Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 6.8.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖) Use the chain rule (6.8.1) to find dy/dx for the following:

(a) $y = 5u^4$, where $u = 1 + x^2$.

(b) $y = u - u^6$, where $u = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(a)

$$f'(u(x)) = u'(x).f'(x) \tag{1}$$
$$= 2x.20(1+x^2)^3 = 40x(1+x^2)^3 \tag{2}$$

(b)

$$f'(u(x)) = u'(x).f'(x) \tag{3}$$
$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{6}{x^2}(1+\frac{1}{x})^5 \tag{4}$$
$$-\frac{1}{x}[1-6(1+\frac{1}{x})^5] \tag{5}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Compute the following:

a) $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$, when $Y = -3(V+1)^5$ and $V = \frac{1}{3}t^3$

Reunindo as duas equações temos: $Y = -3(\frac{1}{3}t^3 + 1)^5$, para derivarmos essa equação em relação a t, utilizaremos a regra da cadeia, ao qual possui a formula geral $f'(g(x))g'(x)$. Portanto vamos considerar:

$f(x) = f(V) = Y = -3(V+1)^5$ e $g(x) = g(t) = V = \frac{1}{3}t^3$

Assim, utilizando-se da forma geral iremos achar $f'(g(t))g'(t)$:

$f'(g(t)) = -15(\frac{1}{3}t^3 + 1)^4$

$g'(t) = t^2$

$\therefore f'(g(t))g'(t) = -15t^2(\frac{1}{3}t^3 + 1)^4$

b) $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$, when $K = AL^a$ and $L = bt + c$, where A, a, b, and c are positive constants.

Refazendo os mesmo passos do item a):

$f(x) = f(L) = K = AL^a$ e $g(x) = g(t) = L = bt + c$

$f'(g(t)) = Aa(bt + c)^{a-1}$

$g'(t) = b$

$\therefore f'(g(t))g'(t) = Aab(bt + c)^{a-1}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Find the derivatives of the following funcions, where a, p, q and b are constants:

Utilizaremos a regra da cadeia (no caso do item b, estará implícita) para a resolução e assumiremos as condições a serem ditas para cada um dos exercícios a seguir. Consideraremos que todas as funções y (dos exercício seguintes, as quais queremos analisar) são funções diferenciáveis em relação a u (funções que serão denominadas a partir da conveniência do próprio exercício), e que u é uma função diferenciável em relação a x. Logo, y é uma função diferenciável em relação a x, e $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ (i)

- a) $y = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$

  Faremos $u = x^2 + x + 1$:

  $y = \dfrac{1}{u^5} = u^{-5}$ e $u = x^2 + x + 1$

  Usando (i), temos que:

  $\dfrac{dy}{du} = (-5).(u)^{-6}$

  $\dfrac{du}{dx} = (2x + 1)$

  $\therefore \dfrac{dy}{dx} = (-5).(u)^{-6}.(2x + 1) = \dfrac{-10x - 5}{u^6} = \dfrac{-10x - 5}{(x^2 + x + 1)^6}$

- b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

  Começaremos a derivando o fator mais externo da função e multiplicaremos pelas derivadas das "camadas" mais interiores da própria função, assim como versa a regra da cadeia.

  $$\therefore y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

- c) $y = x^a(px + q)^b$

  Faremos $u = px + q$ e utilizaremos também a regra do produto para derivadas, em que

  $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

  em que $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são funções arbitrárias diferenciáveis.

Utilizando (i) para derivar u^b, ficamos com $(u^b)' = b \cdot u^{b-1} \cdot u'$. Substituindo os respectivos valores de u e calculando sua derivada, temos que: $((px+q)^b)' = b \cdot (px+q)^{b-1} \cdot p$

Com isso, se $y = x^a \cdot u^b \Rightarrow y' = ax^{a-1} \cdot u^b + x^a \cdot bu^{b-1} \cdot u'$, então:

$y = x^a \cdot (px+q)^b \Rightarrow y' = ax^{a-1} \cdot (px+q)^b + x^a \cdot b(px+q)^{b-1}p$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

. If Y is a function of K, and K is a function of t, find the formula for the derivative of Y with respect to t at $t = t_0$.

Temos que Y = Y(K(t)), queremos achar $\dfrac{dY}{dt}$ em $t = t_0$

$\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dY}{dK}\dfrac{dK}{dt} = Y'(K(t)) \cdot K'(t)$

Como queremos o valor para $t = t_0$ só precisamos substituir esse valor nessa equação de modo a obtermos: $Y'(K(t_0)) \cdot K'(t_0)$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Se $Y = F(K)$ e $K = h(t)$, encontre a fórmula para $\dfrac{dY}{dt}$.

