



# **Transformada de Fourier**

---

**Theo Pavan e Adilton Carneiro**  
**TAPS**



# Análise de Fourier

- Análise de Fourier - representação de funções por somas de senos e cossenos ou soma de exponenciais complexas
- Uma análise datada da época dos babilônios para prever eventos astronômicos, estudada por muitos cientistas desde então.
- Jean Baptiste Joseph Fourier, por volta de 1807, completou um trabalho no qual observou que séries senoidais harmonicamente relacionadas eram úteis na representação da distribuição de temperatura de um corpo.

# Análise de Fourier

- Fourier foi quem mais percebeu a potencialidade dessa análise. Mas sofreu forte oposição, i.e. Lagrange.
- 1829 → P. L. Dirichlet desenvolveu a sustentação matemática para descrever um sinal periódico por séries de Fourier.
- Ferramenta mais importante nas análises de sinais.

# Série de Fourier

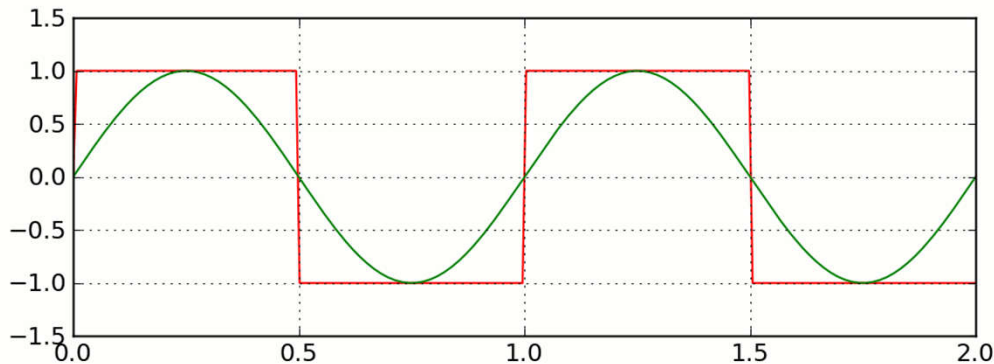
Uma função periódica pode ser descrita por:

$$(S_N f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

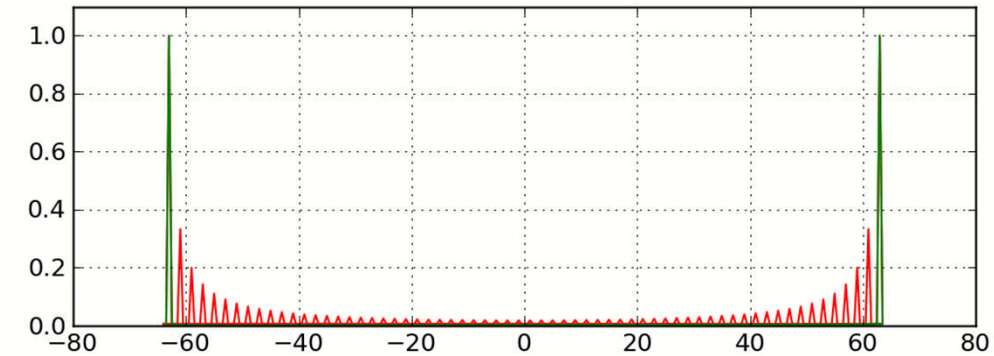
Em que  $a_0, a_n, b_n$  são os coeficientes de Fourier

# Fenômeno de Gibbs

- Onda quadrada descrita como soma de senoides:



$$\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots$$



# Representação série de Fourier

- $x(t)$  pode ser expresso como uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas.
- Sinal de tempo contínuo e periódico.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t},$$
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt.$$

→ Síntese

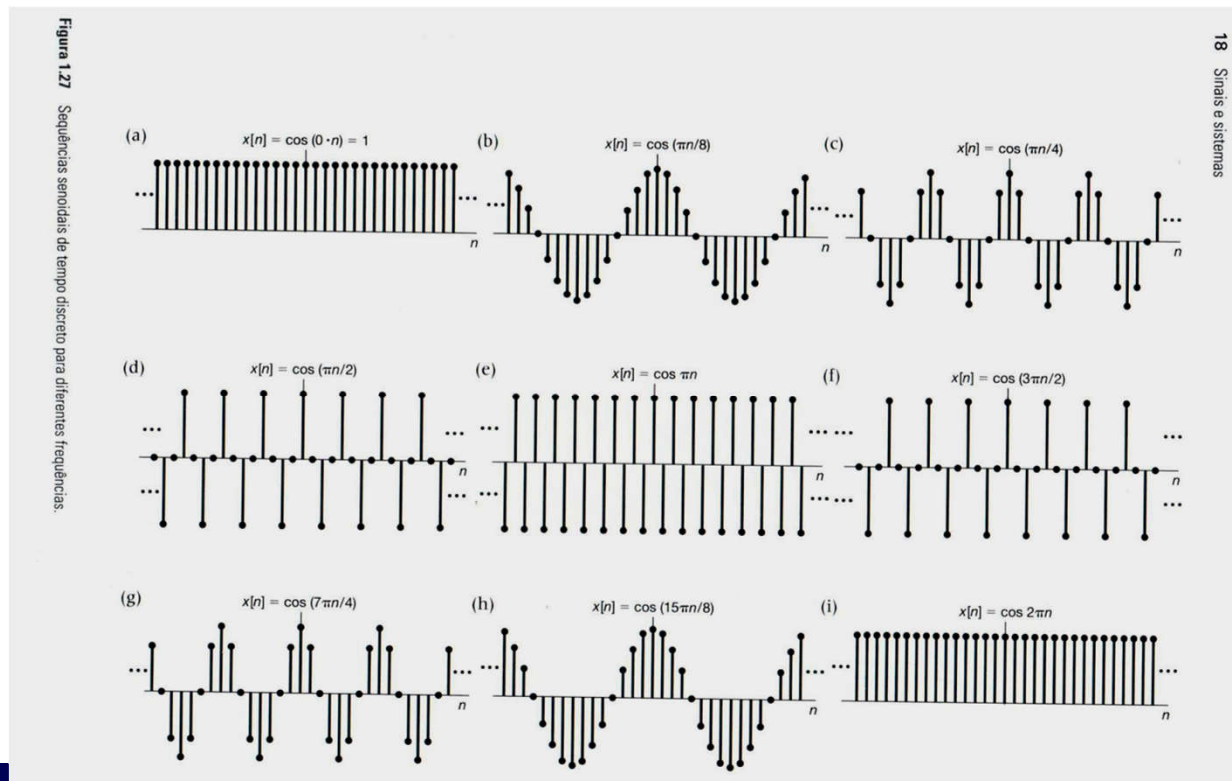
→ Análise

# Exponenciais complexas de tempo discreto

-  $\exp[j(\omega_0 + 2\pi)n] = \exp(j\omega_0 n)\exp(2\pi n) = \exp(j\omega_0 n) \rightarrow$  sinal exponencial na frequência  $\omega_0 + 2\pi$  é o mesmo na frequência  $\omega_0$ .

- O sinal de exponencial complexo não tem uma taxa crescente na oscilação com o aumento do módulo  $\omega_0$ .

- Condição para o sinal ser periódico  $\Rightarrow e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$



# Série de Fourier para sinais discretos

$$x[n] = x[n + r.N]$$

A frequência fundamental é  
 $\omega_0 = 2\pi/N$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$X[k] = X[k+rN]$$

**Existem apenas N  
exponenciais complexas  
de tempo discreto que  
são periódicas com  
período N**

Ver livro Oppenheim, Sinais e sistemas, pgs 16 a 20



# Transformada de Fourier

- As transformadas são usadas para analisar uma função em um outro domínio.
- A transformada de Fourier, por exemplo, transforma um sinal no domínio do tempo para o domínio de frequência.
- Enquanto que a transformada inversa de Fourier realiza o procedimento inverso. Domínio da frequência para o domínio do tempo.

# Transformada de Fourier

- Existem muitas formas para se decompor um sinal.
- Um dos motivos para o uso de senoides é que esses são mais fáceis de interpretar que os sinais originais.
- Senoides e exponenciais complexas quando entrada para sistemas LIT são também saídas desses sistemas.

# DFT – Discrete Fourier Transform

Transformada de Fourier

Transformada inversa de Fourier

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\omega t} dt \quad f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

Na computação digital a transformada de Fourier precisa ser corretamente adequada para sinais discretos. Consideremos uma função  $\mathbf{x[n]}$  periódica com período fundamental  $\mathbf{N}$ .

$$x[n] = x[n + r.N]$$

A frequência fundamental é  
 $\omega_0 = 2\pi/N$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$X[k]$  → Coeficientes da série discreta de Fourier.  
Harmonicamente relacionados.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$x[n]$  → sequência discreta de um sinal contínuo no tempo  $x(t)$ .

# Espectro de potência - DFT

- O espectro de potência  $S_{xx}(f)$  de uma função  $x(t)$  é definido como  $S_{xx}(f) = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2$ .

$X(f) = F\{x(t)\} \rightarrow$  transformada de Fourier.

$X^*(f) \rightarrow$  é o complexo conjugado  $X(f)$ .

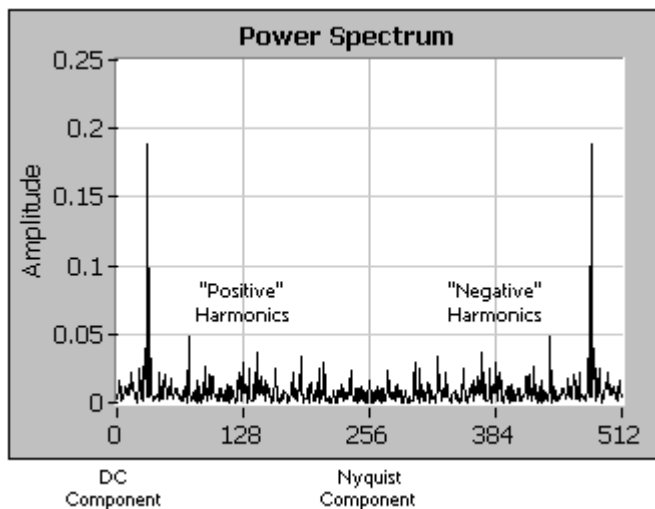
- No Labview, o espectro de potência é computado a partir de rotinas de DFT e FFT (Fast Fourier Transform).

$$S_{xxx} = \frac{|F\{x\}|^2}{N^2}$$

- $S_{xxx} \rightarrow$  saída da VI espectro de potência.
- $N \rightarrow$  número de amostras na sequência de entrada  $X$ .

# Espectro de potência

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta t}$$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X[k] = X[N-k]$$

- A maior frequência que pode ser analisada pela DFT é  $f_s/2$ , que é o limite de Nyquist.

$f_s \rightarrow$  frequência de amostragem.

- O número de amostras  $N$  da DFT complexa é igual ao número de amostras do sinal de entrada.

- A saída da DFT é espelhada na frequência de Nyquist. Ou seja, na amostra  $N/2$  teremos a frequência de Nyquist caso  $N$  seja par.

- Se o sinal for em Volts a saída do espectro de potência tem unidade of volts-rms ao quadrado ( $V_{\text{rms}}^2$ ).

