Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 6.4.1 ‖ Relator: $\mathbf{x_{18}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{11}}$ ‖)

Let $C(x) = x^2 + 3x + 100$ be the cost function of a firm. Show that when x is changed from 100 to $100 + h$, where $h \neq 0$, the average rate of change per unit of output is

$$\frac{C(x+h) - C(x)}{h} = 203 + h$$

What is the marginal cost C' (100)? Then use (6.2.6) to find C' (x) and, in particular, C' (100).

Fazendo $\frac{(100+h)^2+3(100+h)+100-100^2-300-100}{h} = \frac{(100^2+200h+h^2)-100^2+(300+3h)-300+100-100}{h} = \frac{h^2+200h+3h}{h} = 203 + h$

Sendo a definição de derivada

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para a = 100

$C'(100) = lim_{h\to 0}\frac{C(100+h)-C(100)}{h} = lim_{h\to 0}203 + h = 203$ ■

Resolução (‖ Questão: 6.4.2 ‖ Relator: $\mathbf{x_{20}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{15}}$ ‖) If the cost function of a firm is $C(x) = \overline{C} + c.x$, give economic interpretations of the parameters c and $\overline{C}$.

Se a função de custo é $C(x) = \overline{C} + c.x$, a interpretação econômica é relativa a como o custo varia conforme x varia e a interpretação da constante $\overline{C}$. Desse modo, o termo cx indica que para cada unidade de x o custo sobe em "c" unidades monetárias, sendo este o custo variável da produção, como descrito abaixo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{c(x+h) + \overline{C} - cx - \overline{C}}{h} \quad (1)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cx + ch + \overline{C} - cx - \overline{C}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ch}{h} = \lim_{h\to 0} c = c \quad (2)$$

O termo $\overline{C}$ representa o custo fixo da função de custo. Esse termo é constante e independe do nível de produção de x que a firma venha a produzir (como mostra a equação). ■

Resolução (‖ Questão: 6.4.3 ‖ Relator: $\mathbf{x_{05}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{20}}$ ‖)

If the total saving of a country is a function $S(Y)$ of the national product Y, then $S(Y)$ is called the marginal propensity to save, or MPS. Find the MPS for the following functions:

a) $S(Y) = S + sY$

$S'(Y) = \frac{\mathrm{d}S(Y)}{\mathrm{d}Y} = s$

b) $S(Y) = 100 + 0.1Y + 0.0002Y^2$

$S'(Y) = \frac{\mathrm{d}S(Y)}{\mathrm{d}Y} = 0.1 + 0.0004Y$

■

Resolução (‖ Questão: 6.4.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Let $T(y)$ denote the income tax a person is liable to pay, as a function of its income y. Then $T'(y)$ is called the *marginal tax rate*. Consider the case when $T(y) = ty$, where t is a constant number in the inverval $(0, 1)$. Characterize this tax function by determining its marginal rate.

A *marginal tax rate* é dada por $T'(y) = \lim_{h\to 0} \dfrac{T(y+h) - T(y)}{h}$, em que h é um acréscimo de y.

$\lim_{h\to 0} \dfrac{T(y+h) - T(y)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{t(y+h) - ty)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{ty + th - ty}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{th}{h} = \lim_{h\to 0} t = t$

Logo, a *marginal tax rate* é dada pelo valor de t.

■

Resolução (‖ Questão: 6.4.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Let $x(t)$ denote the number of barrels of oil left in a well at time t, where time is measured in minutes. What is the interpretation of the equation $x'(0) = -3$?

Como $x(t)$ é o número de barris que estão em um poço no tempo t, temos que $x'(t)$ é a inclinação do gráfico que relaciona o número de barris com o tempo que se passa. Uma inclinação positiva em algum ponto significa que o número de barris naquele momento está aumentando, uma inclinação negativa significa que o número de barris no poço está diminuindo. Desse modo como $x'(0) = -3$, temos que em t=0 a inclinação desse gráfico é de -3, ou seja há uma taxa de extração de três barris. (extração pois a inclinação do gráfico é negativa).

■

Resolução (‖ Questão: 6.4.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

O custo total de produzir $x \geq 0$ unidades de uma commodity é $C(x) = x^3 - 90x^2 + 7500x$.

a) Use o resultado do exercício 6.2.10 para calcular a função de custo marginal $C'(x)$.

Resultado do exercício 6.2.10:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Aplicando o resultado em $C(x)$:

$$C(x) = x^3 - 90x^2 + 7500x \Rightarrow C'(x) = 3x^2 - 180x + 7500$$

b) Para qual valor de x o custo marginal tem valor mínimo?

Para encontrar o valor de x que faz uma função quadrática assumir valor mínimo usa-se a relação $\frac{-b}{2a}$. Assim,

$$\frac{-(-180)}{2 \cdot 3} = 30$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.4.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

7. (a) A firm's profit function is $\pi(Q) = 24Q - Q^2 - 5$. Find the marginal profit, and the value $Q*$ of Q which maximizes profits.

$$\pi(Q) = 24Q - Q^2 - 5 \tag{3}$$
$$\pi'(Q) = 24 - 2Q \tag{4}$$
$$Q* = \pi(Q)' = 0 \tag{5}$$
$$0 = 24 - 2Q \tag{6}$$
$$2Q = 24 \to Q* = 12 \tag{7}$$

(b) A firm's revenue function is $R(Q) = 500Q - \frac{1}{3} \cdot Q^3$. Find the marginal revenue.

$$R(Q) = 500Q - \frac{1}{3} \cdot Q^3 \tag{8}$$
$$R'(Q) = 500 - Q^2 \tag{9}$$

(c) For the particular cost function $C(Q) = -Q^3 + 214,2Q^2 - 7900Q + 320700$ which was considered in Example 4.7.1, find the marginal cost.

$$C(Q) = -Q^3 + 214,2Q^2 - 7900Q + 320700 \tag{10}$$
$$C'(Q) = -3Q^2 + 428,4Q - 7900 \tag{11}$$

■

Resolução (‖ Questão: 6.4.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Referring to the definition given in Example 6.3.4, compute the marginal $C'(x)$ cost in the following cases:

a) $C(x) = a_1x^2 + b_1x + c$

As we proved in Exercise 6.2.7, if $f(x) = ax^2 + bx + c$, the derivative is $f'(x) = 2ax + b$

Applying the result we have that $C(x) = a_1x^2 + b_1x + c$, then $C'(x) = 2a_1x + b_1$

b) $C(x) = a_1x^3 + b_1$

As we saw in exercise 6.2.10, let $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, the derivative is $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Applying the result: $C(x) = a_1x^3 + b_1$ then $C'(x) = 3a_1x^2 + 2(0)x + 0 = 3a_1x^2$

■