# Relatório de Resoluções

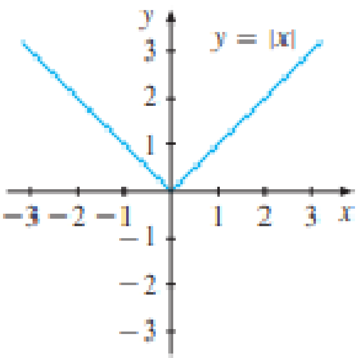
O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

| | |
|---|---|
| $x_{05}$: José Soares Jr. | $x_{11}$: Luca Monaco |
| $x_{06}$: Maurício Damião | $x_{15}$: Rodrigo Melendez |
| $x_{08}$: Pedro Lopes Silva | $x_{18}$: Matheus Cardoso |
| $x_{09}$: Rafael Maddalena | $x_{20}$: Gustavo Zequini |

**Resolução ( $\|$ Questão: 5.R.1 $\|$ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ $\|$ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ $\|$ )**

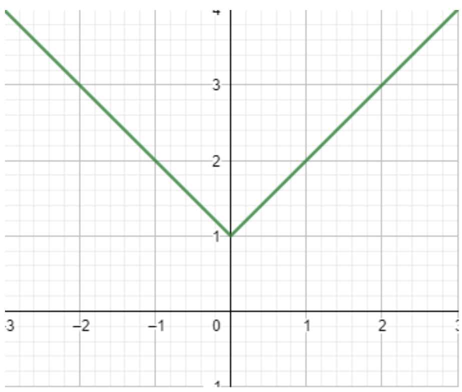
Use a figura 4.3.10 e as regras para mudança de gráficos para desenhar os gráficos das seguintes funções:

Figure 1: Figura 4.3.10



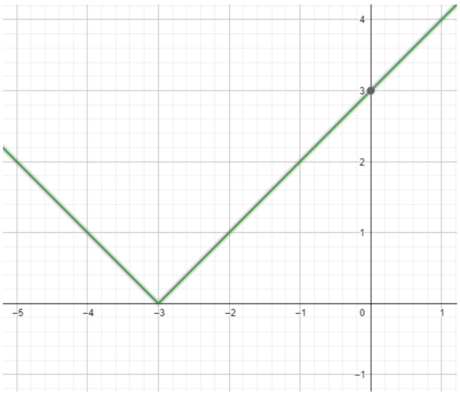

**a)** $y = |x| + 1$
Na função acima, quando $x = 0$, $y = 1$, sendo que $y$ nunca será menor que 1. Assim, para obter o gráfico de $y = |x| + 1$ basta deslocar o gráfico de $y = |x|$ para baixo de forma que o vértice se encontre no ponto $(0, -1)$:

Figure 2: $y = |x| + 1$




**b)** $y = |x + 3|$
Nesta função, quando $x = 0$, $y = 3$; e quando $x = -3$, $y = 0$. Portanto, para obter o gráfico de $y = |x + 3|$

Figure 3: $y = |x+3|$

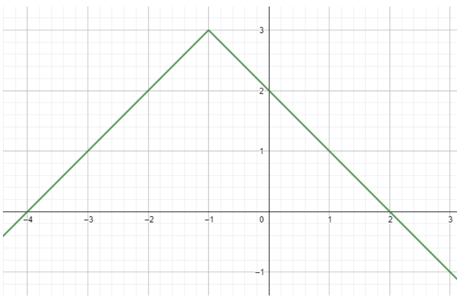


basta deslocar o gráfico de $y = |x|$ para a esquerda, de forma que o vértice se encontre em $(-3, 0)$ e a função passe por $(0, 3)$:

**c)** $y = 3 - |x+1|$

Nesta função, quando $x = 0$, $y = 2$; quando $x = -4$ ou $x = 2$, $y = 0$; e $y$ terá seu valor máximo no ponto $(-1, 3)$. Portanto, para obter o gráfico de $y = |x+3|$, deve-se inverter o gráfico de $y = |x|$, deslocá-lo para cima e para a esquerda, de forma que o vértice se encontre em $(-1, 3)$ e a função passe pelos pontos $(0, 2)$, $(2, 0)$ e $(-4, 0)$:

