Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 6.7.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

1. Differentiate w.r.t x the following functions:

Aplicando as regras de derivação, como:

$$f(x) = ax^n \tag{1}$$
$$f'(x) = anx^{n-1} \tag{2}$$

Temos que:
a) $x + 1$

$$f(x) = x + 1 \tag{3}$$
$$f'(x) = 1 \tag{4}$$

b) $x + x^2$

$$f(x) = x + x^2 \tag{5}$$
$$f'(x) = 2x + 1 \tag{6}$$

c) $3x^5 + 2x^4 + 5$

$$f(x) = 3x^5 + 2x^4 + 5 \tag{7}$$
$$f'(x) = 15x^4 + 8x^3 \tag{8}$$

d) $8x^4 + 2\sqrt{x}$

$$f(x) = 8x^4 + 2\sqrt{x} \tag{9}$$
$$f'(x) = 32x^3 + x^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

e) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 5x^3$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 5x^3 \tag{11}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} - 3x + 15x^2 \tag{12}$$

f) $1 - 3x^7$

$$f(x) = 1 - 3x^7 \tag{13}$$
$$f'(x) = -21x^6 \tag{14}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Differentiate w.r.t x the following functions:

a) $y = \dfrac{3}{5}x^2 - 2x^7 + \dfrac{1}{8} - \sqrt{x}$

$y = \dfrac{3}{5}x^2 - 2x^7 + \dfrac{1}{8} - \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{6}{5}x - 14x^6 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y = (2x^2 - 1)(x^4 - 1)$

Using the product rule that states :

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{15}$$

And assuming that $f(x) = (2x^2 - 1)$, $g(x) = (x^4 - 1)$ and $y = f(x) \cdot g(x)$, we have:

$y = (2x^2 - 1)(x^4 - 1) \Rightarrow y' = 4x(x^4 - 1) + (2x^2 - 1)4x^3 \Rightarrow y' = 12x^5 - 4x^3 - 4x$

c) $y = (x^5 + \dfrac{1}{x})(x^5 + 1)$

Using the product rule, and assuming that $f(x) = (x^5 + \dfrac{1}{x})$, $g(x) = (x^5 + 1)$ and $y = f(x) \cdot g(x)$, we have:

$y = (x^5 + \dfrac{1}{x})(x^5 + 1) \Rightarrow y' = (5x^4 - \dfrac{1}{x^2})(x^5 + 1) + (x^5 + \dfrac{1}{x})5x^4 = 10x^9 + 5x^4 + 4x^3 - \dfrac{1}{x^2}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖) Differentiate w.r.t x the following functions:

a) $\frac{1}{x^6}$

Derivando em relação a x: $(\frac{1}{x^6})' = (x^{-6})' = -6x^{-7}$, para $x \neq 0$

b) $x^{-1}(x^2 + 1)\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$

Derivando em relação a x: $(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ para $x \neq 0$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Derivando em relação a x: $(\frac{1}{\sqrt{x^3}})' = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}}$, para $x > 0$

d) $\frac{x+1}{x-1}$

Derivando em relação a x: $(\frac{x+1}{x-1})' = [(x+1)(x-1)^{-1}]' = (1)[(x-1)^{-1}] - ((x-1)^{-2})[(x+1)] = \frac{x-1-x-1}{x^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$, para $x \neq 1$

e) $\frac{x+1}{x^5}$

Derivando em relação a x: $(\frac{x+1}{x^5})' = [(x+1)(x^{-5})]' = (1)[(x^{-5}] - (5x^{-6})[(x+1)] = \frac{-4x-5}{x^6}$, para $x \neq 0$

f) $\frac{3x-5}{2x+8}$

Derivando em relação a x: $(\frac{3x-5}{2x+8})' = [(3x-5)(2x+8)^{-1}]' = (3)[(2x+8)^{-1} - (2(2x+8)^{-2})[(3x-5)] = \frac{3(2x+8)+10-6x}{(2x+8)^2} = \frac{34}{(2x+8)^2}$, para $x \neq -4$

g) $3x^{-11}$

Derivando em relação a x: $(3x^{-11})' = -33x^{-12}$, para $x \neq 0$

h) $\frac{3x-1}{x^2+x+1}$

Derivando em relação a x: $(\frac{3x-1}{x^2+x+1})' = [(3x-1)(x^2+x+1)^{-1}]' = (3)[(x^2+x+1)^{-1}] - ((2x+1)(x^2+x+1)^{-2})[(3x-1)] = \frac{3x^2+3x+3-6x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+4-3x^2}{(x^2+x+1)^2}$

$\blacksquare$

Resolução (‖ Questão: 6.7.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Differentiate w.r.t x the following functions:

(a) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

(b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(c) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