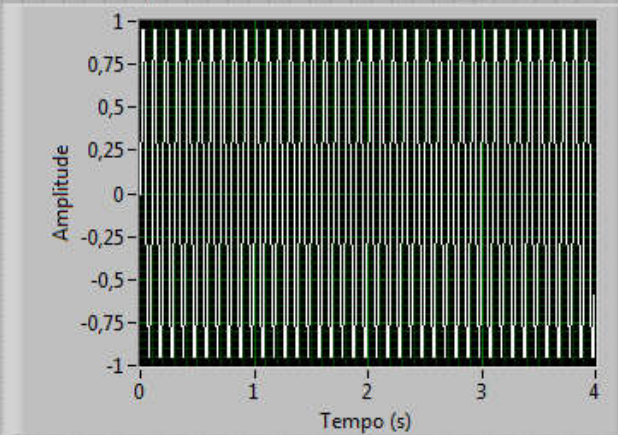
### Parâmetros da onda seno

frequency	offset
<input type="text" value="10,00"/>	<input type="text" value="0,00"/>
amplitude	phase
<input type="text" value="1,00"/>	<input type="text" value="0,00"/>

### Informação sobre amostragem

Fs
<input type="text" value="100,0"/>
#s
<input type="text" value="400"/>

Waveform Graph 2



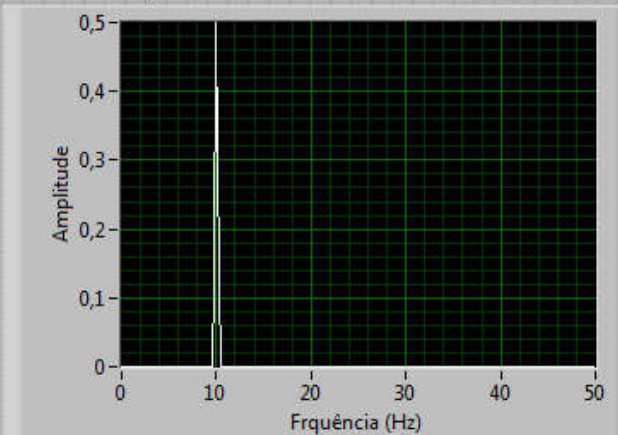
### Informação sobre a forma de onda gerada

t0	Y
<input type="text" value="00:00:00,000"/> DD/MM/YYYY	<input type="text" value="0"/>
dt	<input type="text" value="0,587785"/>
<input type="text" value="0,01"/>	<input type="text" value="0,951057"/>

### Informação sobre a forma de DFT

magnitude		
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="3,01259f"/>	
	<input type="text" value="3,46231f"/>	
	<input type="text" value="1,87044f"/>	
f0	df	size(s)
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0,25"/>	<input type="text" value="200"/>

Waveform Graph



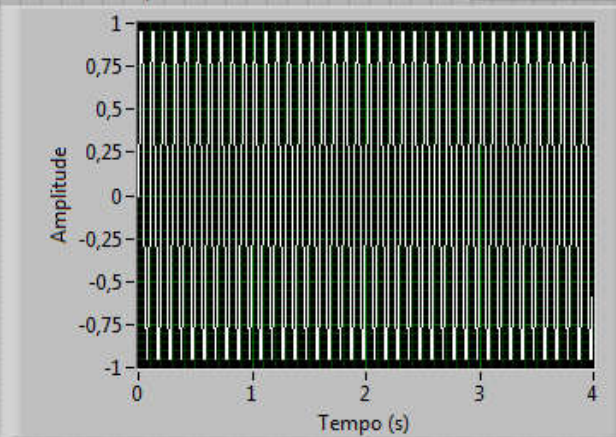
### Parâmetros da onda seno

frequency: 10,00  
offset: 0,00  
amplitude: 1,00  
phase: 0,00

### Informação sobre amostragem

Fs: 100,0  
#s: 400

Waveform Graph 2



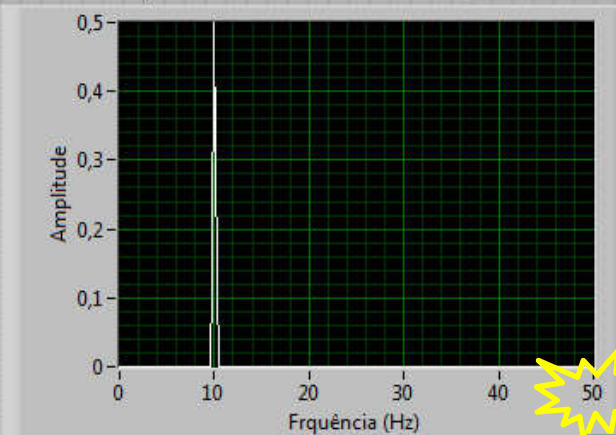
### Informação sobre a forma de onda gerada

