} + md^2_{A\vec{u},G\vec{u}} \qquad (28)$$

com $d_{G\vec{u},A\vec{u}}$ denotando a distância entre os *eixos paralelos* $A\vec{u}$ e $G\vec{u}$.

Da definição apresentada na equação (21), pode-se afirmar que o produto de inércia de um corpo rígido com respeito aos eixos $A\vec{u}$ e $A\vec{w}$ está relacionado ao respectivo produto de inércia com respeito ao par de eixos $G\vec{u}$ e $G\vec{w}$, passantes pelo centro de massa G do corpo, por meio da relação:

$$J_{A\vec{u}\vec{w}} = J_{G\vec{u}\vec{w}} + m\Big[(x_G u_x + y_G u_y + z_G u_z)(x_G w_x + y_G w_y + z_G w_z)\Big] \qquad (29)$$

As relações expressas pelas equações (28) e (29) constituem o *Teorema dos Eixos Paralelos*, a partir do qual, por exemplo, podem ser obtidas as relações entre os momentos e produtos de inércia associados aos eixos Ax, Ay e Az e os momentos e produtos de inércia associados a um *sistema de eixos paralelos* Gx, Gy e Gz com origem no centro de massa G do corpo rígido:

$$J_{Ax} = J_{Gx} + m(y_G^2 + z_G^2) \qquad J_{Axy} = J_{Gxy} + mx_G y_G$$

$$J_{Ay} = J_{Gy} + m(x_G^2 + z_G^2) \qquad J_{Axz} = J_{Gxz} + mx_G z_G$$

$$J_{Az} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) \qquad J_{Ayz} = J_{Gyz} + my_G z_G$$