(a) $$(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1})' = \frac{\frac{1}{2}.x^{-1/2}.(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-2).\dfrac{1}{2}.x^{-1/2}}{x+2\sqrt{x}+1} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}.(3)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

(b) $$(\frac{x^2-1}{x^2+1})' = \frac{(2x)(x^2+1) - [(x^2-1)2x]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-[2x^3-2x]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

(c) $$(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1})' = \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - [(2x-1)(x^2+x+1)]}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{(+2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1) - (2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{+2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+x^2-2x^2+x^2+2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Let $x = f(L)$ be the output when L units of labour are used as input. Assume that $f(0) = 0$ and that $f'(L) > 0, f''(L) < 0$ for all $L > 0$. Average productivity is defined by the formula $g(L) = \frac{f(L)}{L}$

a) Let $L^* > 0$. Indicate on a figure the values of $f'(L^*)$ and $g(L^*)$. Which is larger?

Para indicar no gráfico a função de $x = f(L)$, vemos que o curva se inicia na origem, visto que $f(0) = 0$, a curva é crescente, pois $f'(L) > 0$, porém ela vai criando uma concavidade, observado $f''(L) < 0$. A curva da função $g(L) = \frac{f(L)}{L}$ é uma linha reta. $f'(L^*)$ tangencia $f(L)$ no ponto $(L^*, f(L^*))$. Nesse ponto, podemos ver que a inclinação da tangente é menor que a inclinação da reta de produtividade média $g(L)$. Assim no ponto $L^* > 0$, $f'(L^*) < \frac{f(L^*)}{L^*}$.

b) How does the average productivity change when labour input increases?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}(\frac{f(L)}{L}) = \frac{f'(L) \cdot L - f(L)}{L^2} = \frac{1}{L}(f'(L) - \frac{f(L)}{L})$

Assim, quanto maior o aumento da mão-de-obra, mais o custo marginal excede o custo médio de produção.

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

For each of the following functions, determine the intervals where it is increasing.

Determinamos o intervalo em que uma função é crescente calculando o valor em que a primeira derivada da função em questão é maior ou igual a zero ($f'(x) \geq 0$). Seguimos então com a resolução.

O quadro de sinais nos quais me baseei está desenhado em uma folha separada.

- a) $y = 3x^2 - 12x + 13$

  $y = 3x^2 - 12x + 13 \Rightarrow y' = 6x - 12$

  $\therefore y' \geq 0 \iff 6x - 12 \geq 0 \iff 6x \geq 12 \iff x \geq 2$

  Logo, $y' \geq 0 \iff x \in [2, \infty)$

- b) $y = \dfrac{(x^4 - 6x^2)}{4}$

  $y = \dfrac{(x^4 - 6x^2)}{4} \Rightarrow y' = x^3 - 3x$

  $\therefore y' \geq 0 \iff x^3 - 3x \geq 0 \iff x(x^2 - 3) \geq 0$

  Acharemos a raíz de $(x^2 - 3)$.

$$(x^2 - 3) = 0 \tag{16}$$
$$x^2 = 3 \tag{17}$$
$$\therefore x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3} \tag{18}$$

  Sabemos, intuitivamente, que a raíz da função dada por x é 0

  Através do quadro de sinais, temos que: $y' \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

- c) $y = \dfrac{2x}{x^2+2}$

  $y = \dfrac{2x}{x^2+2} \Rightarrow y' = \dfrac{2(x^2+2)-(2x)(2x)}{(x^2+2)^2} \iff y' = \dfrac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2} \iff y' = \dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$

  Queremos saber quando $y' \geq 0$, ou seja, quando $\dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2} \geq 0$

  Acharemos a raíz de $(-2x^2+4)$.

$$(-2x^2+4) = 0 \tag{19}$$
$$4 = 2x^2 \tag{20}$$
$$2 = x^2 \tag{21}$$
$$\therefore x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} \tag{22}$$

  Através do quadro de sinais, temos que: $y' \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

- d) $y = \dfrac{x^2-x^3}{2(x+1)} = \dfrac{x^2-x^3}{2(x+1)}$

  $y = \dfrac{x^2-x^3}{2(x+1)} \Rightarrow y' = \dfrac{(2x-3x^2)(2x+2)-(x^2-x^3)(2)}{[2(x+1)]^2} \iff y' = \dfrac{4x^2+4x-6x^3-6x^2-2x^2+2x^3}{[2(x+1)]^2}$

  $\iff y' = \dfrac{-4x^3-4x^2+4x}{4(x+1)^2} \iff y' = \dfrac{-x^3-x^2+x}{(x+1)^2} \iff y' = \dfrac{-x(x+x^2-1)}{(x+1)^2}$

  Acharemos a raíz de $(x+x^2-1)$, através da fórmula de Bhaskara $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b)^2-4ac}}{2a}$ de uma função dada por ax^2+bx+c. x_1 e x_2 representará tais raízes.