t0: 00:00:00,000  
DD/MM/YYYY  
dc: 0,01  
Y: 0  
0,58778  
0,95105

### Informação sobre a forma de DFT

magnitude: 3,01259f  
3,46231f  
1,87044f  
f0: 0  
df: 0,25  
size(s): 200

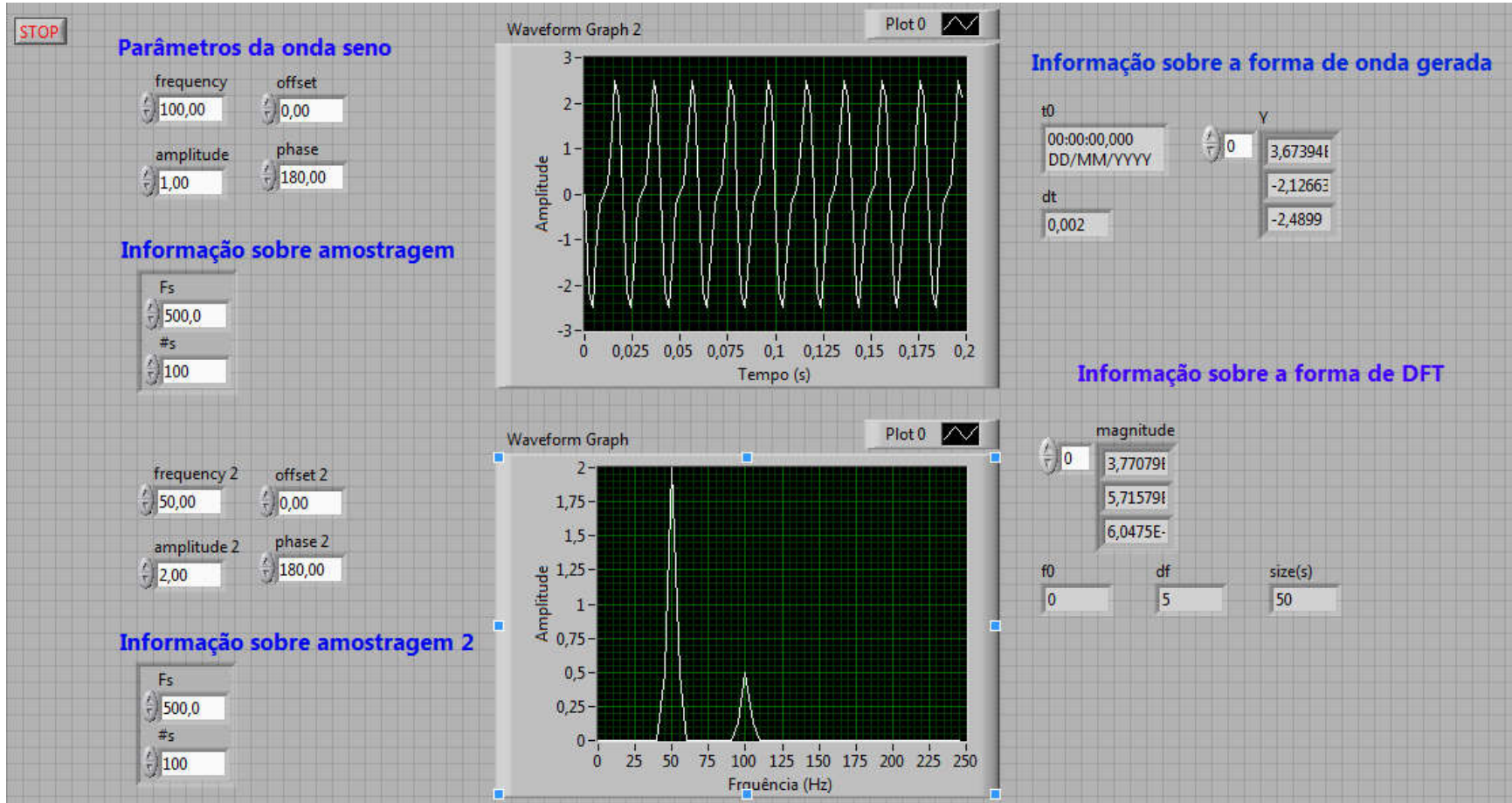
Waveform Graph



50

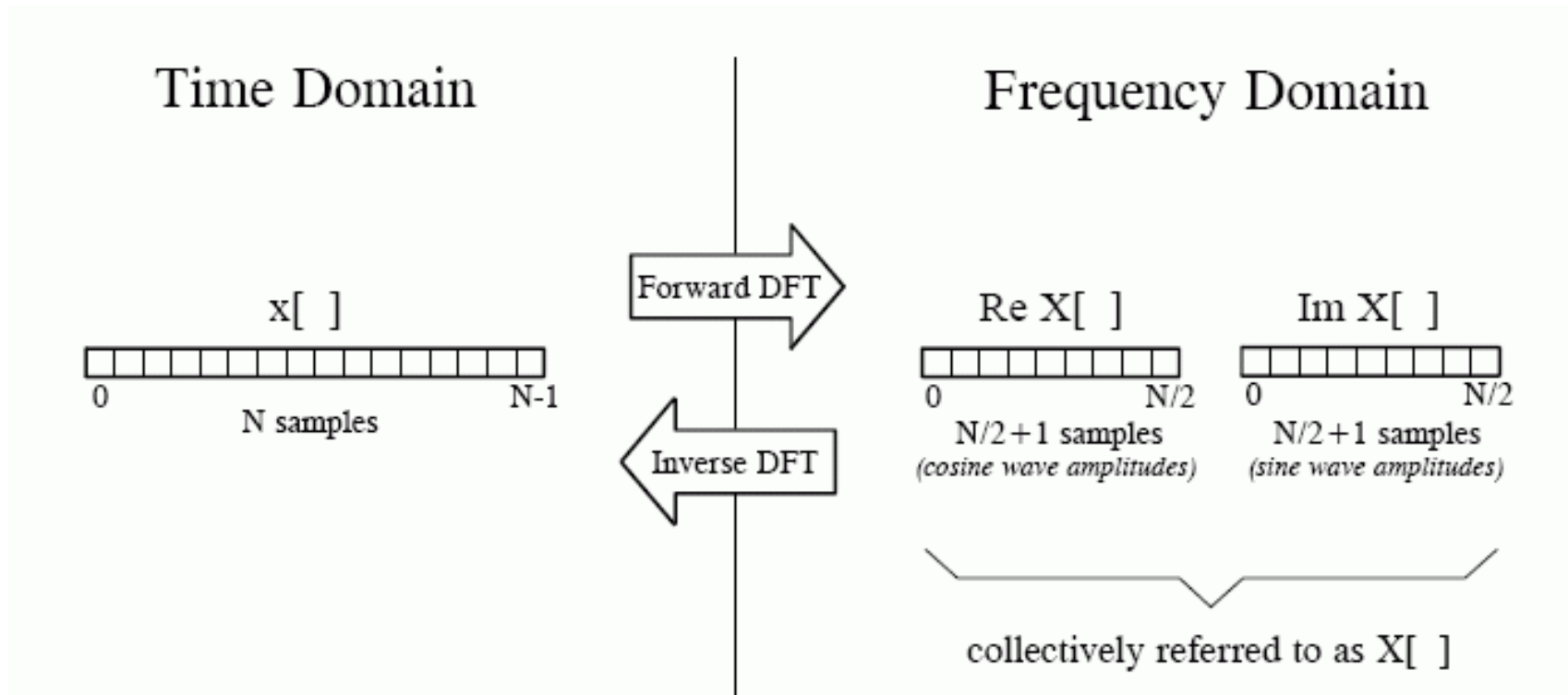
Limite de Nyquist

$$f_1(\omega_1 t) + f_2(\omega_2 t)$$



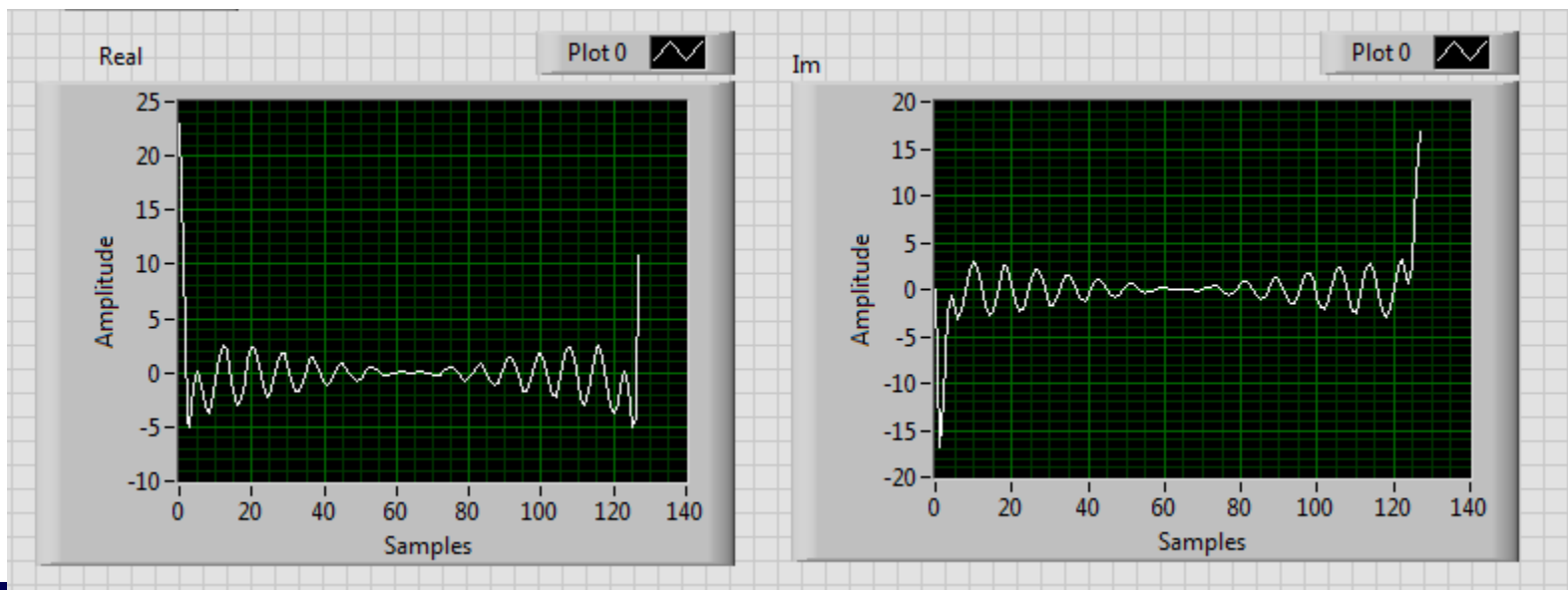
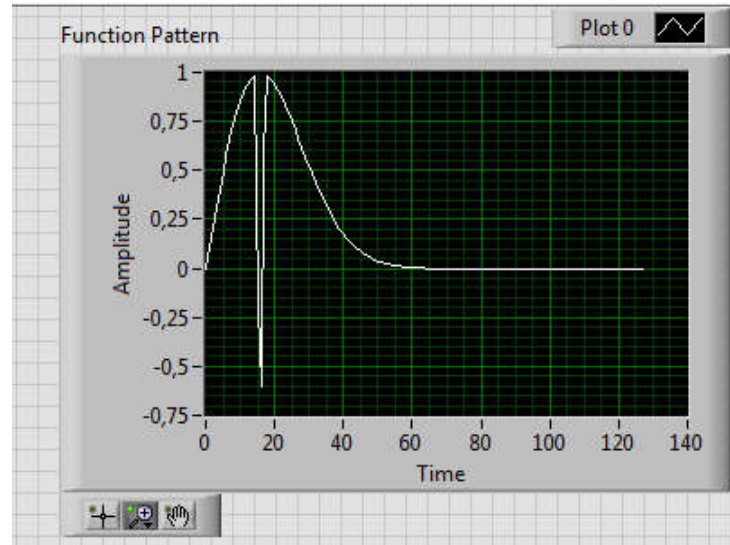


# Notação da DFT

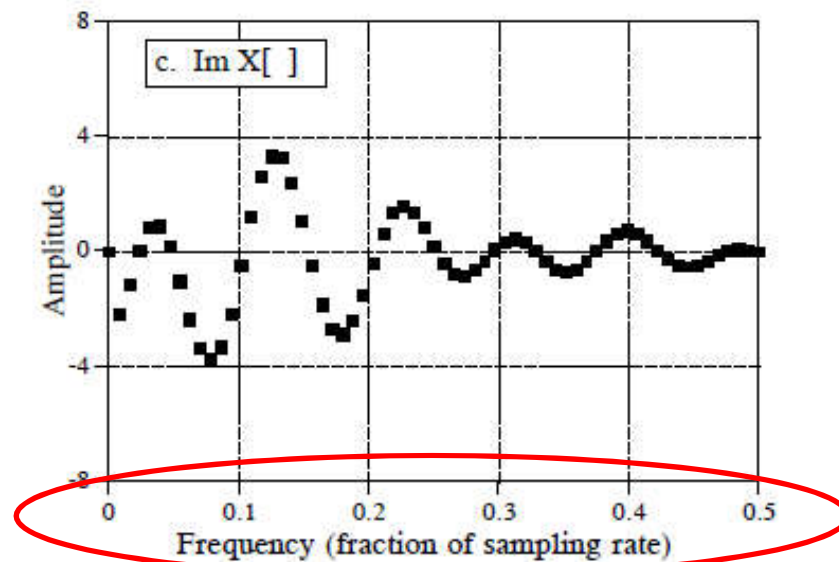
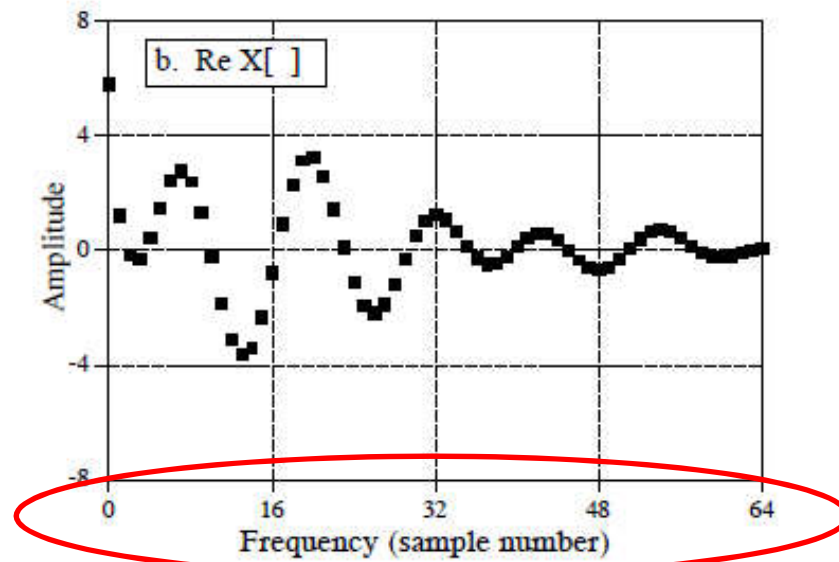


$N$  pode ser qualquer positivo inteiro, mas geralmente escolhe-se valores que são potência de 2 (64, 128, 256, etc ...).

# Exemplo de DFT real



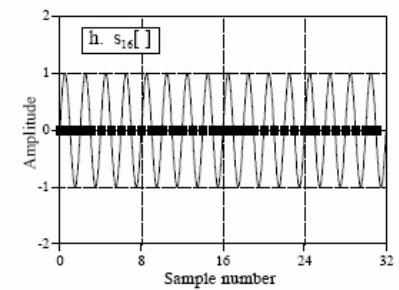
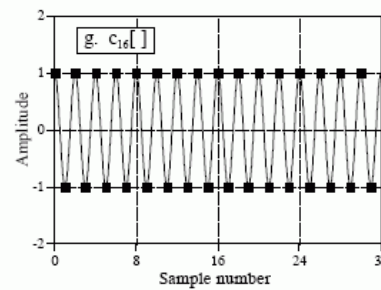
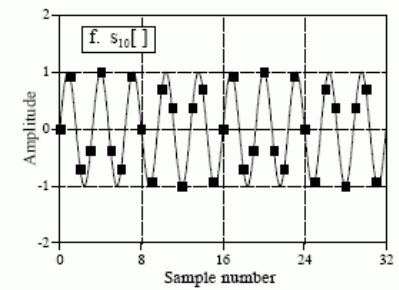
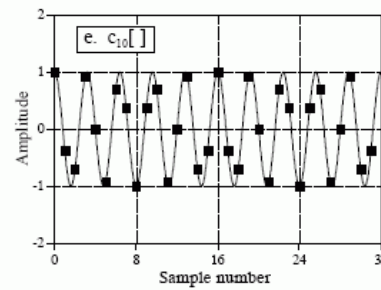
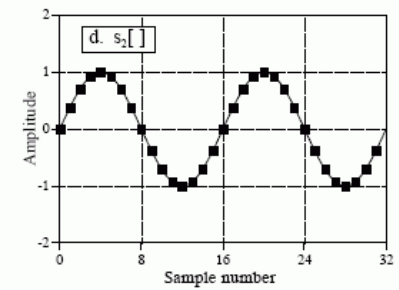
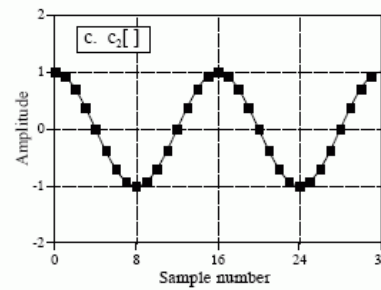
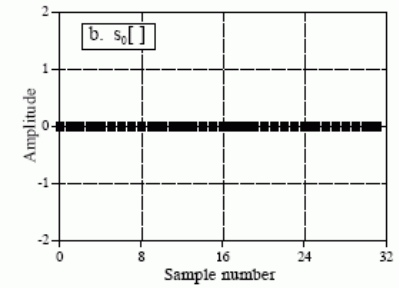
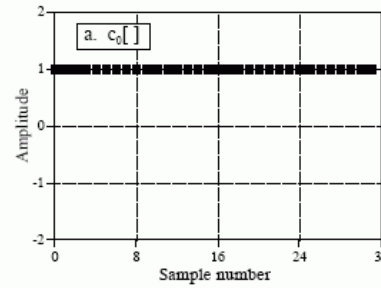
# Frequency Domain



$$c_k[i] = \cos(2\pi ki/N)$$

$$s_k[i] = \sin(2\pi ki/N)$$

$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} \text{Re}\bar{X}[k] \cos(2\pi ki/N) + \sum_{k=0}^{N/2} \text{Im}\bar{X}[k] \sin(2\pi ki/N)$$



