Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 6.10.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Find the first-order derivatives of:

a) $y = e^x + x^2$

$y = e^x + x^2 \Rightarrow y' = e^x + 2x$

b) $y = 5e^x - 3x^3 + 8$

$y = 5e^x - 3x^3 + 8 \Rightarrow y' = 5e^x - 9x^2$

c) $y = \dfrac{x}{e^x}$

$y = \dfrac{x}{e^x} \Rightarrow y' = \dfrac{e^x - xe^x}{e^{x2}} = \dfrac{1-x}{e^x}$

d) $y = \dfrac{x+x^2}{e^x+1}$

$y = \dfrac{x+x^2}{e^x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{(1+2x)(e^x+1)-(x+x^2)e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x(-x^2+x+1)+2x+1}{e^{2x}+2e^x+1}$

e) $y = -x - 5 - e^x$

$y = -x - 5 - e^x \Rightarrow y' = -1 - e^x$

f) $y = x^3e^x$

$y = x^3e^x \Rightarrow y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = e^x \cdot x^2(3+x)$

g) $y = e^x x^{-2}$

$y = e^x x^{-2} \Rightarrow y' = e^x \cdot x^{-2} + e^x \cdot -2x^{-3} = e^x(x^{-2} - 2x^{-3})$

h) $y = (x+e^x)^2$

$y = (x+e^x)^2 \Rightarrow y' = 2(x+e^x) \cdot (1+e^x)$

■

Resolução (‖ Questão: 6.10.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Find the first derivatives w.r.t. t of the following functions, where a, b, c, p, and q are constants:

a) $x = (a + bt + ct^2)e^t$

$x' = e^t(a + bt + ct^2) + (b + 2ct)e^t$

b) $x = \dfrac{p + qt^3}{te^t}$

$x' = \dfrac{3qt^2}{te^t} - \dfrac{p + qt^3}{(t^2e t^t + te^t)} \iff x' = \dfrac{3qt^2(t+1) - p - qt^3}{te^t(t+1)} \iff x' = \dfrac{2qt^3 + 3qt^2 - p}{te^t(t+1)}$

c) $x = \dfrac{2(a + bt^2)^2}{e^t}$

$x' = \dfrac{2(a + bt)(at + bt^2)}{e^t} - \dfrac{(at + bt^2)}{e^t} \iff x' = \dfrac{(at + bt^2)(2(a + bt) - (at + bt^2))}{e^t}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.10.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖) Find the first and second derivatives of:

(a) $y = e^{-3x}$

(b) $y = e^{x^3}$

(c) $y = e^{1/x}$

(d) $y = 5e^{2x^2-3x+1}$

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -3e^{-3x}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$

(b) Aplicando a regra da cadeira : $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2.e^{x^3}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6xe^{x^3} + 3x^2 3x^2.e^{x^3} = 6xe^{x^3} + 9x^4e^{x^3}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3xe^{x^3}(2 + 3x^3)$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2}.e^{1/x}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{x^3}e^{1/x} + -x^{-2} \cdot \frac{1}{x^2}.e^{1/x} =$

$= -2x^{-3}e^{1/x} - x^{-4}e^{1/x} = x^{-3}.e^{1/x}(-2 - \frac{1}{x})$

(d) $y = 5e^{2x^2-3x+1}$; $\dfrac{dy}{dx} = (4x-3).5.e^{2x^2-3x+1} = (20x - 15)e^{2x^2-3x+1}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 20e^{2x^2-3x+1} + (20x - 15).(4x - 3).e^{2x^2-3x+1} =$

$= 20.e^{2x^2-3x+1} + (80x^2 - 60x - 60x + 45).e^{2x^2-3x+1} = (80x^2 - 120x + 65)e^{2x^2-3x+1}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.10.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Find the intervals where the following functions are increasing:

a) $y = x^3 + e^{2x}$

Para achar o intervalo que a função seja crescente precisamos primeiro derivar a função y

$\therefore y' = 3x^2 + 2e^{2x}$

Assim o intervalo é: $(-\infty, \infty)$

b) $y = 5x^2e^{-4x}$

Repetindo o mesmo processo do item a)

$y' = 10xe^{-4x} + 5x^2(-4e^{-4x}) = 10xe^{-4x} - 20x^2e^{-4x} = xe^{-4x}(10 - 20x)$

Assim o intervalo é: $[0, \frac{1}{2}]$

c) $y = x^2e^{-x^2}$

$y' = 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$

Assim os intervalos são: $(-\infty, -1]$ e $[0, 1]$

■

Resolução (‖ Questão: 6.10.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Find the intervals where the following functions are increasing.