$$(x+x^2-1) = 0 \tag{23}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} \tag{24}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{25}$$
$$\therefore x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \tag{26}$$

  Sabemos, intuitivamente, que a raíz da função dada por $-x$ é 0

  Queremos $y' = \dfrac{-x(x+x^2-1)}{(x+1)^2} \geq 0$

  Através do quadro de sinais, temos que: $y' \geq 0 \iff x \in (-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}]$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Find the equations for the tangents to the graphs of the following functions at the specified points:

(a) $y = 3 - x - x^2$ at $x = 1$

Considerando que ele quer a equação de uma reta tangente. Temos que a equação da reta é dada por $y - y_1 = a(x - x_1)$. Como essa reta é tangente ao gráfico da parábola no ponto indicado, teremos que os dois gráficos compartilham uma mesma coordenada. Assim, substituindo o valor de $x = 1$ em $y = 3 - x - x^2 \Rightarrow y = 3 - 1 - (1)^2 \Rightarrow y = 1$, temos que a coordenada compartilhada é (1,1). Assim já podemos substituir na equação $y - 1 = a(x - 1)$. Além disso, teremos que como os gráficos serão tangentes eles terão a mesma inclinação no ponto indicado. A inclinação de $y = 3 - x - x^2$ é dada por $y' = -1 - 2x$, quando $x = 1$ então a inclinação é $y' = -1 - 2(1) = -3$. Substituindo na equação da reta tangente que queremos descobrir teremos: $y - 1 = a(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 4$.

(b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ at $x = 1$

Considerando que ele quer a equação de uma reta tangente. Temos que a equação da reta é dada por $y - y_1 = a(x - x_1)$. Como essa reta é tangente ao gráfico do exercício no ponto indicado, teremos que esses dois gráficos compartilham esse mesmo ponto. Assim, substituindo o valor de $x = 1$ em $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ teremos $y = \dfrac{(1)^2 - 1}{(1)^2 + 1} = \dfrac{0}{2} = 0$. Assim o ponto compartilhado entre os gráficos é (1,0). Além disso temos que a inclinação dos gráficos será a mesma nesse ponto em comum. Assim temos que a inclinação de ambos no ponto será $y' = \dfrac{(2x)(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow$ $y'(1) = \dfrac{4(1)}{((1)^2 + 1)^2} = \dfrac{4}{2^2} = \dfrac{4}{4} = 1$. Agora inserindo toda informação que possuímos na equação da reta $y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y = x - 1$. Essa é a equação da reta tangente ao gráfico da equação do exercício.

(c) $y = (\dfrac{1}{x^2} + 1)(x^2 - 1)$ at $x = 2$

Considerando que ele quer a equação de uma reta tangente. Temos que a equação da reta é dada por $y - y_1 = a(x - x_1)$. Como essa reta é tangente ao gráfico da equação proposta no ponto indicado, teremos que o gráfico da reta tangente e o gráfico do exercício compartilham esse mesmo ponto. Assim, substituindo o valor de $x = 2$ em $y = (\dfrac{1}{x^2} + 1)(x^2 - 1)$ teremos $y = (\dfrac{1}{2^2} + 1)(2^2 - 1) = \dfrac{5}{4} \cdot 3 = \dfrac{15}{4}$. Agora sabemos que a reta é tangente ao gráfico do exercício em $(2, \dfrac{15}{4})$. Teremos que nesse ponto a inclinação da reta tangente será igual a inclinação de $y = (\dfrac{1}{x^2} + 1)(x^2 - 1)$. Assim a inclinação da reta tangente será $y' = (\dfrac{-2}{x^3})(x^2 - 1) + (2x)(\dfrac{1}{x^2} + 1) \Rightarrow y'(2) = (\dfrac{-2}{2^3})(2^2 - 1) + (2 \cdot 2)(\dfrac{1}{2^2} + 1) = (\dfrac{-2}{8})(4 - 1) + (4)(\dfrac{1}{4} + 1) =$ $(\dfrac{-1}{4})(3) + (4)(\dfrac{5}{4}) = (\dfrac{-3}{4}) + (5) = \dfrac{-3(1) + 4(5)}{4} = \dfrac{-3 + 20}{4} = \dfrac{17}{4}$. Agora inserindo toda informação que possuímos na equação da reta $y - \dfrac{15}{4} = \dfrac{17}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \dfrac{17x}{4} - \dfrac{34}{4} + \dfrac{15}{4} \Rightarrow y = \dfrac{17x - 19}{4}$. Essa é a equação da reta tangente ao gráfico da equação do exercício.

(d) $y = \dfrac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)(x + 3)}$ at $x = 0$

Já está ficando um pouco repetitivo...