Figure 4: $y = |x+3|$



■

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ )**

2. If $(x) = x^3 - 2$ and $g(x) = (1-x)x^2$, compute the six functions:

**a)**$(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) \tag{1}$$
$$(x^3 - 2 + [(1-x)x^2](x) \tag{2}$$
$$(x^3 - 2 + x^2 - x^3)(x) \tag{3}$$
$$(f+g)(x) = (x^2 - 2) \tag{4}$$

**b)** $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x) \tag{5}$$
$$(x^3-2-[(1-x)x^2](x) \tag{6}$$
$$(x^3-2-x^2+x^3)(x) \tag{7}$$
$$(f-g)(x) = (2x^3-x^2-2) \tag{8}$$

**c)** $(fg)(x)$

$$(fg)(x) \tag{9}$$
$$(x^3-2)(x^2-x^3)(x) \tag{10}$$
$$(fg)(x) = (x^5-x^6-2x^2+2x^3) \tag{11}$$

**d)** $(f/g)(x)$

$$(f/g)(x) \tag{12}$$
$$\frac{x^3-2}{x^2-x^3}(x) \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

$$\begin{array}{r|ll} & -1 & \\ \hline -x^3+x^2 & +x^3 & -2 \\ & x^3 & -x^2 \\ \hline & x^2 & -2 \end{array}$$

$$\frac{x^3-2}{x^2-x^3}(x) = -1 + \frac{x^2-2}{x^2-x^3} \tag{15}$$

**e)** $f(g(1))$

$$g(1) = (1-1)1^2 = 0 \tag{16}$$
$$f(g(1)) = 0^3 - 2 = -2 \tag{17}$$

**f)** $g(f(1))$

$$f(1) = 1^3 - 2 = -1 \tag{18}$$
$$g(f(1)) = [1-(-1)](-1)^2 = 2 \tag{19}$$

■

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ )**

Consider the demand and supply curves $D = 150 - \frac{1}{2}P$ and $S = 20 + 2P$, with $P = Price$

a) Find the equilibrium price $P*$, and the corresponding quantity $Q*$.

To find the Equilibrium, the two equations must be equal, then:

$$S = D \Leftrightarrow 20 + 2P = 150 - \frac{1}{2}P \tag{20}$$

Solving the equation we have:

$20 + 2P = 150 - \frac{1}{2}P \Leftrightarrow 2P + \frac{1}{2}P = 130 \Leftrightarrow \frac{5}{2}P = 130 \Leftrightarrow P = \frac{2}{5} \cdot 130 \Leftrightarrow P* = 52$

As the equilibrium price $(P*)$ is equal to 52, we just substitute in the supply formula to find the equilibrium quantity $(Q*)$:

$S = 20 + 2P \Rightarrow Q* = 20 + 2P* \Leftrightarrow Q* = 20 + 2 \cdot 52 \Leftrightarrow Q* = 124$

b) Suppose a tax of \$2 per unit is imposed on the producer's output. How will this influence the equilibrium price?

With a \$2 tax per unit, the supply function will be:

$$S = 20 + 2(P - 2) \Leftrightarrow S = 16 + 2P \tag{21}$$

So, the new equilibrium Price (P*) will be:

$$S = D \Leftrightarrow 16 + 2P = 150 - \frac{1}{2}P \tag{22}$$

Solving the equation we have:

$16 + 2P = 150 - \frac{1}{2}P \Leftrightarrow 2P + \frac{1}{2}P = 134 \Leftrightarrow \frac{5}{2}P = 134 \Leftrightarrow P = \frac{2}{5} \cdot 134 \Leftrightarrow P' = 53,6$

As the new equilibrium price $(P')$ is equal to $53,6$, we just substitute in the supply formula to find the new equilibrium quantity $(Q')$:

$S = 16 + 2P \Rightarrow Q' = 16 + 2P* \Leftrightarrow Q' = 16 + 2 \cdot 53,6 \Leftrightarrow Q' = 123,2$

c) Compute the total revenue obtained by the producer before the tax is imposed $(R*)$ and after $(R')$.