# Calculando a DSP

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\operatorname{Re}X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos(2\pi k i / N)$$

$$\operatorname{Re}\bar{X}[k] = \frac{\operatorname{Re}X[k]}{N/2}$$

$$\operatorname{Im}\bar{X}[k] = -\frac{\operatorname{Im}X[k]}{N/2}$$

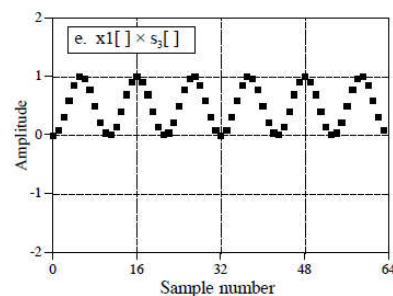
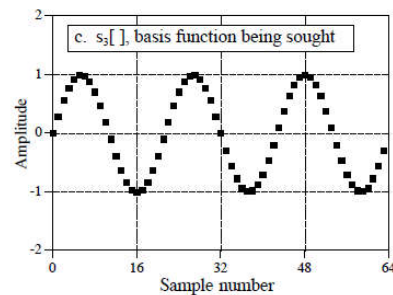
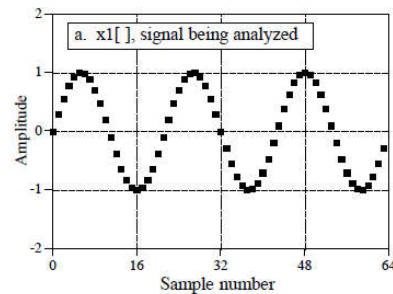
$$\operatorname{Im}X[k] = -\sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin(2\pi k i / N)$$

$$\operatorname{Re}\bar{X}[0] = \frac{\operatorname{Re}X[0]}{N}$$

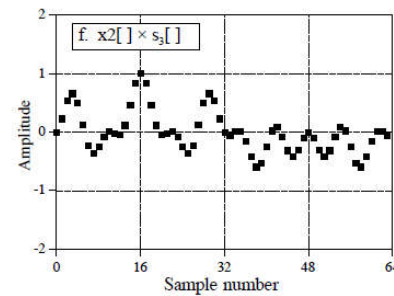
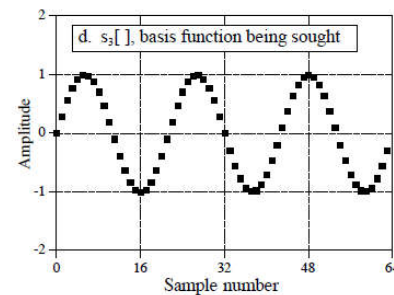
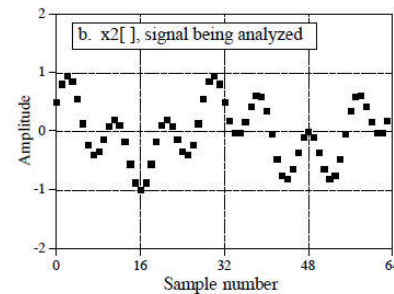
$$\operatorname{Re}\bar{X}[N/2] = \frac{\operatorname{Re}X[N/2]}{N}$$

# DFT pelo método de correlação

Example 1



Example 2



Soma escalonada

↓  
1



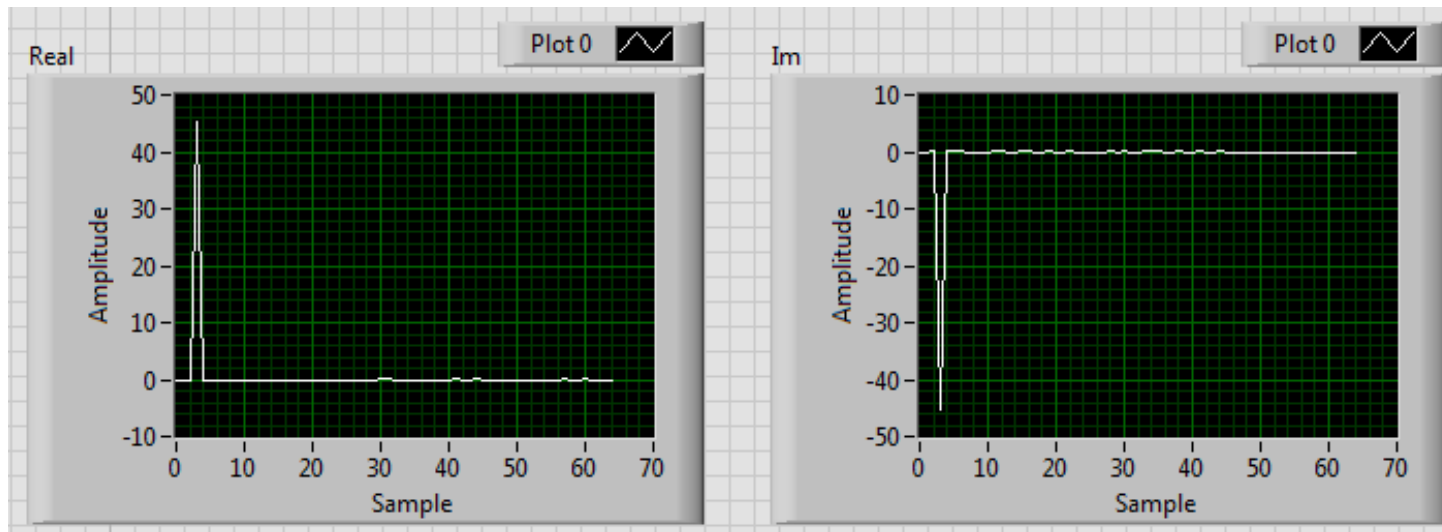
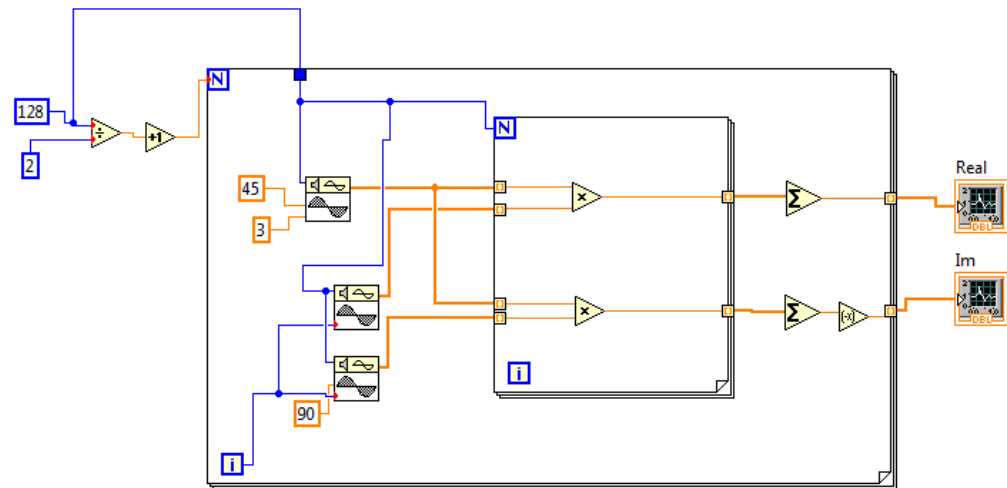
Soma → 0

# Método da correlação

$$\text{Re}X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos(2\pi k i / N)$$

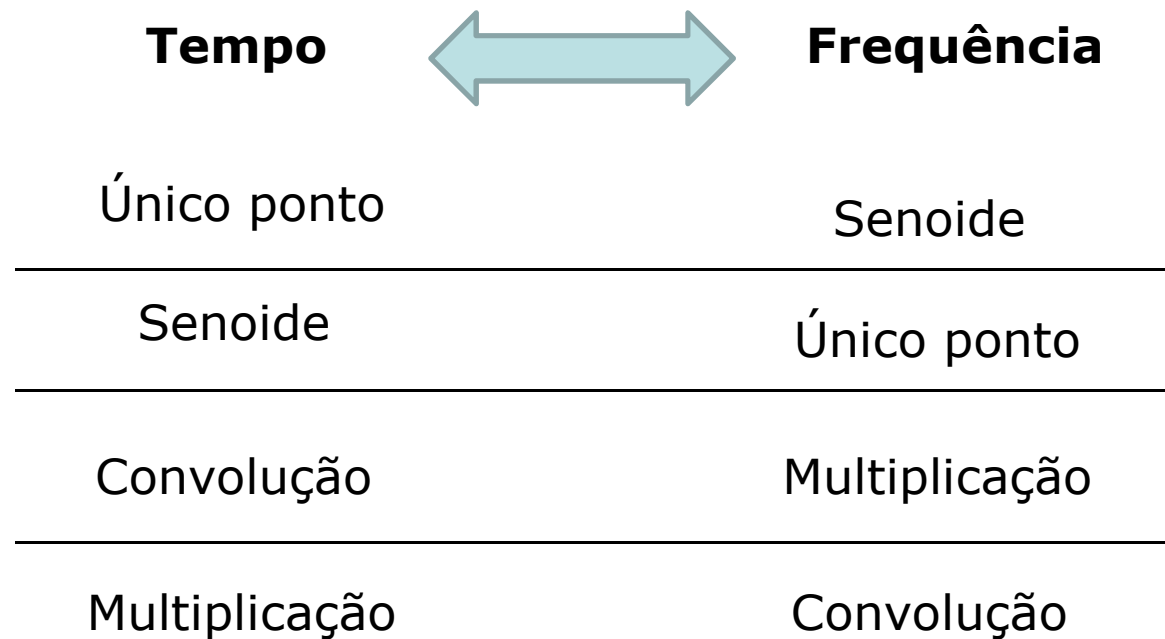
$$\text{Im}X[k] = - \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin(2\pi k i / N)$$

$$0 \leq k \leq N/2$$



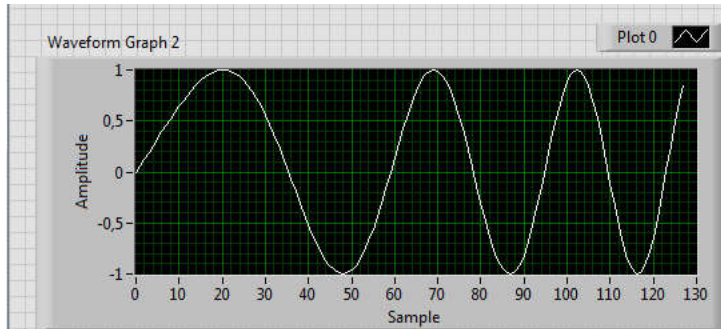
# Dualidade

- Simetria entre os domínios do tempo e da frequência.





