Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 6.11.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

1. Compute the first and second derivatives of:

a) $y = \ln x + 3x - 2$

$$y = \ln x + 3x - 2 \tag{1}$$
$$y' = \frac{1}{x} + 3 = x^{-1} + 3 \tag{2}$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2} \tag{3}$$

b) $y = x^2 - 2\ln x$

$$y = x^2 - 2\ln x \tag{4}$$
$$y' = 2x - \frac{2}{x} = 2x - 2x^{-1} \tag{5}$$
$$y'' = 2 + \frac{2}{x^2} \tag{6}$$

c) $y = x^3 \ln x$

$$y = x^3 \ln x \tag{7}$$
$$y' = (3x^2 \cdot \ln x) + (x^3 \cdot \frac{1}{x}) \tag{8}$$
$$y' = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1) \tag{9}$$
$$y'' = [2x \cdot (3\ln x + 1)] + [x^2 \cdot \frac{3}{x}] \tag{10}$$
$$y'' = 2x(3\ln x + 1) + 3x = x(6\ln x + 5) \tag{11}$$

d)$y = \dfrac{\ln x}{x}$

$$y = \frac{\ln x}{x} = \ln x \cdot x^{-1} \tag{12}$$
$$y' = (\frac{1}{x} \cdot x^{-1}) + (\ln x \cdot -\frac{1}{x^2}) \tag{13}$$
$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) \tag{14}$$
$$y' = x^{-2}(1 - \ln x) \tag{15}$$
$$y'' = [-2x^{-3} \cdot (1 - \ln x)] + [x^{-2} \cdot -\frac{1}{x}] \tag{16}$$
$$y'' = -2x^3(1 - \ln x) - x^{-3} = x^{-3}(-2 + 2\ln x - 1) \tag{17}$$
$$y'' = x^{-3}(2\ln x - 3) \tag{18}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Find the derivatives of:

a) $y = x^3(\ln x)^2$

Using the product rule and the chain rule for derivatives, we have that:

$y = x^3(\ln x)^2 \Rightarrow y' = 3x^2(\ln x)^2 + x^3 2\ln x\dfrac{1}{x} = x^2\ln x(3\ln x + 2)$

b) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

Using the quotient rule for derivatives we have:

$y = \dfrac{x^2}{\ln x} \Rightarrow y' = \dfrac{2x\ln x - \dfrac{x^2}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

c) $y = (\ln x)^{10}$

Using the chain rule for derivatives:

$y = (\ln x)^{10} \Rightarrow y' = 10(\ln x)^9 \cdot \dfrac{1}{x}$

d) $y = (\ln x + 3x)^2$

$y = (\ln x + 3x)^2 \Rightarrow y' = 2(\ln x + 3x)(\dfrac{1}{x} + 3) = 2\dfrac{\ln x}{x} + 6\ln x + 18x + 6$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Find the derivatives of:

a) $ln(ln(x))$

A derivada será:

$\dfrac{1}{xln(x)}$

b) $ln(\sqrt{1-x^2})$

A derivada será:

$$\frac{-2x}{2\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{x^2-1}$$

c) $e^x ln(x)$

A derivada será:

$$e^x ln(x) + \frac{e^x}{x} = e^x(ln(x)\frac{1}{x})$$

d) $e^{x^3} ln(x^2)$

A derivada será:

$$6x^2e^{x^3}ln(x) + \frac{2e^{x^3}}{x} = \frac{2e^{x^3}}{x} = 2e^{x^3}(3x^2ln(x) + \frac{1}{x}$$

e) $ln(e^x + 1)$

A derivada será:

$$\frac{e^x}{e^x+1}$$

f) $ln(x^2 + 3x - 1)$

A derivada será:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-1}$$

g) $2(e^x - 1)^{-1}$

A derivada será:

$$-2(e^x-1)^{-2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^x}$$

h) e^{2x^2-x}

A derivada será:

$$(4x-1)e^{2x^2-x}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖) Determine the domains of the functions defined by:

(a) $y = \ln(x+1)$

(b) $y = \ln(\frac{3x-1}{1-x})$

(c) $y = \ln|x|$

(a) $y = \ln(x+1)$
$x + 1 > 0$
$x > -1$

(b) $y = \ln\left(\frac{3x-1}{1-x}\right)$
$\frac{3x-1}{1-x} > 0$
$3x - 1 > 0$ e $1 - x > 0$
$x > \frac{1}{3}$ e $x < 1$
$\frac{1}{3} < x < 1$