The total revenue before the tax is :

$$R* = P * \cdot Q* \Leftrightarrow R* = 52 \cdot 124 \Leftrightarrow R* = 6448 \tag{23}$$

The total revenue after the tax is :

$$R' = (P' - 2) \cdot Q' \Leftrightarrow R' = 51,6 \cdot 123,2 \Leftrightarrow R' = 6357,12 \tag{24}$$

■

---

**Resolução ( || Questão: 5.R.4 || Relator: $\mathbf{x}_{18}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ || )** Consider the demand and supply curves $D = 150 - \frac{P}{2} and S = 20 + 2P$.

a) Find the equilibrium price P*, and the corresponding quantity Q*.

Fazendo $D = S \iff 150 - \frac{P}{2} = 20 + 2P \iff 130 = \frac{5P}{2} \iff P* = 52$ e, substituindo em $S$ tem-se $S = 20 + 2(52) \iff S = Q* = 124$

b) Suppose a tax of \$2 per unit is imposed on the producer's output. How will this influence the equilibrium price?

$S' = 20 + 2P - 2S' \iff S' = \frac{20+2P}{3}$

Fazendo $D = S' \iff 150 - \frac{P}{2} = \frac{20+2P}{3} \iff 450 - \frac{3P}{2} \iff 430 = \frac{7P}{2} \iff P*' = \frac{860}{7}$, sendo $P*' > P*$, o imposto aumenta os preços

c) Compute the total revenue obtained by the producer before the tax is imposed (R*) and after (R').

Antes da tarifa a receita da empresa será de $R* = pQ = pD = 150p - \frac{p^2}{2}$ e depois da tarifa a receita passa a ser $R*' = 150p - 300 - \frac{(p^2-2p}{2} \iff R*' = 150p - \frac{p^2}{2} + 2p - 300 \iff R*' = R * +2p - 300$

■

---

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ )**

As a function of the price P per unit, the demand quantity $D$ for a product is given by $D = 120 - 5P$. Solve the equation for $P$ and so find the inverse demand function.

$$D = 120 - 5P \tag{25}$$

$$D - 120 = -5P \tag{26}$$

$$-P = \frac{D-120}{5} \tag{27}$$

$$-P = \frac{1}{5}.D - 24 \tag{28}$$

$$P = 24 - \frac{1}{5}.D \tag{29}$$

■

---

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ )**

Encontre as funções inversas dadas pelas fórmulas:

a) $y = 100 - 2x \Longrightarrow 2x = 100 - y \Longrightarrow x = 50 - \frac{y}{2}$

b) $y = 2x^5 \Longrightarrow x^5 = \frac{y}{2} \Longrightarrow \sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{\frac{y}{2}} \Longrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{y}{2}}$

c) $y = 5e^{3x-2} \Longrightarrow \ln y = \ln 5e^{3x-2} \Longrightarrow \ln y = \ln 5 + (3x-2)\ln e \Longrightarrow \ln y = \ln 5 + 3x - 2 \Longrightarrow 3x = 2 + \ln y - \ln 5 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}(2 + \ln \frac{y}{5})$

■

---

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ )**

The following functions are stricly incresing in their domains. Find the domains of their inverses and formulas for the inverses, using $x$ as the free variable.

Usaremos $y = f(x)$, a fim de facilitar os cálculos...Além disso, sendo $D_{f^{-1}}$ o domínio da função $f^{-1}(x)$:

- a) $f(x) = 3 + \ln(e^x - 2)$

  $D_{f^{-1}} = x \in \mathbb{R}$

  $y - 3 = \ln(e^x - 2) \iff e^{y-3} = e^x - 2 \iff e^{y-3} = e^x - 2 \iff e^{y-3} + 2 = e^x \iff x = \ln(e^{y-3} + 2)$

  Substituindo a variável:

