Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 6.9.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Calcule a segunda derivada de:

a) $y = x^5 - 3x^4 + 2$

$$\begin{aligned} y &= x^5 - 3x^4 + 2 \\ y' &= 5x^4 - 12x^3 \\ y'' &= 20x^3 - 36x^2 \end{aligned}$$

b) $y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ y' &= \frac{1}{2}x^{1/2} \\ y'' &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \end{aligned}$$

c) $y = (1 + x^2)^{10}$

$$\begin{aligned} y &= (1 + x^2)^{10} \\ y' &= 20x(1 + x^2)^9 \\ y'' &= 360x^2(1 + x)^8 + 20(1 + x^2)^9 \end{aligned}$$

Simplificando a equação da segunda derivada, temos:

$$\begin{aligned} y'' &= 360x^2(1 + x)^8 + 20(1 + x^2)^9 \\ y'' &= (1 + x^2)^8(360x^2 + 20(1 + x^2)) \\ y'' &= (1 + x^2)^8(380x^2 + 20) \\ y'' &= 20(1 + x^2)^8(19x^2 + 1) \end{aligned}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

2. Find d^2y/dx^2 when $y = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

Primeiro obtém-se a primeira derivada,assim temos:

$$y = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$
$$y' = \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \tag{2}$$
$$y' = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Em seguida deriva-se novamente, dessa forma temos:

$$y' = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$
$$y'' = [-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \cdot x] + [(1 \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}] \tag{5}$$
$$y'' = -x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Compute:
Using the exponent rule that states:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1} \tag{7}$$

a) y'' for $y = 3x^3 + 2x - 1$
$y = 3x^3 + 2x - 1 \Rightarrow y' = 9x^2 + 2 \Rightarrow y'' = 18x$

b) Y''' for $Y = 1 - 2x^2 + 6x^3$
$Y = 1 - 2x^2 + 6x^3 \Rightarrow Y' = -4x + 18x^2 \Rightarrow Y'' = -4 + 36x \Rightarrow Y''' = 36$

c) $\frac{d^3z}{dt^3}$ for $z = 120t - (\frac{1}{3})t^3$
$z = 120t - (\frac{1}{3})t^3 \Rightarrow z' = 120 - t^2 \Rightarrow z'' = -2t \Rightarrow z''' = \frac{d^3z}{dt^3} = -2$

d) $f^{(4)}(1)$ for $f(z) = 100z^{-4}$
$f(z) = 100z^{-4} \Rightarrow f^{(1)}(z) = -400z^{-5} \Rightarrow f^{(2)}(z) = 2000x^{-6} \Rightarrow f^{(3)}(z) = -12000z^{-7} \Rightarrow$
$f^{(4)}(z) = 84000z^{-8} \Rightarrow f^{(4)}(1) = 84000(1)^{-8} = 84000$

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Find (g" (2) when $g(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.

Derivando $g(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$:

$g'(t) = \dfrac{2t}{t-1} - \dfrac{t^2}{(t-1)^2} \iff g'(t) = \dfrac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2} \iff g'(t) = \dfrac{t^2-t}{(t-1)^2}$

A segunda derivada será: $g''(t) = \dfrac{2t-1}{(t-1)^2} \iff g''(t) = \dfrac{2(t^2-t)}{(t-1)^3} \iff g''(t) = \dfrac{t+1}{(t-1)^3} \iff g''(2) = 3$

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖) Find formulas for y'' and y''' when $y = f(x)g(x)$.

Para a primeira derivada:

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{8}$$

Para a segunda derivada:

$$y'' = [f''(x).g(x) + g'(x)f'(x)] + [f'(x).g'(x) + g''(x).f'(x)] \tag{9}$$
$$y'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \tag{10}$$

Para a terceira derivada (partindo da primeira equação da segunda derivada feita anteriomente):

$$y''' = [f'''(x).g(x) + g'(x)f(x)] + [g''(x).f'(x) + +f''(x).g''(x)] + [f''(x).g'(x) + \tag{11}$$
$$g''(x).f'(x)] + [g'''(x)f(x) + f'(x)g''(x)] = \tag{12}$$
$$= f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f'(x)g'''(x) \tag{13}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Find $\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}^2 t}$, when $L = \frac{1}{\sqrt{2t-1}} = (2t-1)^{-\frac{1}{2}}$

Utilizando a regra da cadeia (considerando $L(f(t)) = (2t-1)^{-\frac{1}{2}}$ e $f(t) = 2t-1$):

$L'(f(t)) = -\frac{1}{2}(2t-1)^{-\frac{3}{2}}$

$L''(f(t)) = \frac{3}{2}(2t-1)^{-\frac{5}{2}}$
$L'(f(t))f'(t) = -\frac{1}{2}(2t-1)^{-\frac{3}{2}}2 = -1(2t-1)^{-\frac{3}{2}}$