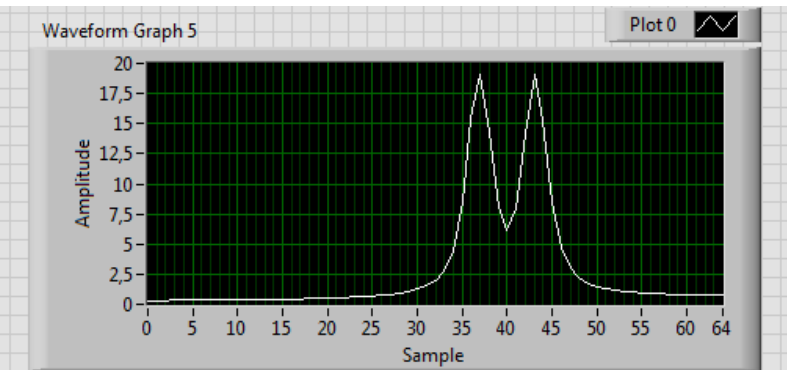
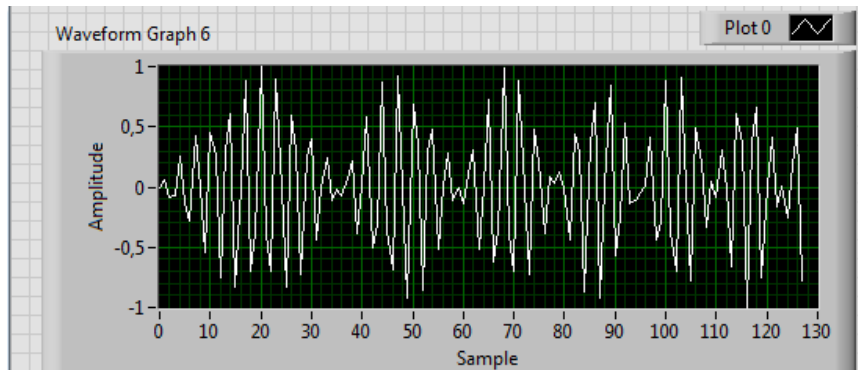
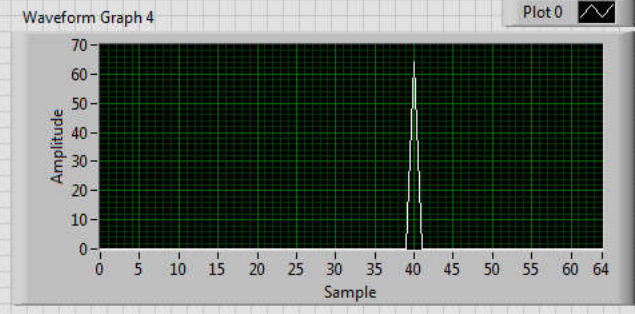
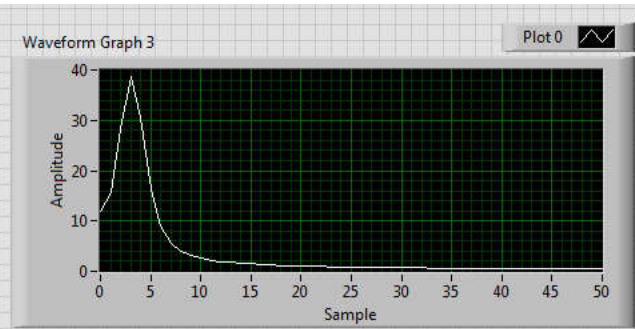
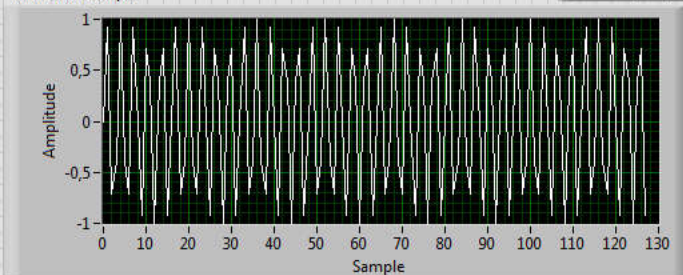
# Exemplo Batimento



Frequência

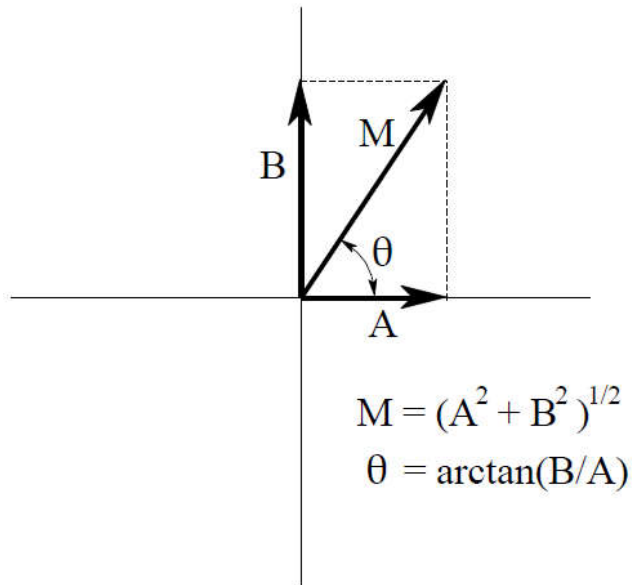
40,00

Waveform Graph



# Notação Polar

$$A \cos(x) + B \sin(x) = M \cos(x + \theta)$$



$$MagX[k] = (ReX[k]^2 + ImX[k]^2)^{1/2}$$

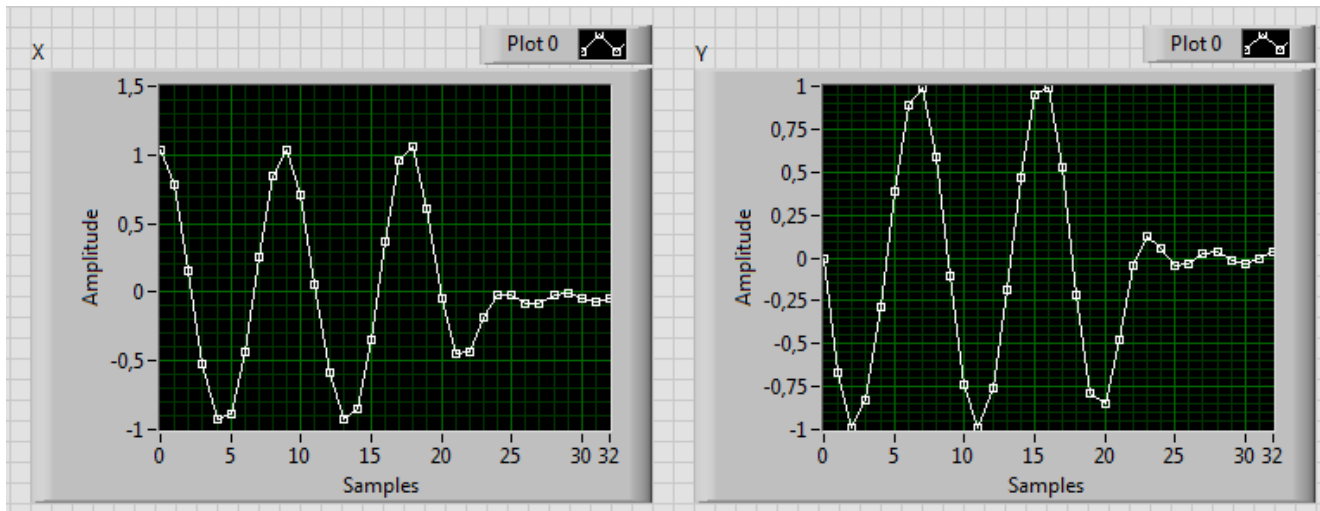
$$PhaseX[k] = \arctan\left(\frac{ImX[k]}{ReX[k]}\right)$$