(c) $y = \ln|x|$
$x \neq 0$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Determine the domains of the functions defined by:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

Para determinar o domínio da função, devemos ter $x^2 - 1 > 0$, assim $\mid x \mid > 1$

b) $y = \ln(\ln x)$

Para determinar o domínio da função, devemos ter $\ln x > 0$

$\therefore \ln x > 0 \Rightarrow e^0 < x \Rightarrow x > 1$

c) $y = \frac{1}{\ln(\ln x) - 1}$

Para determinar o domínio da função, devemos ter (i) $\ln(\ln x) \neq 1$ e (ii) $\ln x > 0$

(i) $\ln(\ln x) \neq 1 \Rightarrow e^1 \neq \ln x \Rightarrow e^e \neq x$

(ii) $\ln x > 0 \Rightarrow e^0 < x \Rightarrow x > 1$

Assim o domínio da função é $e^e \neq x$ e $x > 1$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Find the invervals where the following functions are increasing:

a) $y = \ln(4 - x^2)$

Devemos considerar que a função só está definida para $4 - x^2 > 0 \iff 4 > x^2 \iff x < 2$ e $x > -2$

$y = \ln(4 - x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{(4 - x^2)}(-2x) \iff y' = -\frac{2x}{(4 - x^2)}$

Queremos $\frac{-2x}{(4 - x^2)} \geq 0$

Descobriremos, antes disso, a raíz das funções $-2x$ e $(4 - x^2)$.

$\therefore -2x = 0 \iff x = 0$

$\therefore 4 - x^2 = 0 \iff 4 = x^2 \iff x = 2$ ou $x = -2$ (no caso desta função, o valor de 2 e -2 deixaria a função indefinida)

Lembrando de que o domínio da função é definido somente para $x < 2$ e $x > -2$, chegamos no seguinte quadro de sinais:

		-2		0		2	
$-2x$	$*$	|	$+$	|	$-$	|	$*$
$4-x^2$	$*$	|	$+$	|	$+$	|	$*$
$\frac{-2x}{(4-x^2)}$	$*$	○	$+$	●	$-$	○	$*$

* Representa o intervalo para o qual a função não está definida (fora do domínio de y).

Pelo quadro de sinais acima, chegamos que a função $y = \ln 4 - x^2$ será crescente se, e somente se, $x \in (-2, 0]$

b) $y = x^3 \ln x$

Temos que o domínio desta função é definida em $x > 0$

$y = x^3 \ln x \Rightarrow y' = 3x^2 \ln x + x^3 \dfrac{1}{x} \iff y' = x^2(3 \ln x + 1)$

Queremos $y' = x^2(3 \ln x + 1) \geq 0$

Acharemos, antes disso, as raízes de x^2 e $(3 \ln x + 1)$.

$\therefore x^2 = 0 \iff x = 0$

$\therefore (3 \ln x + 1) = 0 \iff 3 \ln x = -1 \iff \ln x = -\dfrac{1}{3} \iff x = e^{-1/3}$

Lembrando de que o domínio da função é definido somente para $x > 0$, chegamos no seguinte quadro de sinais:

		0		$e^{-1/3}$	
x^2	$*$	|	$+$	|	$+$
$(3 \cdot \ln x + 1)$	$*$	|	$-$	|	$+$
$x^2(3 \cdot \ln x + 1)$	$*$	○	$-$	●	$+$

* Representa o intervalo para o qual a função não está definida (fora do domínio de y).

Pelo quadro de sinais acima, chegamos a conclusão de que $y = x^3 \ln x$ será crescente se, e somente se, $x \in [e^{-1/3}, \infty)$

c) $y = \dfrac{(1-\ln x)^2}{2x}$

$$\begin{align}
y &= \frac{(1-\ln x)^2}{2x} \tag{19}\\
\Rightarrow y' &= \frac{2(1-\ln x)(-1/x)2x - 2(1-\ln x)^2}{4x^2} \tag{20}\\
\iff y' &= \frac{(-4)(1-\ln x) - 2(1 - 2\ln x + (\ln x)^2)}{4x^2} \tag{21}\\
\iff y' &= \frac{-4 + 4\ln x - (2 - 4\ln x + 2(\ln x)^2}{4x^2} \tag{22}\\
\iff y' &= \frac{-4 + 4\ln x - 2 + 4\ln x - 2(\ln x)^2}{4x^2} \tag{23}\\
\iff y' &= \frac{-(\ln x)^2 + 4\ln x - 3}{2x^2} \tag{24}\\
\iff y' &= \frac{(\ln x)^2 - 4\ln x + 3}{-2x^2} \tag{25}\\
\iff y' &= \frac{(\ln x - 1)(\ln x - 3)}{-2x^2} \tag{26}\\
& \tag{27}
\end{align}$$