$L''(f(t))f'(t) = \frac{3}{2}(2t-1)^{-\frac{5}{2}}2 = 3(2t-1)^{-\frac{5}{2}}$ ■

Resolução (‖ Questão: 6.9.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

If $u(y)$ denotes an individual's utility of having income (or consumption) y, then $R = \dfrac{-yu''(y)}{u'(y)}$ is the coefficient of relative risk aversion. Compute R for the following utility functions, where A_1, A_2 and ρ are positive constants with $\rho \neq 1$, and we assume that $y > 0$:

- a) $u(y) = A_1 y$
  $u'(y) = A_1$
  $u''(y) = 0$
  $\therefore R = \dfrac{-y \cdot 0}{A_1} = 0$
- b) $u(y) = \sqrt{y}$
  $u'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$
  $u''(y) = \dfrac{-1}{4(\sqrt{y})^3} = \dfrac{-1}{4\sqrt{y} \cdot y}$
  $\therefore R = \dfrac{-y \cdot \dfrac{-1}{4\sqrt{y} \cdot y}}{\dfrac{1}{2\sqrt{y}}} = \dfrac{y}{2y} = \dfrac{1}{2}$
- c) $u(y) = A_1 - A_2 y^{-2}$
  $u'(y) = 2A_2 y^{-3}$
  $u''(y) = -6A_2 y^{-4}$
  $\therefore R = \dfrac{-y(-6A_2 y^{-4})}{2A_2 y^{-3}} = \dfrac{y3y^3}{y^4} = 3$
- d)$u(y) = A_1 + A_2 \dfrac{y^{1-\rho}}{1-\rho}$
  $u'(y) = 0 + A_2 \cdot y^{-\rho}$
  $u''(y) = (-\rho) \cdot A_2 \cdot y^{-(\rho+1)}$
  $\therefore R = \dfrac{-y(-\rho) \cdot A_2 \cdot y^{-(\rho+1)}}{A_2 \cdot y^{-\rho}} = \dfrac{y \cdot \rho \cdot y^{\rho}}{y^{(\rho+1)}} = \dfrac{y^{(\rho+1)} \cdot \rho}{y^{(\rho+1)}} = \rho$

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Let $U(x) = \sqrt{x}$ and $g(u) = u^3$. Then $f(x) = g(U(x)) = x^{\frac{3}{2}}$, which is not a concave function. Why does this not contradict the conclusion in Example 6.9.5?

No exemplo 6.9.5 foi mostrado que:
(i): an increasing transformation of an increasing function is increasing.
(ii): an increasing concave transformation of a concave function is concave.

Temos que a derivada de $U(x) = \sqrt{x}$ é $U'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$, de modo que $U(x)$ é uma função crescente em todo o seu domínio (que é $D_u = [0, \infty)$). Além disso tirando a segunda derivada de $U(x)$, obteremos: $U"(x) = -\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \leq 0$, descobrindo assim que a função é côncava

Além disso temos que a derivada de $g(u) = u^3$ é $g'(u) = 3u^2 \geq 0$, de modo que $g(u)$ é uma função crescente em todo o seu domínio (que é $D_g = (-\infty, \infty)$).Ainda, tirando a segunda derivada de $g(u)$ obteremos $g"(u) = 6u$. Assim vemos que a função é côncava para o caso em que $u \leq 0$ e convexa para o caso em que

$u \geq 0$.

Por fim quando fazemos $f(x) = g(U(x)) = x^{\frac{3}{2}}$ e encontramos sua derivada que é dada por $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ vemos que $f(x) \geq 0$ em todo o seu domínio ($D_f = [0, \infty)$), ou seja a função $f(x)$ é crescente. Já tirando a segunda derivada de $f(x)$, temos: $f"(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x}} \geq 0$ de modo que a função é convexa. Assim, não contrariamos o pressuposto no item (i) e (ii), pois embora tenhamos feito uma uma transformação crescente de uma função crescente conseguindo então uma função crescente (de acordo com o que foi previsto no item (i)), fizemos uma transformação convexa de uma função côncava, resultando em uma função convexa (o que não está em desacordo com (ii).

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

The US defence secretary claimed in 1985 that Congress had reduced the defence budget. Representative Gray pointed out that the budget had not been reduced; Congress had only reduced the rate of increase. If P denotes the size of the defence budget, translate the statements into statements about the signs of P' and P''.

O secretário de defesa afirmou que P é decrescente, o que significa que $P' < 0$.
Gray negou que P seja decrescente e afirmou que a taxa de crescimento de P havia sido reduzida, ou seja, $P' \geq 0$ e $P'' < 0$.

■

Resolução (‖ Questão: 6.9.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

10. Sentence in a newspaper: "The rate of increase of bank loans is increasing at an increasing rate". If $L(t)$ denotes total bank loans at time t, represent the sentence by a mathematical statement about the sign of an appropriate derivative of L.

Pelo enunciado sabemos que $L(t)$ se refere ao total de empréstimos bancários em um certo período de tempo t, além disso sabemos também que esses empréstimos estão aumentando de um período para outro, assim a variação é positiva, logo $L'(t) > 0$. Por último a sentença do jornal revela que essa variação também é crescente, por exemplo, se em um período os empréstimos aumentaram em 5% no outro aumentaram 10%, assim $L''(t) > 0$

■