$$ReX[k] = MagX[k] \cos(PhaseX[k])$$

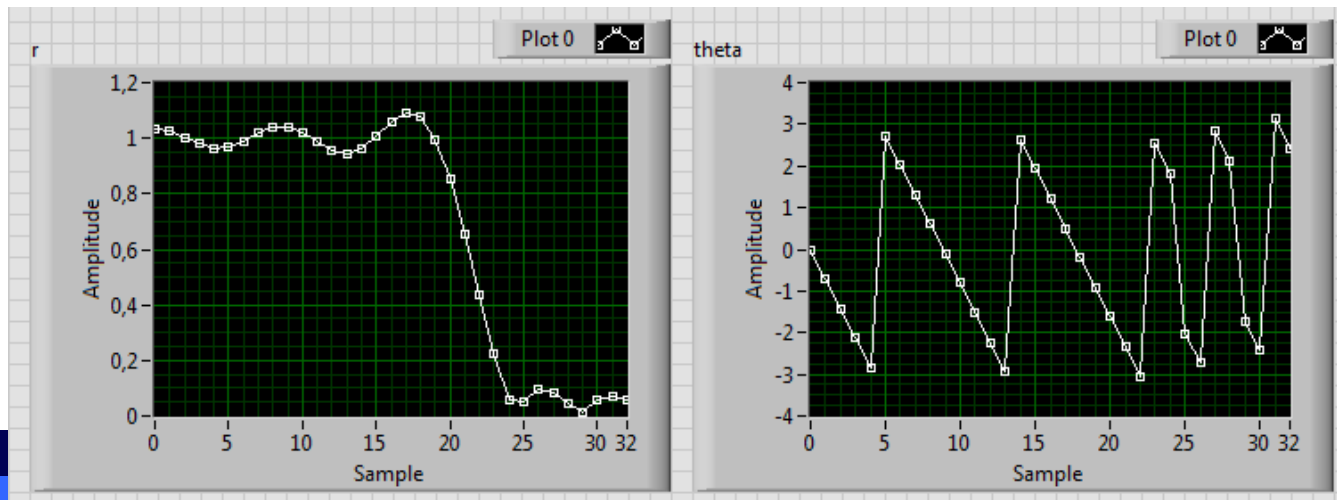
$$ImX[k] = MagX[k] \sin(PhaseX[k])$$

# Filtro passa-baixas

## Retangular

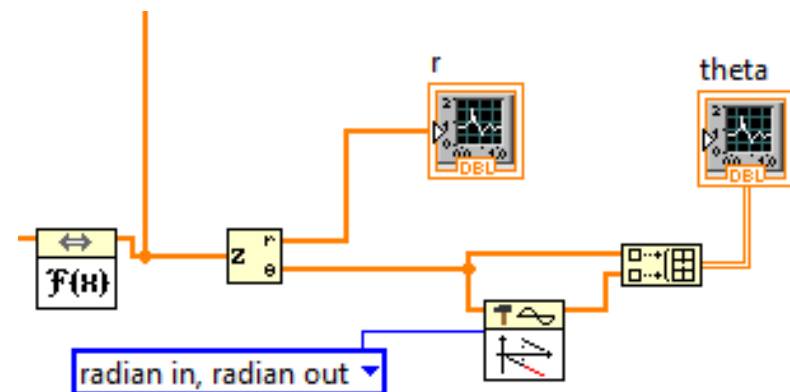
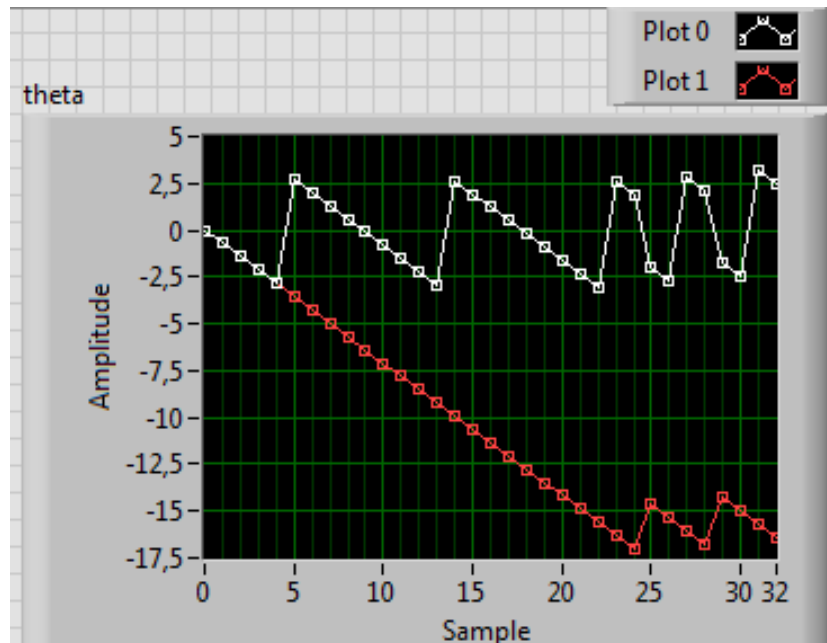


## Polar



# Fase

- Os valores de fase, usualmente, são mostrados entre  $-\pi$  e  $+\pi$ . Isso causa as descontinuidades vistas.



# Fase para baixas amplitudes

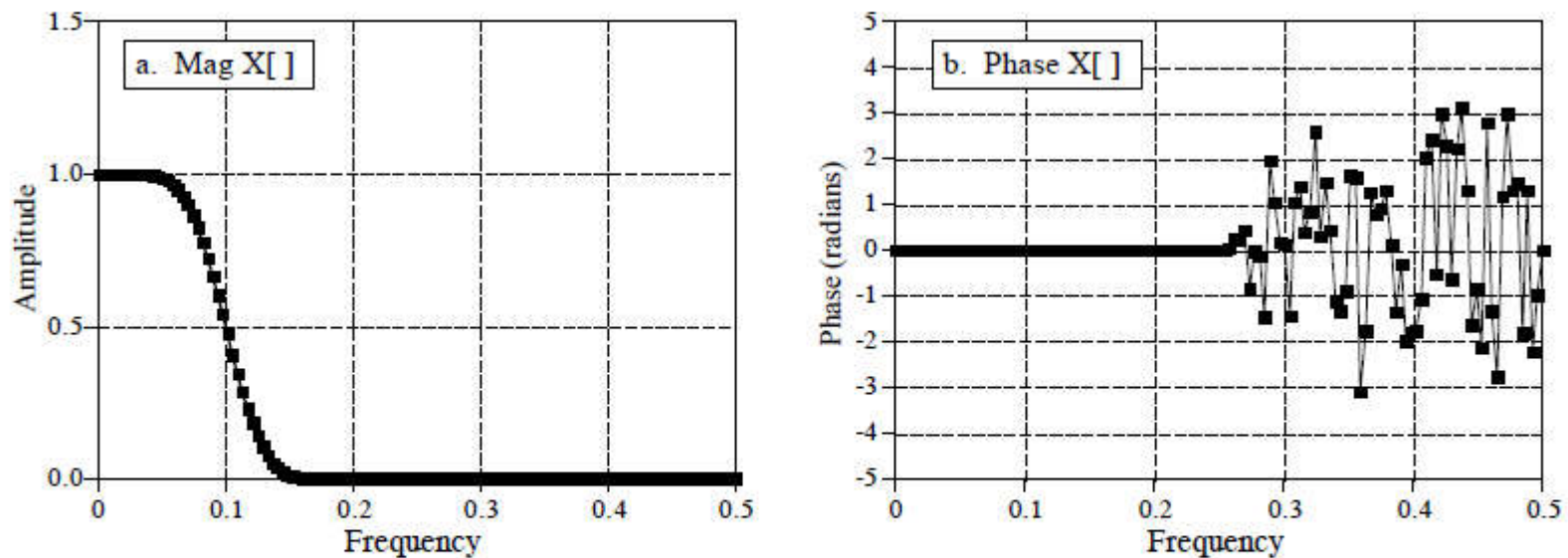


FIGURE 8-11

The phase of small magnitude signals. At frequencies where the magnitude drops to a very low value, round-off noise can cause wild excursions of the phase. Don't make the mistake of thinking this is a meaningful signal.

# Janelamento

- **Imaginemos um sinal muito longo, ao amostrar esse sinal ele é truncado por uma janela retangular.**
- **O sinal em análise é finito, portanto ele já foi amostrado por uma janela retangular.**

Transformada de Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

Transformada de Fourier de um sinal multiplicado por uma janela  $w(n)$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

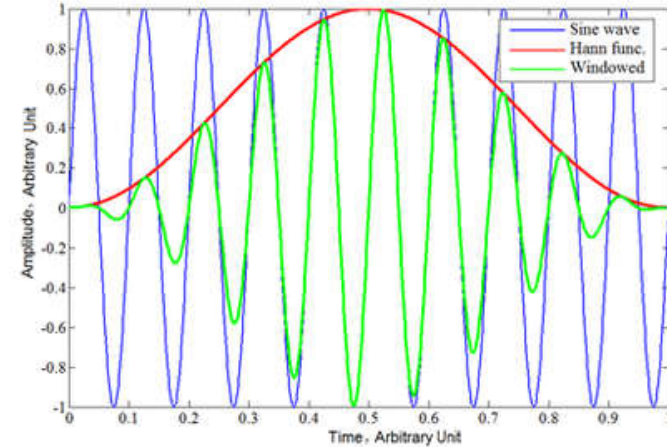
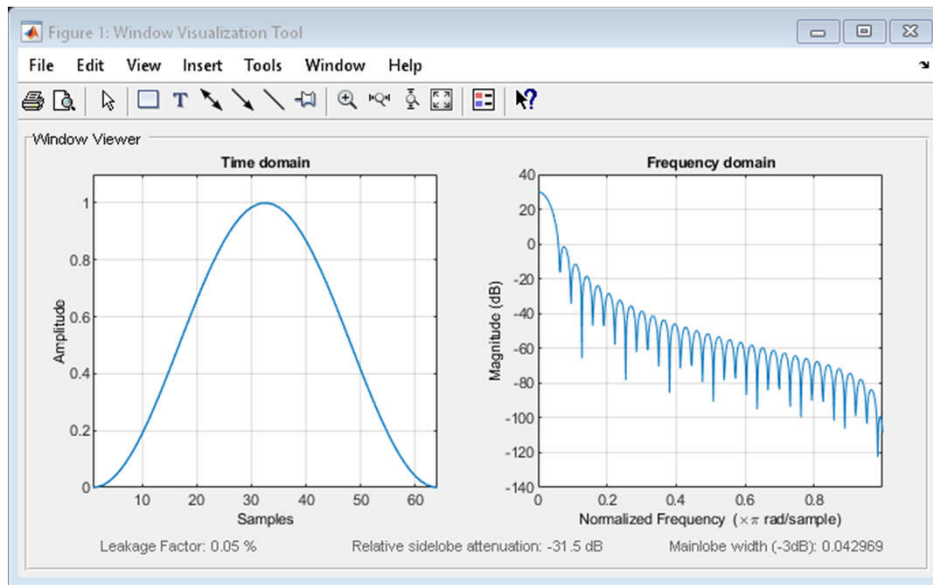
# Janelamento

- Esse procedimento afeta o sinal no domínio da frequência.
- Sinais no domínio do tempo multiplicados correspondem à convolução desses sinais no domínio da frequência.

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$$

- O espectro do sinal é o espectro da janela deslocado no eixo das frequências.