Em $x = 0$ temos $y = \dfrac{0^4 + 1}{(0^2 + 1)(0 + 3)} = \dfrac{1}{3}$ A inclinação da reta tangente ao gráfico da equação no ponto indicado é $y' = \dfrac{(4x^3)(x^2 + 1)(x + 3) - (3x^2 + 6x + 1)(x^4 + 1)}{(x^3 + 3x^2 + x + 3)^2} \Rightarrow$

$$y'(0) = \frac{(4(0)^3)((0)^2+1)(0+3) - (3(0)^2+6(0)+1)((0)^4+1)}{((0)^3+3(0)^2+0+3)^2} = \frac{-1}{(3)^2} = -\frac{1}{9}$$

Só substituindo valores temos: $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x-0) \Rightarrow y = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{-3x+9}{27} \Rightarrow y = \frac{-x+3}{9}$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Considere um poço de petróleo onde $x(t)$ denota a taxa de extração em barris por dia e $p(t)$ denota o preço em dólares por barril, ambos no instante t. Então, $R(t) = x(t)p(t)$ é a receita em dólares por dia. Encontre uma expressão para $\dot{R}(t)$, e dê uma interpretação econômica no caso em que $p(t)$ e $x(t)$ são crescentes.

Para obter $\dot{R}(t)$ devemos derivar $R(t)$ em relação a t. Assim, teremos que:

$$\dot{R}(t) = \dot{x}(t)\cdot p(t) + x(t)\cdot \dot{p}(t)$$

Pode-se observar que, se ambas as funções são crescentes, então tanto um aumento em $p(t)$ quanto em $x(t)$ levam a um aumento em $R(t)$. No caso de um aumento no preço do barril de petróleo, o aumento em $R(t)$ será igual a $\dot{p}(t)\cdot x(t)$ e no caso de um aumento na extração de petróleo, o aumento em $R(t)$ será igual a $\dot{x}(t)\cdot p(t)$.

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

9. Differentiate the following functions $w.r.t.t$:

a) $\frac{at+b}{ct+d}$

Pela regra do quociente temos:

$$f(t) = \frac{at+b}{ct+d} \tag{27}$$

$$f'(t) = \frac{[a\cdot(ct+d)] - [(at+b)\cdot c]}{(ct+d)^2} \tag{28}$$

$$f'(t) = \frac{act+ad-act-bc}{(ct+d)^2} \tag{29}$$

$$f'(t) = \frac{ad-bc}{(ct+d)^2} \tag{30}$$

b)$t^n \cdot (a\sqrt{t}+b$

Pela regra do produto temos:

$$f(t) = t^n\cdot(a\sqrt{t}+b) \tag{31}$$

$$f'(t) = [nt^{n-1}\cdot(a\sqrt{t}+b)] + [t^n\cdot\frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}}] \tag{32}$$

$$f'(t) = ant^{n-\frac{1}{2}} + bnt^{n-1} + \frac{1}{2}at^{n-\frac{1}{2}} \tag{33}$$

$$f'(t) = at^{n-\frac{1}{2}}\cdot(n+\frac{1}{2}) + bnt^{n-1} \tag{34}$$

c) $\dfrac{1}{at^2+bt+c}$

Pela regra do quociente temos:

$$f(t) = \frac{1}{at^2+bt+c} \tag{35}$$

$$f'(t) = \frac{[0 \cdot (at^2+bt+c)] - [1 \cdot (2at+b)]}{(at^2+bt+c)^2} \tag{36}$$

$$f'(t) = \frac{-2at-b}{(at^2+bt+c)^2} \tag{37}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

If $f(x) = \sqrt{x}$ then $f(x) \cdot f(x) = x$. Differentiate this equation using the product rule in order to find a formula for $f'(x)$. Compare this with the result in Exercise 6.2.9.

Let $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = f(x) \cdot f(x) = x$ and assume that $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.

By the product rule that states the following :

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{38}$$

we can infer that :

$$g'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 1 \tag{39}$$

Thus:

$f'(x) \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Comparing with the result in exercise 6.2.9:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{40}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.7.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Suppose that $a = -n$ where n is any natural number. By using the relation $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ and the quotient rule (6.7.3), prove the power rule stating that $y = x^a \Longrightarrow y' = ax^{a-1}$.

Deseja-se provar que $\forall n \in \mathbb{N}\ (-n = a \wedge y = x^a) \Rightarrow y' = ax^{a-1}$

Supondo que $n \in \mathbb{N}$ arbitrário e que $a = -n \wedge y = x^a$ então $y = \frac{1}{x^n}$.

Usando a regra do quociente em (6.7.3) para funções diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Assumindo que $f(x) = 1$ e $g(x) = x^n$ tem-se:

$y' = \frac{0 \cdot (x^n) - nx^{n-1} \cdot (1)}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = ax^{a-1}$, provando o resultado almejado

■