Lembrando de que o domínio da função é definido somente para $x \neq 0$ e $x > 0$, chegamos no seguinte quadro de sinais:

$(\ln x - 1)(\ln x - 3)$	$*$	$+$	$-$	$+$
$-2x^2$	$*$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{(\ln x - 1)(\ln x - 3)}{-2x^2}$	$*$	$-$	$+$	$-$
	0	e	e^3	

Pelo quadro de sinais acima, chegamos a conclusão de que $y = \dfrac{(1-\ln x)^2}{2x}$ será crescente se, e somente se, $x \in [e, e^3]$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Find the equation for the tangent to the graph of

(a) $y = \ln x$ at the three points with x-coordinates: $1, \dfrac{1}{2}$ and e;

Sabemos que a equação de uma reta é dada por $y - y_1 = a(x - x_1)$, sendo "a" a inclinação da curva que pode ser dada pela derivada de y. Além disso, como queremos encontrar a equação de uma reta tangente, teremos que essa reta terá uma coordenada em comum com y, e nesse ponto elas terão a mesma inclinação. Assim temos:

(i) Para x = 1

$y = \ln 1 \Rightarrow y = 0$
$y' = \dfrac{1}{1} = 1$

Equação da reta tangente: $y = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 1$

(ii) Para $x = \dfrac{1}{2}$

$y = \ln \dfrac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow y = -\ln 2$

$y' = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Equação da reta tangente $y + \ln 2 = 2(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 2x - 1 - \ln 2$

(iii) Para $x = e$

$y = \ln e \Rightarrow y = 1$

$y' = \dfrac{1}{e}$

Equação da reta tangente: $y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \dfrac{x-e}{e} + 1 \Rightarrow y = \dfrac{x}{e}$

(b) $y = xe^x$ at the three points with x-coordinates: 0, 1, and -2.

Vamos seguir a mesma lógica do item anterior.

$y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

(i) Para $x = 0$

$y = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$

$y' = e^0(1+0) = 1 \cdot 1 = 1$

Equação da reta tangente: $y = x$.

(ii) Para $x = 1$

$y = 1 \cdot e^1 = e$

$y' = e^1 + 1 \cdot e^1 = 2e$

Equação da reta tangente: $y - e = 2e(x-1) \Rightarrow y = e(2x-1)$

(iii) Para $x = -2$

$y = -2e^{-2} = -\dfrac{2}{e^2}$

$y' = e^{-2} - 2e^{-2} = -e^{-2}$

Equação da reta tangente: $y + \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x+2) \Rightarrow y = \dfrac{-(x+4)}{e^2}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)
use a diferenciação logarítmica para encontrar $f'(x)/f(x)$ quando:

a) $f(x) = x^{2x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2x} \\ \ln f(x) &= 2x \ln x \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= 2\ln x + \frac{2x}{x} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= 2\ln x + 2 \end{aligned}$$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}(x^2+1)(x^4+6)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x-2}(x^2+1)(x^4+6) \\ \ln f(x) &= \frac{1}{2}\ln(x-2) + \ln\big(x^2+1\big) + \ln\big(x^4+6\big) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2(x-2)} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4x^3}{x^4+6} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \\ \ln f(x) &= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(x-1) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{3}\left(\frac{x-1-x-1}{x^2-1}\right) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{-2}{3(x^2-1)} \end{aligned}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

9. Differentiate the following functions using logarithmic differentiation:

a)$y = (2x)^x$

$$y = (2x)^x \tag{28}$$
$$\ln y = \ln(2x)^x \tag{29}$$
$$\ln y = x \ln 2x \tag{30}$$
$$\tag{31}$$

Como y é uma função e ln também, devemos derivar esta função composta através da regra da cadeia, isto é $g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$$\frac{y'}{y} = (1 \cdot \ln 2x) + (x \cdot \frac{2}{2x}) \tag{32}$$
$$\frac{y'}{y} \cdot y = (\ln 2x + 1) \cdot y \tag{33}$$
$$y' = (\ln 2x + 1) \cdot (2x)^x \tag{34}$$

b)$y = x^{\sqrt{x}}$

$$y = x^{\sqrt{x}} \tag{35}$$
$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} \tag{36}$$
$$\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln x \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