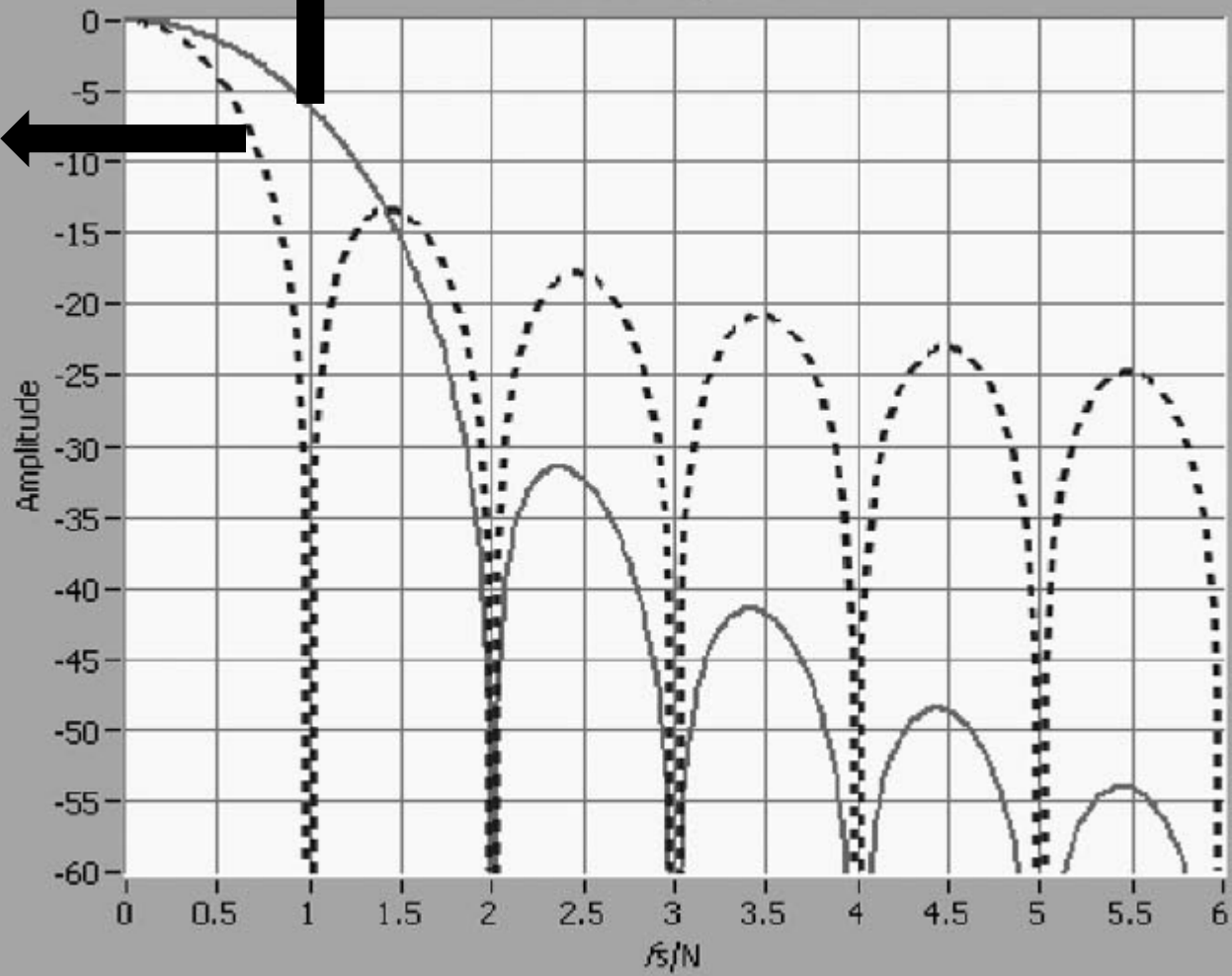
# Janelamento



<https://www.mathworks.com/help/signal/ref/hann.html>



Window Spectrum

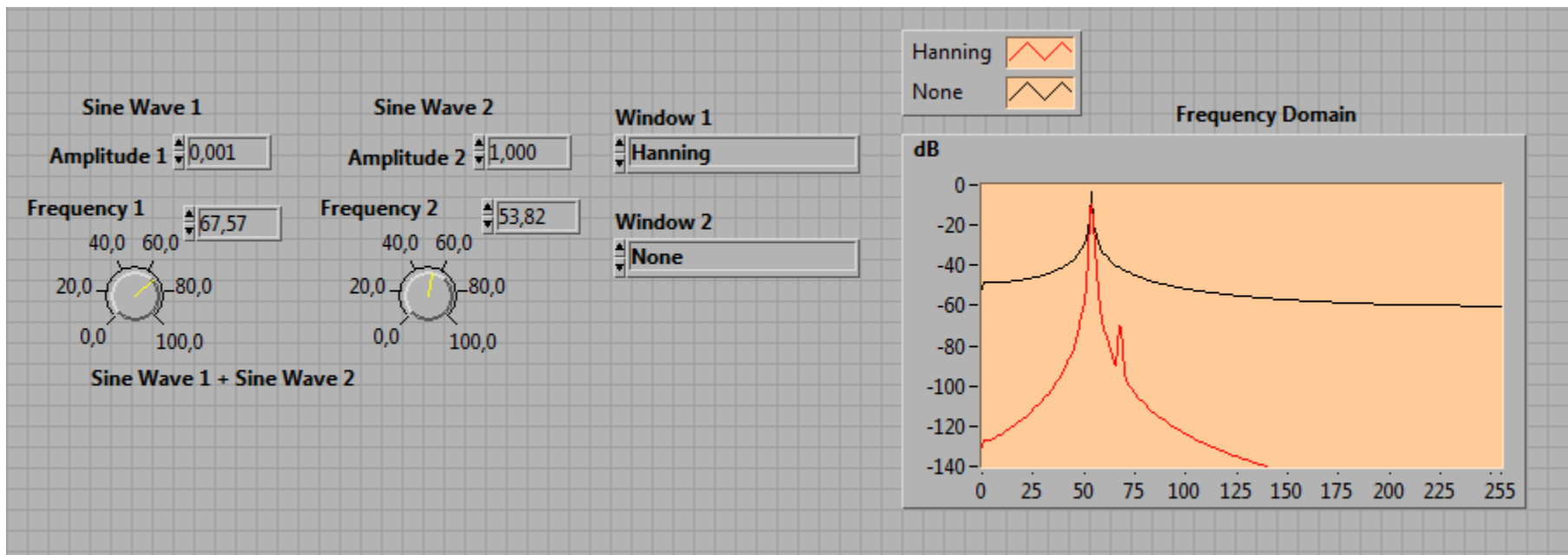
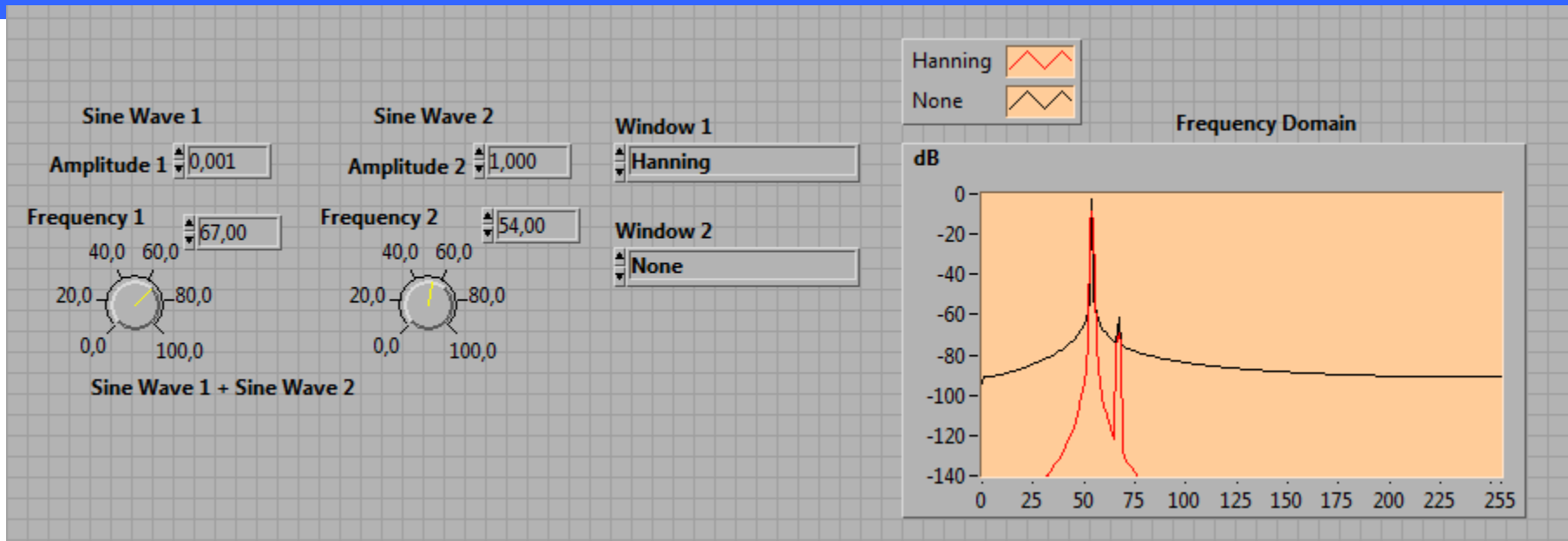


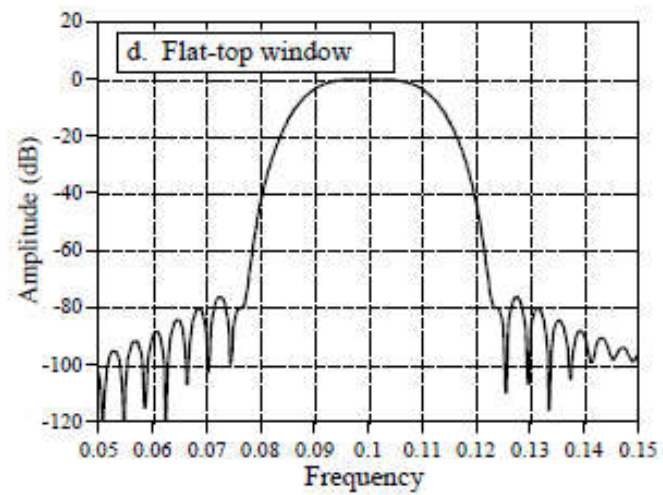
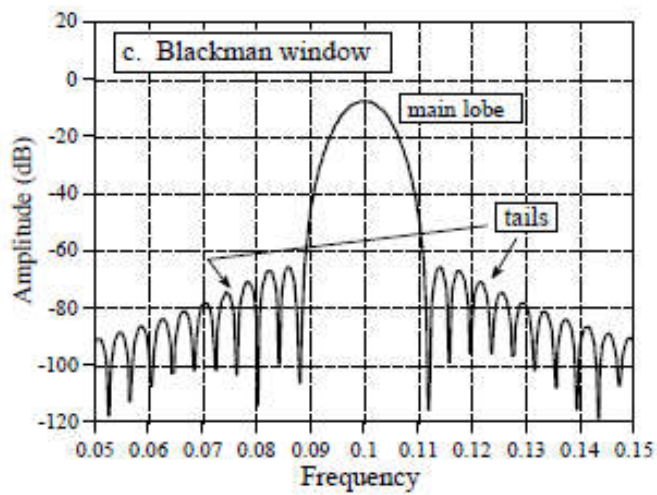
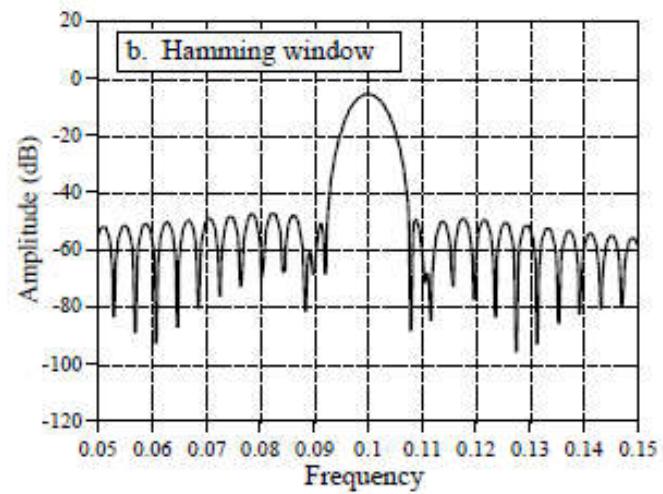
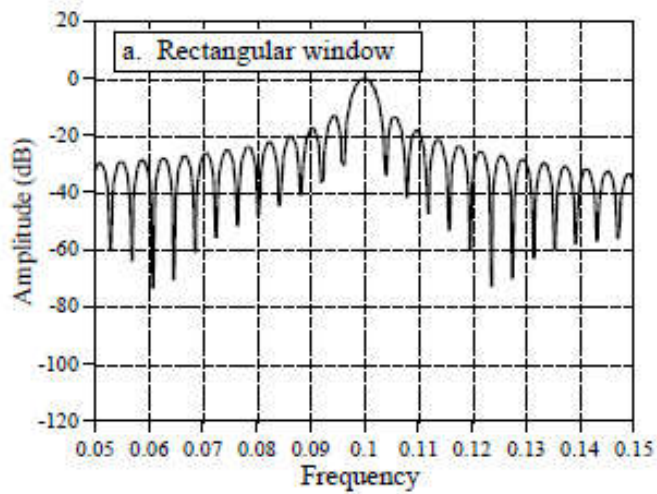
Hann