Os quadros de sinais nos quais me baseei para averigar os intervalos encontram-se numa folha separada, a qual enviarei para o respectivo revisor da questão e disponibilizarei - caso a questão seja escolhida na reunião - para o terceiro responsável.

- a) $y = \dfrac{x^2}{e^{2x}} = x^2e^{-2x}$

  $y = \dfrac{x^2}{e^{2x}} = x^2e^{-2x}$

  $y' = (2x)2e^{-2x} + x^2(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(2x - 2x^2) = e^{-2x}[2x(1 - x)]$

  Queremos $y' \geq 0$

  $\therefore y' \geq 0 \iff x \in [0, 1]$

- b) $y = e^x - e^{3x}$

  $y' = e^x - 3e^{3x} = e^x(1 - 3e^{2x})$

  Analisaremos a raíz de $1 - 3e^{2x}$, a fim de tornar a análise no quadro de sinais mais precisa. Portanto, resolveremos a equação $1 - 3e^{2x} = 0$

$$
\begin{aligned}
1 - 3e^{2x} &= 0 && (1)\\
1 &= 3e^{2x} && (2)\\
\frac{1}{3} &= e^{2x} && (3)\\
\ln\frac{1}{3} &= \ln e^{2x} && (4)\\
\ln 1 - \ln 3 &= 2x && (5)\\
-\frac{\ln 3}{2} &= x && (6)
\end{aligned}
$$

$\therefore y' \geq 0 \iff x \in \left(-\infty, -\dfrac{\ln 3}{2}\right]$

- c) $y = \dfrac{e^{2x}}{x+2}$

  Utilizaremos a regra do quociente para realizar o exercício.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

  em que $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$

  $y' = \dfrac{e^{2x}(2)(x+2) - e^{2x}(1)}{(x+2)^2} = \dfrac{e^{2x}(2x+4-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}$

  $\therefore y' \geq 0 \iff x \in [-2/3, \infty)$

■

Resolução (‖ Questão: 6.10.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

. Find:

(a) $\dfrac{d}{dx}(e^{e^x})$

Seja $e^{e^x} = y$ e $u = e^x$ de modo que $e^u = y$. Então temos:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = e^u \cdot e^x = e^{e^x} \cdot e^x = e^{e^x + x}$

(b) $\dfrac{d}{dt}(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{-t}{2}})$

Seja $(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{-t}{2}}) = y$ e $u = \dfrac{t}{2}$ de modo que $e^u + e^{-u} = y$. Então temos:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = (e^u - e^{-u}) \cdot (\dfrac{1}{2}) = \dfrac{e^{\frac{t}{2}} - e^{\frac{-t}{2}}}{2}$

(c) $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{e^t + e^{-t}})$

Seja $y = (\dfrac{1}{e^t + e^{-t}})$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{0 \cdot (e^t + e^{-t}) - (1) \cdot (e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} = \dfrac{-(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}$

(d) $\dfrac{d}{dz}(e^{z^3} - 1)^{\frac{1}{3}}$

Seja $y = (e^{z^3} - 1)^{\frac{1}{3}}$, $z^3 = u$ e $e^u - 1 = h$ de modo que $y = h^{\frac{1}{3}}$, teremos:

$\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dy}{dh}\dfrac{dh}{du}\dfrac{du}{dz} = \dfrac{1}{3} \cdot h^{-\frac{2}{3}} \cdot e^u \cdot 3z^2 = \dfrac{e^{z^3} \cdot 3z^2}{3(e^{z^3} - 1)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{e^{z^3} \cdot z^2}{(e^{z^3} - 1)^{\frac{2}{3}}}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.10.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Diferencie:

a) $y = 5^x$

$$y = e^{xln5} \Rightarrow y' = e^{xln5}ln5 = 5^x ln5$$

b) $y = x2^x$

$$y = xe^{xln2} \Rightarrow y' = xe^{xln2}ln2 + e^{xln2} = x2^x ln2 + 2^x = 2^x(1 + xln2)$$

c) $y = x^2 2^{x^2}$

$$y = x^2 e^{x^2 ln2} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2 ln2} + x^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2 ln2} \cdot ln2 = 2x \cdot 2^{x^2} + x^2 \cdot 2x \cdot 2^{x^2} \cdot ln2 = 2x2^{x^2}(1 + x^2 ln2)$$

d) $y = e^x 10^x$

$$y = e^x e^{xln10} \Rightarrow y' = e^x e^{xln10} + e^x e^{xln10} ln10 = e^x 10^x + e^x 10^x ln10 = e^x 10^x (1 + ln10)$$

■