Aplicando a mesma lógica do item a, temos que:

$$\frac{y'}{y} = (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x) + (\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}) \tag{39}$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \tag{40}$$
$$\frac{y'}{y} \cdot y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot y \tag{41}$$
$$y' = x^{\sqrt{x}} \cdot (\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}) \tag{42}$$

c)$y = (\sqrt{x})^x$

$$y = (\sqrt{x})^x \tag{43}$$
$$\ln y = \ln\left(\sqrt{x}\right)^x \tag{44}$$
$$\ln y = x \ln\left(\sqrt{x}\right) \tag{45}$$
$$\tag{46}$$

Novamente utilizamos as regras de derivação de logaritimo junto com a regra da cadeia, implicando em:

$$\frac{y'}{y} = (1 \cdot \ln \sqrt{x}) + (x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}) \tag{47}$$
$$\frac{y'}{y} = \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \tag{48}$$
$$\frac{y'}{y} \cdot y = (\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2}) \cdot y \tag{49}$$
$$y' = (\sqrt{x})^x \cdot (\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2}) \tag{50}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Prove that if u and v are differentiable functions of x, and $u > 0$, then

$$y = u^v \Rightarrow y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right)$$

Let $y = u^v$. As u and v are both functions of x, we cannot use nether the chain rule nor the product rule to differentiate y.

To differentiate y we first take the natural log of both sides of the equation $y = u^v$, then:

$$\ln y = \ln u^v \Leftrightarrow \ln y = v \ln u \tag{51}$$

Now, we differentiate the equation in both sides, using the chain rule and the product rule for derivatives:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \tag{52}$$

Multiplying both sides by y, assuming $y = u^v \neq 0$, and assuming that $u > 0$ so that $\ln u \in \mathbf{R}$:

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right)$$

Q.E.D

■

Resolução (‖ Questão: 6.11.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

If $f(x) = e^x - 1 - x$, then $f'(x) = e^x - 1 > 0$ for all $x > 0$. The function f (x) is therefore strictly increasing in the interval $[0, \infty)$. Since $f(0) = 0$, it follows that $f(x) > 0$ for all $x > 0$, and so $e^x > 1 + x$ for all $x > 0$. Use the same method to prove the following inequalities:

a) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

Fazendo a primeira derivada de uma função $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$:

$f'(x) = e^x 1 - x$.

Ao fazer a segunda derivada:

$f''(x) e^x - 1$

Pode-se afirmar que, como $f''(0) = 0$, então $e^x - 1 > 0 \forall x > 0$ e a segunda derivada é estritamente crescente.

Substituindo $x = 0$ em $f'(x)$: $f'(0) = 0$ e a primeira derivada é crescente (estritamente)

Dessa forma, como $f(0) = 0$ e sua derivada é estritamente crescente, pode-se concluir que $f(x) > 0 \iff e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \forall x > 0$.

b) $\frac{x}{2} < ln(1+x) < x$ for $0 < x < 1$

Assumindo uma função $f(x) = e^x - 1 - x$ pode-se provar que $e^x > 1 + x \forall x > 0 \Rightarrow e^x > 1 + x \forall x (0 < x < 1)$ como é feito no enunciado da questão.

Assumindo uma função $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 - x$ e derivando em relação a x :

$g'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} - 1$, tal que $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = 1 \iff x = 2ln(2)$, logo, como para $g'(0) = -\frac{1}{2}$, $g'(x) > 0 \forall x > 2ln(2) \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x (0 < x < 1)$, então, como $g(0) = 0, g(x) < 0 \forall x (0 < x < 1) \iff e^{\frac{x}{2}} < 1 + x$.

De forma que $e^{\frac{x}{2}} < 1 + x < e^x \iff \frac{x}{2} < ln(1+x) < x \forall x (0 < x < 1)$

c) $lnx < 2(\sqrt{x} - 1)$ for $x > 1$

Defina $f(x) = ln(x) - 2(\sqrt{x} - 1)$ e derive em relção a x:

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

A primeira deriva será negativa quando:

$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0 \iff \sqrt{x} > 1 \iff x > 1$, visto que $x > 1$.

Observe que $f(1) = 0$ e que $f(x)$ é estritamente decrescente para $x > 1$, de forma que $ln(x) - 2(\sqrt{x} - 1) < 0 \iff ln(x) < 2(\sqrt{x} - 1) \forall x > 1$

■