Rectangular



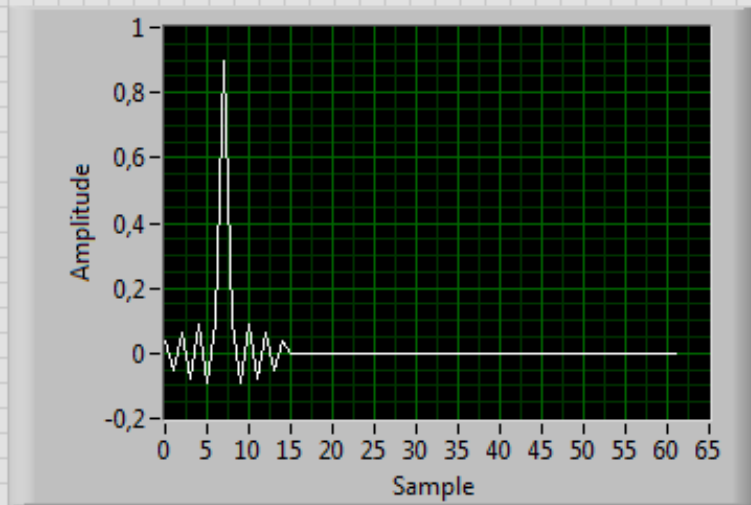




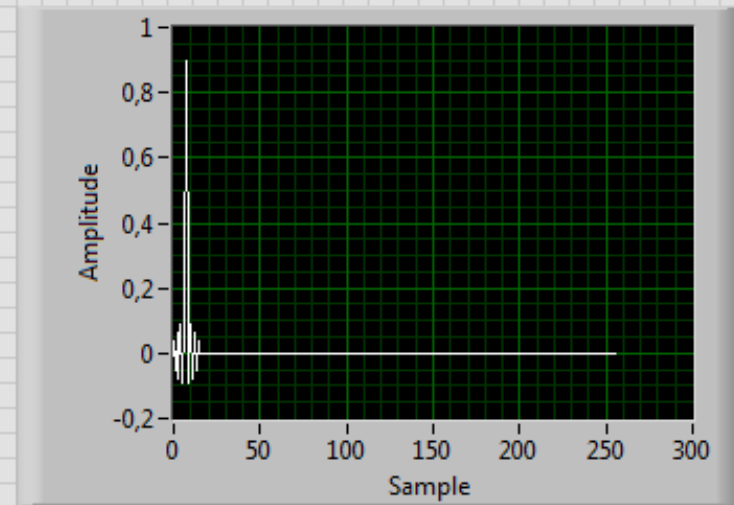
# Resolução

- O número de pontos da DFT, igualmente espaçados, entre 0 e  $f_s/2$ , indica a resolução.
- Para aumentar a resolução de uma DFT, é preciso amostrar um sinal por um maior período de tempo.
- Podemos também adicionar *zeros* ao fim do sinal (*zero padding*).

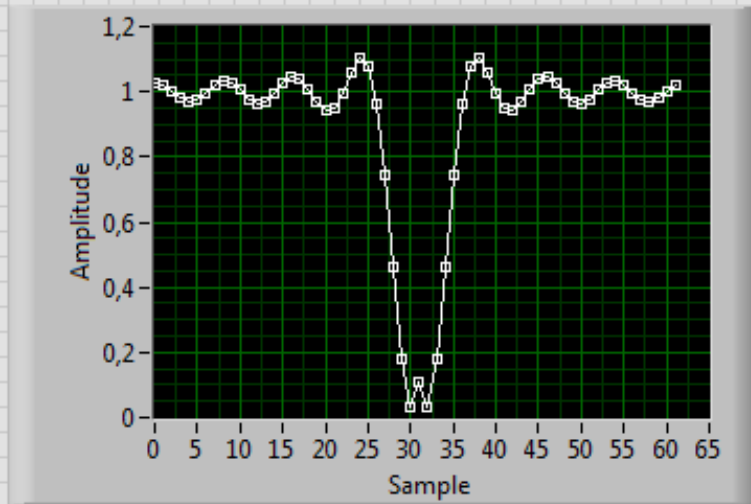
Windowed X



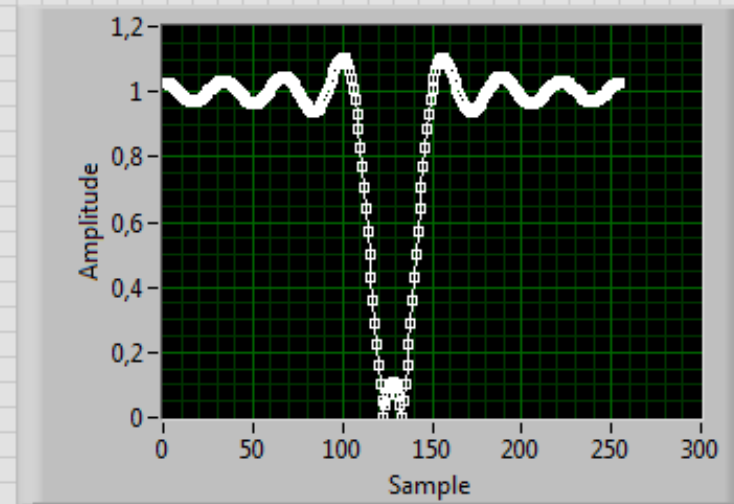
Zero Padded Array

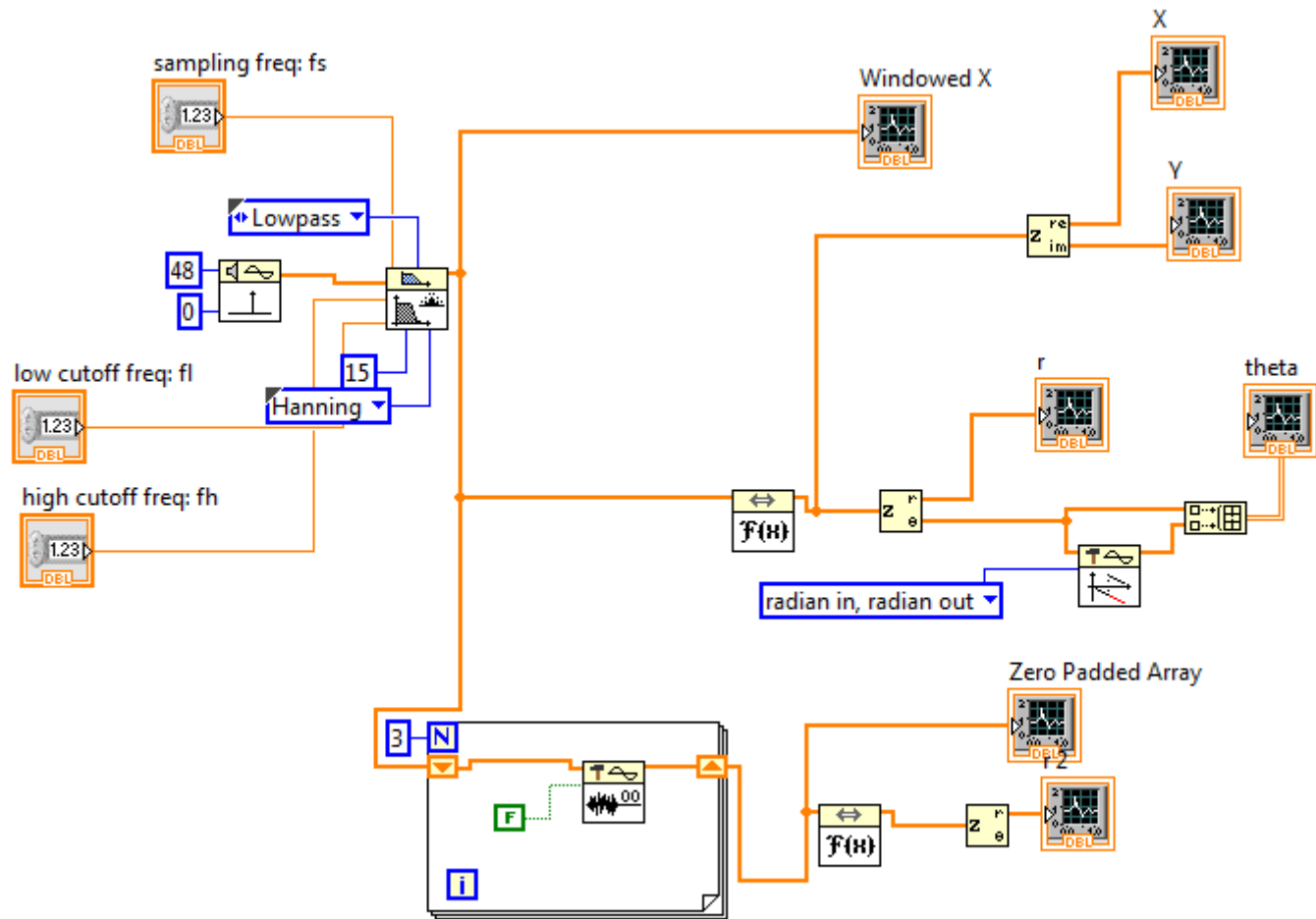


r



r2





# Resposta em frequência de um sistema LIT

- A relação entre a resposta ao impulso e a resposta em frequência é de extrema importância em análise de sinais.
- A resposta em frequência de um sinal é a transformada de Fourier da resposta ao impulso.

# Propriedades da transformada de Fourier

- A transformada de Fourier é linear.
  - Aditiva e homogênea.
- Não é invariante no tempo.
  - Deslocamentos no tempo levam a mudanças na fase da transformada.



# Teorema de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Time Domain

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

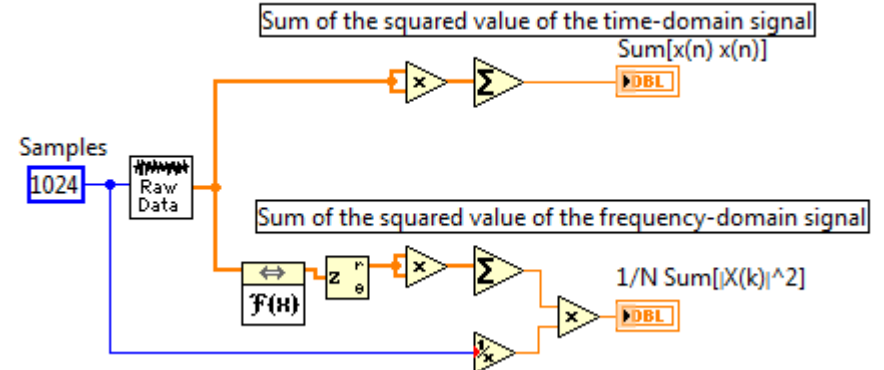
1554,5653

Frequency Domain

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

1554,5653

Run this VI to demonstrate Parseval's theorem, which states that the energy of a signal in the time domain (left-hand value above) is identical to the energy of the signal in the frequency domain (right-hand value above).



# Bibliografia

- SMITH, S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Signal Processing (<http://www.dspguide.com/>)
- A. V. OPPENHEIM; A. S. Willsky. Sinais e Sistemas, 2ª ed., 2010.
- OPPENHEIM; R. W. SCHAFER & J. R. BUCK. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 2ª ed., 1999.
- CLARK C.L. LabView Digital Signal Processing and Digital Communications.
- Carlos Alexandre Melo, Processamento de sinais, <http://www.cin.ufpe.br/~cabm/pds/PDS.pdf>
- Exemplos LabView.