



**Lista de Exercícios de Cálculo II (LOB1004) - 4**

**Profa. Responsável: Diovana A. S. Napoleão**

**Departamento de Ciências Básicas e Ambientais**

**Assunto referente: Função diferenciável, plano tangente e reta normal, diferencial, vetor gradiente**

1- Provar que as funções são diferenciáveis.

a)  $f(x, y) = xy$

b)  $f(x, y) = x + y$

c)  $f(x, y) = x^2y^2$

d)  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

e)  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

f)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

2- Verificar se  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$  e justificar.

a)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, se(x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$

b)  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, se(x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$

c)  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}, se(x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$

3- Determinar a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto especificado.

a)  $f(x, y) = \arctg(x - 2y)$  em  $\left(2, \frac{1}{2}, f\left(2, \frac{1}{2}\right)\right)$

b)  $f(x, y) = xy$  em  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right)$

c)  $f(x, y) = 3x^3y$  em  $(1, -1, f(1, -1))$

d)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  em  $(0, 1, f(0, 1))$

4-  $2x + y + 3z = 6$  é a equação do plano tangente ao gráfico de  $f(x, y)$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$

b) Determine a equação da reta normal no ponto  $(1, 1, 1)$



- 5- Considere a função  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ . Mostre que os planos tangentes ao gráfico de  $f$  passam pela origem.
- 6- Determine a aproximação linear da função  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  em  $(3, 2, 6)$  e use-a para aproximar o número  $f(x, y) = \sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$ .
- 7- Se  $z = x^2 - xy + 3y^2$  e  $(x, y)$  varia de  $(3, -1)$  a  $(2,96, 0,95)$ , compare os valores de  $\Delta z$  e  $dz$ .
- 8- Seja  $z = xe^{x^2 - y^2}$ .
- a) Calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta z$  em  $z$ , quando se passa de  $x = 1$  e  $y = 1$  para  $x = 1,01$  e  $y = 1,002$ .
- b) Calcule o valor aproximado para  $z$ , correspondente a  $x = 1,01$  e  $y = 1,002$ .
- 9- A energia consumida num resistor elétrico é dada por  $P = \frac{V^2}{R}$  (W). Se  $V = 100V$  e  $R = 10$  ohms, calcule o valor aproximado para a variação  $\Delta P$  em  $P$ , quando  $V$  decresce  $0,2$  V e  $R$  aumenta de  $0,01$  ohms.
- 10- Seja  $f(x, y) = xy$  e seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ , uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível  $f(x, y) = 2$ . Mostre que para todo  $t$  em  $I$ ,  $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$ . Dê exemplo de uma curva cuja imagem esteja contida na curva de nível  $xy = 2$ .