Se $Y = F(K(h(t)))$, então $\dfrac{dY}{dt}$ será:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{df(K)}{dK} \cdot \frac{dK(h)}{dh} \cdot \frac{dh(t)}{dt} = F'(K(h(t))) \cdot K'(h(t)) \cdot h'(t)$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

6. Consider the demand function $x = b - \sqrt{ap-c}$, where a, b, and c are positive constants, x is the quantity demanded, and p is the price, for $p > c/a$. Compute dx/dp.

$$x = b - \sqrt{ap-c} \tag{6}$$
$$x = b - (ap-c)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$
$$\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2} \cdot (ap-c)^{-\frac{1}{2}} \cdot a \tag{8}$$
$$\frac{dx}{dp} = -\frac{a}{2}(ap-c)^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Find a formula for $h'(x)$ when: (a) $h(x) = f(x^2)$; and (b) $h(x) = f(x^n \cdot g(x))$.

The Chain rule for derivatives states that:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{10}$$

a) Let $h(x) = f(g(x))$ and $g(x) = x^2$ then, by the chain rule:

$$h'(x) = f'(x^2) \cdot 2x \tag{11}$$

b) Let $h(x) = f(w(x))$ and $w(x) = x^n g(x)$, then by the chain rule:

$$h'(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) \tag{12}$$

As $w'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot g(x) + x^n \cdot g'(x)$, by the product rule,
we conclude that:

$$h'(x) = f'(x^n g(x)) \cdot [n \cdot x^{n-1} \cdot g(x) + x^n \cdot g'(x)] \tag{13}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Suppose that $C = 20q - 4q(25 - \frac{1}{2}x)^{1/2}$, where q is a constant and $x < 50$. Find $\dfrac{dC}{dx}$.

$$C = 20q - 4q(25 - \frac{1}{2}.x)^{1/2} \tag{14}$$

Derivando em relação a x:

$$\frac{dC}{dx} = -4q\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(25 - \frac{1}{2}x\right)^{-1/2} \tag{15}$$

$$= +q(25 - \frac{1}{2}x)^{-1/2} \tag{16}$$

$$= \frac{q}{\sqrt{25 - \frac{1}{2}x}} \tag{17}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Differentiate each of the following in two different ways:

a) $y = (x^4)^5 = x^{20}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{20} = 20x^{19}$

A segunda maneira de devirar a função é pela regra da cadeia:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4)^5 = 5(x^4)^4 4x^3 = 20x^{19}$

b) $y = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 - 3x + 3x^2 - x^3 = -3 + 6x - 3x^2$

Como no item a) iremos usar novamente regra da cadeia:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^3 = -3(1-x)^2 = -3(1 - 2x + x^2) = -3 + 6x - 3x^2$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Suppose you invest \$1000 at $p\%$ interest per year. Let $g(p)$ denote how many euros you will have after ten years.

- a) Give economic interpretation of: (i) $g(5) \approx 1629$; and (ii) $g'(5) \approx 155$.

  (i) Refere-se ao montante que um indivíduo, ao investir \$1000 a uma taxa de juros de 5% ao ano, receberia após 10 anos.

  (ii) Refere-se a quanto uma mudança incremental na taxa de juros de 5% corresponderia no montante final, após o período de 10 anos.

- b) To check the numbers in (a), find the formula for $g(p)$, then compute $g(5)$ and $g'(5)$.

  $g(p) = 1000(1 + \frac{p}{100})^{10}$ e $g'(p) = 10(1 + \frac{p}{100})^9 .1000.\frac{1}{100} = (1 + \frac{p}{100})^9 .100$

  $g(5) = 1000(1 + \frac{5}{100})^{10} \approx 1628,89$

  $g'(5) = (1 + \frac{5}{100})^9 .100 \approx 155,13$

■

Resolução (‖ Questão: 6.8.12 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

If f is differentiable at x, find expressions for the derivatives of the following functions:

(a) $y = x + f(x)$

$\frac{dy}{dx} = 1 + f'(x)$

(b) $y = [f(x)]^2 - x$

$\frac{dy}{dx} = 2f(x)f'(x) - 1$

(c) $y = [f(x)]^4$

$\frac{dy}{dx} = 4[f(x)]^3 f'(x)$

(d) $y = x^2 f(x) + [f(x)]^3$

$\frac{dy}{dx} = 2xf(x) + f'(x)x^2 + 3[f(x)]^2 f'(x)$

(e) $y = xf(x)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) + f'(x)x$

(f) $y = \sqrt{f(x)}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

(g) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xf(x) - f'(x)x^2}{[f(x)]^2}$

(h) $y = \dfrac{[f(x)]^2}{x^3}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3 f(x)f'(x) - 3x^2[f(x)]^2}{x^6} = \dfrac{x^2(2xf(x)f'(x) - 3[f(x)]^2)}{x^6} = \dfrac{2xf(x)f'(x) - 3[f(x)]^2}{x^4}$

■