  $\therefore f^{-1}(x) = \ln(e^{x-3} + 2)$

- b) $f(x) = \dfrac{a}{e^{-\lambda x} + a}$

  $D_{f^{-1}} \iff x \in (0,1)$

  $y(e^{-\lambda x} + a) = a \iff e^{-\lambda x} = \dfrac{a}{y} - a \iff (e^{-\lambda x})^{-1/\lambda} = (\dfrac{a}{y} - a)^{-1/\lambda} \iff e^{x} = [a(\dfrac{1}{y} - 1)]^{-1/\lambda}$
  $\iff x = \ln[a(\dfrac{1}{y} - 1)]^{-1/\lambda} \iff x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln[a(\dfrac{1}{y} - 1)] \iff x = -\dfrac{1}{\lambda}[\ln a + \ln(\dfrac{1}{y} - 1)] \iff$
  $x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln a - \dfrac{1}{\lambda}ln(\dfrac{1}{y} - 1)$

  Substituindo a variável:

  $\therefore y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln a - \dfrac{1}{\lambda}ln(\dfrac{1}{x} - 1)$

  Com isso, chegamos a duas condições de existência, sendo elas:

  - (i) $\dfrac{1}{x} + 1 > 0$
  - (ii) $x > 0$ (já que a possibilidade de ser diferente de 0 já está desconsiderada, e também $x < 0$ está impossibilitado pelo fato de $[\dfrac{1}{x} - 1]$ter que ser $> 0$)

■

---

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ )**

Determine the distances between the following pairs of points:
(a) $(2,3)$ and $(5,5)$

$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

$d = \sqrt{(5-3)^2 + (5-2)^2}$

$d = \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$d = \sqrt{4+9}$

$d = \sqrt{13}$

(b) $(-4,4)$ and $(-3,8)$

$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

$d = \sqrt{(8-4)^2 + (-3-(-4))^2}$

$d = \sqrt{(4)^2 + (1)^2}$

$d = \sqrt{16+1}$

$d = \sqrt{17}$

(c) $(2a, 3b)$ and $(2-a, 3b)$

$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

$d = \sqrt{(3b - 3b)^2 + ((2 - a) - 2a)^2}$

$d = \sqrt{(0)^2 + ((2 - 3a)^2}$

$d = \sqrt{(2 - 3a)^2}$

$d = \|2 - 3a\|$

Note que o resultado só faz sentido quando $2 - 3a \geq 0$, de modo que temos $\frac{2}{3} \geq a$

■

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ )**

Encontre as equações dos círculos com:

**a)** Centro em $(2, -3)$ e raio igual a 5.
Pela equação do círculo dada pelo livro:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{30}$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2 \tag{31}$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \tag{32}$$

**b)** Centro em $(-2, 2)$ e passando pelo ponto $(-10, 1)$.

Para ver a distância entre os dois pontos que será igual ao raio usaremos a equação da distância entre dois pontos dada pelo livro:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{33}$$
$$d = \sqrt{(-2 + 10)^2 + (2 - 1)^2} \tag{34}$$
$$d = \sqrt{8^2 + 1^2} \tag{35}$$
$$d = \sqrt{65} \tag{36}$$

Assim, pode-se encontrar a equação o círculo usando a distância encontrada anteriormente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{37}$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2 \tag{38}$$
$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 65 \tag{39}$$

■

**Resolução ( ‖ Questão: 5.R.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ )**

10. A point $P$ moves in the plane so that it is always equidistant between the two points $A = (3, 2)$ and $B = (5, -4)$. Find a simple equation that the coordinates $(x, y)$ of $P$ must satisfy. (Hint: Compute the square of the distance from $P$ to the points $A$ and $B$, respectively.)

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-(-4))^2 \tag{40}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 8y + 16 \tag{41}$$
$$-6x - 4y + 13 = -10x + 8y + 41 \tag{42}$$
$$4x - 12y = 28(:4) \tag{43}$$
$$x - 3y = 7(:-1) \tag{44}$$
$$-x + 3y = -7 \tag{45}$$
$$y = \frac{x}{3} - \frac{7}{3} \tag{46}$$

■